

주행 중 차륜의 연성 진동 해석

류 윤 선\*<sup>1</sup>

Analysis of the Coupled Vibration for Traveling Wheel

Yun S. Ryu

ABSTRACT

The coupled vibration of a wheel-railway track system has been considered as that of a moving mass on a beam. In this paper, an analytical model is proposed to analyze the coupled vibration when a wheel travels on a railway track.

The railway track supported by sleepers is considered as a beam on Winkler's foundations, and the wheel traveling on railway track at constant speed is considered as a moving mass. Hertz's contact stiffness is assumed between the wheel and railway track.

Numerical results are compared with experimental ones to verify the validity of the numerical method. The numerical method is found to be efficient to analyze this system. Based on the numerical simulation, the appropriate analysis range of the beam model and the characteristics of coupled vibration are discussed.

Key words : coupled vibration, railway track

1. 머리말

차량이 레일 또는 철교 위를 주행할 때, 차륜과 레일 사이에는 연성 진동이 발생된다<sup>(1)</sup>. 차륜과 레일 사이의 연성 진동이 레일 표면에 발생하는 파상 마모 등 진동과 변형이 동시에 야기되는 진동 문제의 중요한 요인으로 주목 받고 있다<sup>(2)</sup>. 차륜-레일 사이의 연성 진동은 차륜과 레일과의 접촉 위치에 따라 진동계의 특성이 시시각각 변화하기 때문에, 진동의 형태는 대단히 복잡하다. 그러므로, 주파수 분석을 통한 특성 파악에도 한계가 있는 것으로 알려져 왔다. 더구나, 차량 통과시의 실측 결과에 대한 해석도 용이하지 않다.

일반적으로 이러한 형태의 연성 진동 문제에 대해서는 수치해석적인 접근이 유력한 수단으로 인정되고 있으며, 본 연구도 수치해석을 기초로 주행시의 차륜과 레일과의 연성 진동 문제에 접근하기로 했다.

종래의 차륜과 레일의 진동 문제에 있어서는, 레일의 길이를 어느 정도까지 고려하여 계를 모델링할 것인가에 대해서 논의되고 있다<sup>(3)</sup>.

본 연구에서 레일은 **Winkler** 지지 형태의 보로, 그 위에 차륜이 이동 질량으로서 일정한 속도로 주행하고 있는 상태를 해석 모델링 하였다. 이 해석 모델에 대한 수치해석 결과와 시험 결과를 비교 검토하고, 수치해석의 유용성에 대해 검증하고자 한다.

2. 해석 모델과 운동 방정식

2.1 해석 모델의 구성

**Fig.1**에 차륜-레일간의 연성 진동 해석 모델을 보인다. 침목에 지지된 레일을 **Winkler** 탄성 지지된 보로서 모델화한다. 보는 단면이 일정하고, 자체 중량에 대한 중력을 무시하며, 굽힘강성 **EI**, 단면적 **A**, 단위 길이당 질량  $\rho A$ , 점성 감쇄계수 **c**이며, 점성감쇄계수  $c_s$ 의 감

\*1: 현대자동차 선형연구소

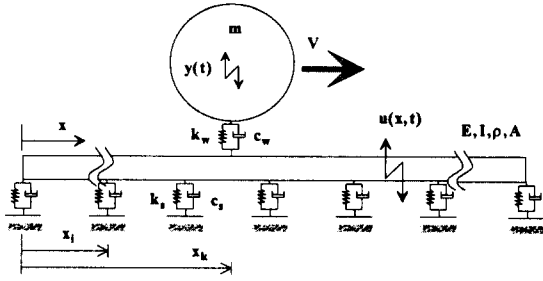


Fig. 1 The Analytical Model and Coordinate System

쇄를 고려한 강성  $k_s$ 의 스프링으로 일정한 간격을 갖고서 지지되어 있는 것으로 한다. 한편, 차륜은 레일 위를 일정 속도  $V$ 로 주행하는 질량  $m$ 의 이동 질량으로 하고, 질량  $m$ 에는 차량 한대분 대차의 질량도 포함하고 있는 것으로 한다.(이하 같음) 차륜과 레일 사이에는, Hertz 접촉 스프링 강성  $k_w$ 의 접촉 스프링과 점성감쇄계수  $c_w$ 의 감쇄를 고려하고 있다. 이때, Hertz 접촉 스프링 강성  $k_w$ 는 다음과 같은 선형의 범위 내에서만 생각한다<sup>(4)</sup>.

