

부하토크가 로터시스템의 동기휘돌림에 미치는 영향

박 상 규

Effect of Load Torque on the Synchronous Whirling of a Rotor System

Sang Kyu Park

Abstract

In this study, the effect of load torque on the synchronous whirling of a rotor system has been studied analytically. Results show that the critical value of load torque to damping exists above which synchronous response decreases with increasing load torque. It has been also shown that the synchronous whirling amplitudes are more sensitive to the value of eccentricity and the ratio of disk radius to shaft length of the rotor system than other design parameters for a fixed value of load torque

I. 서 론

최근 설계 생산되는 회전기계는 출력을 증가시키기 위해서 대형화 및 고속화 되고 있으며 이에 따라 질량불평형에 의한 동기휘돌림(synchronous whirling) 문제 뿐 아니라 축정렬 불일치, 시일(seal)이나 유막 베어링에서의 유체력, 커플링이나 동력전달 기어박스에서의 마찰력 등에 의한 비동기휘돌림 현상(nonsynchronous whirling)도 큰 관심의 대상이 되어왔다. 그러나 회전기계 임펠러나 디스크에 작용하는 유체에 의한 부하 토크(load torque)로 인해 발생하는 비동기휘돌림 현상은 Alford⁽¹⁾가 시험결과를 발표하기 전까지 큰 주목을 받지 못하였다. Alford의 실험에서는 축류 압축기에서 출력을 100%로 하였을 경우 휘돌림 현상이 더욱 증가하는 것으로 나타났으며 날개끝단간격(blade tip clearance) 변화에 따른 공기역학적 힘에 의한 부하 토크

가 주요 원인이라고 결론지었다. 이후 여러 연구자들에⁽²⁻³⁾ 의해 원심 압축기에서도 부하 토크에 의한 비동기휘돌림 현상이 나타나는 것이 발표되었다. 대부분의 실험 결과에서 압축기 자체만의 최종시험에서는 문제가 없었으나 현장에 설치하여 부하를 가하는 경우 비동기휘돌림이 발생하였다. 이러한 부하 토크에 의한 비동기휘돌림 현상을 해석하기 위하여 Vance⁽⁴⁾ 접선 방향의 부하 토크를 받는 임펠러가 있는 강성로터에서의 비동기휘돌림 현상을 "토크휘돌림(Torquewhirl)"이라 명명하고 그 역학적 거동을 수학적으로 모델링하여 비선형 미분방정식의 해를 구하였다. 또한 비동기 휘돌림 현상의 크기는 토크와 시스템 감쇠량의 비율과 밀접한 관계가 있음을 설명하고 축의 길이나 강성 및 감쇠량의 최적화를 통해 토크휘돌림 현상을 방지할 수 있음을 보여주었다. 그러나 로터 시스템의 모든 질량은 임펠러의 중심에 있는 것으로 가정하고 질량 불평형력은 고려하지 않았다. 이후 여러 연구자들이⁽⁵⁻⁶⁾ 이러한 이론을 바탕으로 토크휘돌

* 정회원, 연세대학교 산업환경과

림에 의한 회전기계 안정성의 변화 및 적용에 대한 논문을 발표하였으며 Yim은⁽⁷⁻⁸⁾ 소형 실험 장치를 이용하여 토크휠돌림 이론을 실증하였다. 그러나 이 실험 결과에 의하면 비동기휠돌림 운동 뿐만 아니라 동기휠돌림 운동도 부하 토크에 따라서 크기가 변한다는 것이 관찰되었다. 더우기 동기휠돌림 운동의 이러한 변화는 감쇠량이나 강성의 증감과는 무관한 것으로 나타났으며 질량불평형력의 크기가 동기휠돌림 운동의 변화에 주된 원인이라고 일반적으로 알려져 있는 것과는 다른 특이한 현상이다.

따라서 본 연구에서는 부하 토크가 동기휠돌림 운동에 미치는 영향을 파악하기 위하여 Vance의⁽⁴⁾ 수학적 모델을 수정하여 해석하였다.