$$k_w = \left( \frac{2}{\eta} \right) \left( 2E^{*2} R_e P_0 \right)^{1/3} \quad (1)$$

단,  $E^{*2} = E^2(1 - \nu^2)$

여기서,  $E$ 는 보의 종탄성계수,  $\eta$ 는  $R_e$ 로 결정되는 무차원계수,  $R_e$ 는 접촉부의 유효 곡률반경,  $P_0$ 는 접촉부의 정적 하중,  $\nu$ 는 poisson 비이다.

## 2.2 운동 방정식

해석 모델 Fig.1에 대해서, 보는 무부하시의 상태에서부터 수직 하향의 처짐을  $u(x, t)$ , 이동 질량의 정적 평형 상태에서부터의 변위를  $y(t)$ 로 한다. 여기서,  $x$ 는 보의 축방향 위치,  $t$ 는 시간이다. 이때, 차륜-레일계, 즉 접촉 스프링-이동 질량계와 탄성

지지보와의 연성 진동 방정식은 다음과 같이 표현된다<sup>(5)</sup>.

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = G - P - M \quad (2)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c_w \frac{dy(t)}{dt} + k_w y(t) = Q \quad (3)$$

$$P = \sum_{i=1}^n \left\{ c_s \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + k_s u(x, t) \right\} \delta(x - x_i) \quad (4)$$

$$G = mg \quad (5)$$

$$M = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \delta(x - x_k) \quad (6)$$

$$Q = \left\{ c_w \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + k_w u(x, t) \right\} \delta(x - x_k) \quad (7)$$

여기서, 식(4)의  $n$ 은 침목의 갯수,  $x_i$ 는 침목의 위치, 식(7)의  $x_k$ 는 차륜과 레일과의 접촉점을 나타내고 있다. 보의 경계 조건은 양단이 스프링 지지되어 있는 것으로 하고, 보의 전단 변형과 회전 관성을 무시하는 Euler 보로 생각하며, 상하방향의 진동만을 고려한다.

식(2)와 (4)를 매트릭스 형태로 표기하면 다음과 같이 된다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{G - P - M\} \quad (8)$$

$$P = \sum_{i=1}^n \{ [C_s] \{ \dot{u} \} + [K_s] \{ u \} \} \delta(x - x_i) \quad (9)$$

여기서,  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ 는 각각 보의 질량, 감쇄, 강성 매트릭스이다.  $[C_s]$ ,  $[K_s]$ 는 각각 지지점에서의 점성 감쇄, 강성 매트릭스이다.

식(8), (3)으로부터 다음과 같은 연성 진동 방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} [M] & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \ddot{u} \} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & \\ & c_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \dot{u} \} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & \\ & k_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ u \} \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G - P - M \\ Q \end{Bmatrix} \quad (10)$$

이후에 보이는 해석 결과는 식(10)에 Duhamel 적분과 Runge-Kutta 법을 적용하여 구한 해를 정리한 것이다.

### 3. 실측과 수치해석 결과와의 비교 분석

주행 중인 차륜에서, 차륜-레일간의 연성 진동에 의한 레일의 상하 진동을 실측한 결과와 해석 모델로부터 수치해석을 수행한 결과와의 비교 분석을 통하여, 해석 모델의 타당성을 검토한다. 수치해석에 사용된 모델의 파라미터는 실측 대상의 차량과 레일의 각 제원에 상당하는 것으로서, 이 제원을 Table 1에 나타낸다.

Fig.2(a)는 차량 통과시의 침목의 상하 방향 가속도, Fig.2(b)는 침목의 상하 변위를 나타내는 실측 결과이다. 침목의 상하 변위는, 차량이 침목 위를 통과할 때 현저하게 되지만, Fig.2(b)의 결과에서도 각 대차의 두개의 차륜이 침목 위를 차례차례 통과하는 현상을 알 수 있게 되었다. 그리고, Fig.2(a)와 (b)와의 비교에 의해, 차량이 침목을 통과하는 경우, 침목의 변위가 커지

Table 1 The Principal Data for Calculation

EI	Flexural Rigidity of a Railway Track(MNm <sup>2</sup> )	4.03
m <sub>r</sub>	Mass of Railway Track(kg/m)	50.47
A	Sectional Area of Railway Track(m <sup>2</sup> )	6.4x10 <sup>-3</sup>
I	Moment of Inertia of Railway Track(m <sup>4</sup> )	1.96x10 <sup>-5</sup>
l	Distance between Sleepers(m)	0.625
k <sub>s</sub>	Stiffness of Sleeper (MN/m)	0.68
c <sub>s</sub>	Damping Coefficient of Sleeper(kNsec./m)	5
k <sub>w</sub>	Stiffness of Hertzian Contact Spring (MN/m)	2000
c <sub>w</sub>	Damping Coefficient of Contact Spring (kNsec./m)	51
m	Effective Mass of a Wheel(kg)	349
V	Traveling Velocity (km/h)	37

게 되고, 여기에 수반되어 침목의 상하 방향 가속도도 최대가 되는 것을 알았다.

또, Fig.3(a)는 침목의 상하진동을, Fig.3(b)는 레일의 상하진동을 보여주고 있다. Fig.2의 검토에 의해 침목의 상하 진동이 최대가 된 시각에 차량이 침목 위를 통과하고 있다고 생각되지만, 레일의 상하방향 변위는 차량이 침목에 도달하기 전에 최대 진폭으로 되고 있는 것을 알 수 있다.

Fig.4는 해석 모델을 이용한 침목 위 레일의 상하 방향 가속도의 수치해석 결과를 나타낸 것이다. 레일의 길이는 15m로 하고, 그 중앙부의 레일의 상하 방향 가속도를 나타내고 있다. Fig.4의 점선은 차량이 침목 위를 통과하는 순간을 나타

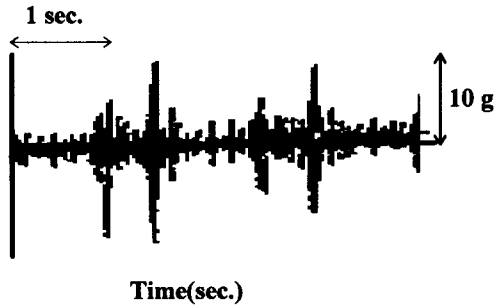


Fig. 2(a) Acceleration of Sleeper

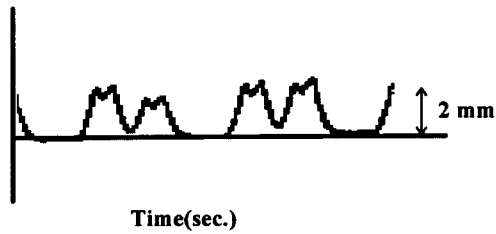


Fig. 2(b) Displacement of Sleeper

Fig. 2 The Vibration Responses of Sleeper (Measured)

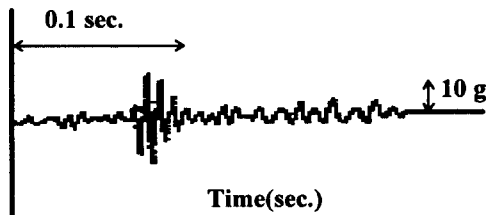


Fig. 3(a) Acceleration of Sleeper

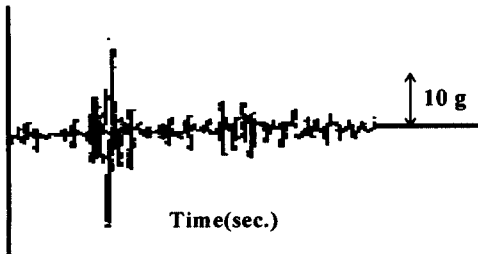


Fig. 3(b) Acceleration of Railway Track

Fig. 3 The Vibration Responses of Sleeper and Railway Track (Measured)