II. 이론해석

본 연구에서는 부하 토크가 동기휠돌림에 미치는 영향을 해석하기 위하여 그림 1과 같이 단순화된 모델을⁽⁴⁾ 이용하였으며 질량불평형에 의한 효과를 포함시켰다. 고정좌표계 $x'y'z$ 를 이용하여 로터 시스템의 운동에너지와 위치에너지는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$T = \left(\frac{1}{2} I_{x'x'} \omega_x'^2 + I_{y'y'} \omega_y'^2 + I_{z'z'} \omega_z'^2 \right) + m l e \omega_x \omega_z \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} K_\theta \theta^2 + m g l_2 (1 - \cos \theta) \quad (2)$$

여기서 각속도는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{Bmatrix} \omega_x' \\ \omega_y' \\ \omega_z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Lagrangian L은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L = T - V = & \frac{1}{2} I_x' (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta) \\ & - m l e (\dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \psi \cos \theta + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta \\ & + \dot{\phi}^2 \sin \psi \sin \theta \cos \theta) - \frac{1}{2} K_\theta \theta^2 - m g l (1 - \cos \theta) \quad (4) \end{aligned}$$

Lagrangian으로부터 운동량은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = P_\theta = I_x' \dot{\theta} - m l e (\dot{\psi} \cos \psi + \dot{\phi} \cos \psi \cos \theta) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = P_\phi = & I_x' \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta \\ & - m l e (\dot{\theta} \cos \psi \cos \theta + \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta + 2 \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \cos \theta) \quad (6) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = P_\psi = I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) - m l e (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta) \quad (7)$$

위의 식으로부터 각속도 $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ 를 운동량 P_θ , P_ϕ , P_ψ 의 식으로 표시할 수 있다.

일반화된 힘은 보존력과 비보존력으로 구성되며 보존력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} = & (I_x' - I_x) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_z \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \\ & - K_\theta \theta - m g l \sin \theta + m l e (\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ & - \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta + \dot{\phi}^2 \sin \psi \cos 2\theta) \quad (8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \psi} = & m l e (\dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi \\ & - \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \cos \psi) \quad (10) \end{aligned}$$

시스템의 감쇠효과는 주로 점성에 의한 것이라 가정하면 점성 감쇠에 의한 비보존력은 다음과 같다.

$$Q_\theta = -C_d l^2 \dot{\theta} \quad (11)$$

$$Q_\phi = T_s - C_L (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta - C_d \dot{\phi} l^2 \sin^2 \theta \quad (12)$$

$$Q_\psi = T_s - C_L (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad (13)$$

여기서 T_s, C_L, C_d 는 구동 토크(driving torque), 부하토크계수, 점성감쇠계수를 각각 나타낸다. 따라서 일반화된 힘은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} P_\theta = & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + Q_\theta \\ = & (I_x' - I_x) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_z \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta - K_\theta \theta \\ & - m g l \sin \theta + m l e (\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta \\ & + \dot{\phi}^2 \sin \psi \cos 2\theta) - C_d l^2 \dot{\theta} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\phi = & \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + Q_\phi \\ = & T_s - C_L (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta - C_d \dot{\phi} l^2 \sin^2 \theta \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{P}_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + Q_\phi \\
&= m l e (\dot{\theta} \psi \sin \phi + \dot{\theta} \phi \cos \theta \sin \phi \\
&\quad - \dot{\phi} \psi \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi) \\
&\quad + T_s - C_L (\dot{\phi} + \phi \cos \theta) \quad (16)
\end{aligned}$$

여기서 휘돌림 진폭 θ 와 위상각 ψ 가 일정한다고 가정하면 각속도 $\dot{\theta}=0$, $\dot{\psi}=0$ 이고 $\dot{\phi}=\omega_s$ 가 된다. 동적평형 상태에서 $\dot{P}_\theta=0$, $\dot{P}_\psi=0$, $\dot{P}_\phi=0$ 이므로 식 (14)로부터 다음의 관계식을 얻는다.

$$\dot{\phi} = \pm \sqrt{\frac{\frac{\Omega_s^2 \theta}{\sin \theta} + \Omega_g^2}{I_1 \cos \theta + I_2 \sin \theta \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}}} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{I_x - I_z}{I_x} & I_2 &= \frac{m l e}{I_x} \\
\Omega_s^2 &= \frac{K_\theta}{I_x} & \Omega_g^2 &= \frac{m g l}{I_x}
\end{aligned}$$

이다. 또한 식 (15)와 (16)으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{\phi} = 0 \quad (18)$$

$$\dot{\phi} = \frac{R_c \cos \theta (\cos \theta - 1) + \sin^2 \theta}{\frac{1}{\omega_n} R_M \sin \theta \cos \theta \cos \phi} \quad (19)$$

여기서

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \sqrt{\Omega_g^2 + \Omega_s^2} \\
R_M &= \frac{m l e \omega_n}{C_d l^2} \\
R_c &= \frac{C_L}{C_d l^2}
\end{aligned}$$

이다.