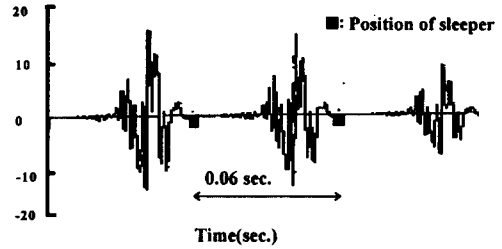


Fig. 4 The Acceleration of Railway Track for Single Wheel (Calculated)

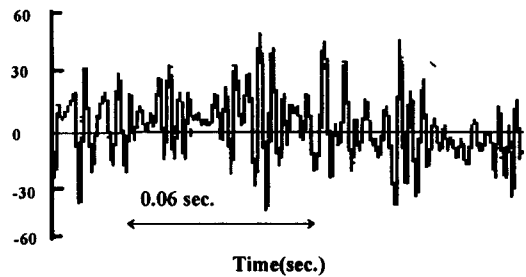


Fig. 5 The Acceleration of Railway Track for Multi-Wheels (Measured)

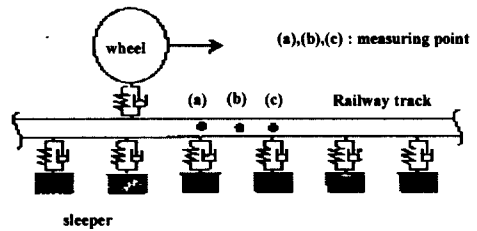


Fig. 6(a) Position of Measurement

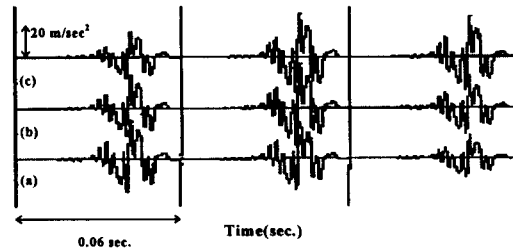


Fig. 6(b) Acceleration of Railway Track

Fig. 6 The Vibration of Railway Track (Calculated)

내며, Fig.3의 실측 결과와 비교해 보면, 차륜이 침목간 중앙을 통과한 후, 즉 침목에 도달하기 전에 레일의 진동이 최대 진폭으로 된다고하는 특징을 보여주고 있다.

Fig.5는 차량 주행 중의 레일 진동을 실측한 결과이다. 계측점은 침목과 침목 사이 레일의 중앙부이며, 레일 상하 진동만을 계측하였다. 차륜이 침목 한구간을 통과하는 시간이 약 0.06초로서, 그 사이에 레일이 진동하는 형태를 해석 결과와 비교하였다.

본 결과로서는 차륜이 레일의 어느 부분과 접촉할 때 레일의 진동이 최대로 되는지는 파악할 수 없지만, Fig.2, 3의 결과로 차륜이 침목간 중앙부를 통과한 직후부터 레일에는 주기적으로 현저한 진동이 발생되는 현상을 발견할 수 있다. 이는 Fig.4의 해석 결과와도 경향상 일치하는 것으로 판단된다. 그러나, 실측의 경우는 다수의 차륜에 의한 영향이 포함되어 계측되었기 때문에 차륜 한개의 경우와 완전히 일치하는 경향을 확인할 수는 없지만, 침목간 한구간을 통과한 경우만을 보면, 차륜 한개에 의한 경향과 대체로 일치한다고 판단될 수 있는 진동의 형태를 보이고 있음을 확인할 수 있다.

이상의 실험 및 수치해석 결과를 비교하여, 계의 진동수에 대해서 논의한다. 대체적인 진동수 성분은 차륜.레일간의 접촉 강성에 기인하는 진동수와 이보다 낮은 진동수 성분, 즉 레일 저차의 굽힘 진동에 기인하는 진동수 성분들이 지배적으로 되는 점에서, 기존의 연구 결과와 대체로 일치하고 있다<sup>6)</sup>.

실측 대상과 해석 모델과의 차이점으로서, 수치해석 모델이 차륜 한개를 고려한 것에 반하여 실측 대상은 다수의 차륜으로 구성되어 있다는 점, 실제의 차량은 주행시에 다양한 종류의 동적인 불확정 요소가 생기고 있다는 점 등을 들 수 있다. 그리고,

이러한 점들을 고려하면, 이상의 검토로부터 본 해석 모델에 의해서 차륜.레일계의 진동 현상을 본질적으로 분석하는 것이 가능하다고 말할 수 있겠다.

#### 4. 차량 주행시의 동특성

해석 모델을 이용한 수치해석의 일례로서, 차륜이 레일 위를 통과할 때 레일의 상하방향 진동 가속도의 변동을 식(10)을 이용하여 수치해석적으로 구해 보았다.

Fig.6은 차륜이 통과하는 과정에 있어서 레일의 각 관찰점, (a) 침목 위, (b) 침목간 중앙, (c) 침목 위에서의 상하방향 가속도가 시시각각 변화하는 모양을 나타내고 있다. 각 점의 가속도는 횡축을 시간축으로 하고 관찰점에 대응해서 그림중의 (a), (b), (c)로 각각 나타내고 있다. 그림 중의 점선은, 그림 상부에 보인 차륜.레일계의 침목의 위치에 대응하고 있고, 침목 세구간에 대한 결과만 표시하고 있다.

앞절에서 검토한 바와 같이, 차륜이 침목간 중앙을 통과한 후, 레일의 가속도가 최대 된다고하는 특징은 어느 침목간에 대해서도 확인이 되었다. 관측점 (a)에 대해서는, 차륜이 이웃한 침목간을 통과하는 경우, 또는 다음으로 이웃한 침목간을 통과하는 경우에도, 차륜이 침목간의 중앙을 통과할 때면 큰 진동이 발생하게 된다. 이처럼 레일 위의 관측점에 발생하는 진동은, 차륜의 통과 과정을 길게 관측할 필요가 있다고 생각된다.

#### 5. 맺음말

본 연구에서는, 차륜.레일계의 연성 진동 해석에 대해, 차륜의 관성력을 고려한 수치해석과 실험에 의한 해석 모델의 검증을 거쳐, 그 타당성을 검토하였

다. 본 연구에서 제시한 해석 모델에 의한 수치 해석 결과는 실험 결과와 비교적 잘 일치하고 있다. 차량 통과시의 연성 진동계의 특징적 현상, 즉 차륜이 침목간 중앙을 통과한 후에 레일의 진동이 현저하게 되는 것을 알 수 있었다.

향후, 다수의 차륜에 의한 연성 진동 해석에 대한 연구가 계속 진행되어야 하리라 생각되며, 차륜간 거리, 침목 간격 등에 대한 체계적인 분석이 이루어져야 할 것으로 기대된다.

본 연구에서 사용된 실측 결과는 사단법인 일본 지하철협회의 양해를 얻어 인용한 것임을 밝힌다.

## 참고 문헌

1. Dahlberg, T., Vehicle-Bridge Interaction, J. of Vehicle System Dynamics, 13 (1984), 187-206
2. Clark, R.A., et al, An Investigation into the Dynamic Effects of Railway Vehicle Running on Corrugated Rail, J. IMechE, 24-2 (1982), 65-76
3. Duffy, D.G., The Response of an Infinite Railroad Track to a Moving Vibrating Mass, Trans. ASME, 57 (1990), 66-73
4. Roak, R.J. and Young W.C., Formulas for Stress and Strain, 5<sup>th</sup> ed., (1975), 517, McGraw-Hill.
5. Ryu, Y.S., et al, A Coupled Vibration Analysis Model of a Wheel-Railway Track System with Consideration of the Contact Stiffness, J. of JSME 62, no.603 (1996), 25-30
6. 류윤선, 조희복, 김사수, “접촉강성을 고려한 차량-레일계의 연성 진동 해석”, 한국소음진동공학회 춘계학술대회 논문집(1997.5), p.241-246