식(17)과 (19)로부터 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\omega_n^4 (I_2^2 R_M^2 \cos^2 2\theta - I_1^2 R_M^2 \sin^2 \theta \cos^4 \theta) \\
&+ \omega^2 \left\{ \left[2I_1 \left(1 + \frac{1}{\Omega_R^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos \phi \right] \right. \\
&+ \left. \left[2I_1 R_M^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\Omega_R^2}} \right) \theta \sin \theta \cos^2 \theta \cos \theta \right] \right. \\
&\left. - I_2^2 \left(\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \right)^2 [R_c \cos \theta (\cos \theta - 1) + \sin^2 \theta]^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \left[R_M^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\Omega_R^2}} \right) \theta^2 \cos^2 \theta + R_M^2 \left(\frac{1}{1 + \Omega_R^2} \right)^2 \sin^2 \theta \cos \theta \right. \\
&\left. + 2R_M^2 \left(\frac{1}{1 + \Omega_R^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\Omega_R^2}} \right) \theta \sin \theta \cos^2 \theta \right] = 0 \quad (20)
\end{aligned}$$

여기서

$$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{\Omega_g^2 + \Omega_s^2}$$

$$\Omega_R = \frac{\Omega_s}{\Omega_g} = \sqrt{\frac{K_\theta}{m g l}}$$

III. 해석 결과 및 고찰

회전기계에 작용하는 부하토크가 동기휘돌림에 미치는 영향을 해석하기 위하여 식 (20)의 무차원식을 이용하여 프로그램을 작성하였다. 또한 참고 문헌 (4)에서 사용한 다음값을 기초로 하여 입력 데이터 R_M , R_c , Ω_R 을 선택하였다.

$$\begin{aligned}
m &= 0.065 \text{ lb-s/in} \\
L &= 5.5 \text{ in} \\
R &= 7.5 \text{ in} \\
K_\theta &= 100000 \text{ lb-in/rad} \\
\omega_n &= 3200 \text{ rpm} \\
e &= 0.001 \text{ in}
\end{aligned}$$

그림 2는 R_c 값을 0, 2.0, 5.0으로 증가시켰을 때 동기휘돌림 진폭을 나타내며 그림 3은 피크치 부근의 진폭을 확대시킨 것이다. 부하토크가 없는 경우, 즉 $R_c=0.0$ 인 에 비하여 $R_c=2.0$ 인 경우가 진폭이 증가함을 나타내고 있다. 그러나 $R_c=5.0$ 으로 증가하면 오히려 진폭이 부하토크가 없는 경우 보다 더 감소하고 있음을 알 수 있다. 이러한 결과로부터 임계 R_c 값이 존재함을 추측할 수 있으며 이 값을 경계로 하여 부하토크가 시스템의 감쇠효과를 감소시키다가 다시 증가시키는 것을 보이고 있다. 그림 4와 5는 e/L 값이 0.0002에서 0.009로 증가될 때의 진폭을 나타낸다. e/L 값이 커짐에 따라 비선형 효과는 감소하

지만 진폭은 증가하는 경향을 보이고 있으며 그림 2와 3의 결과와 같이 임계 R_c 값이 존재하고 있음을 알 수 있다. 그러나 불평형 질량의 편심을 변화가 R_c 값, 즉 부하토크의 변화보다 동기휘돌림 진폭에 더 큰 영향을 미치고 있다. 그림 6과 7은 R_w 값을 2.0으로 증가시켰을 때의 결과로서 그림 4와 비교해서 진폭이 감소한 것을 보여준다. R_w 값이 증가한다는 것은 불평형질량이나 편심률의 증가 또는 시스템 감쇠계수의 증가를 의미하기 때문에 그림 6과 7의 결과는 일반적인 경향과는 오히려 상반되는 결과를 나타내고 있다.

그림 8은 여러 다른 설계인자 값에 대한 결과로서 R_w 값이 커짐에 따라 진폭이 증가하고 있다. 그림 9와 10은 R_c 값을 0.0에서 20.0으로 증가시켰을 때 R/L 의 변화에 따른 진폭을 보여준다. R/L 값이 증가함에 따라 임계속도와 진폭이 모두 커지고 있으나 R_c 값의 변화가 진폭변화에 더 큰 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 그림 11은 R_c 값을 포함한 다른 설계인자 값이 일정할 때 e/L 값의 변화에 따른 진폭을 보여준다. e/L 값이 커짐에 따라 진폭이 증가하지만 최대 진폭의 변화는 크지 않다.

IV. 결론

부하토크가 회전기계의 동기휘돌림에 미치는 영향을 파악하기 위하여 단순화된 수학적 모델을 해석하였다. 부하 토크의 임계값이 존재하여 이 값을 경계로 하여 동기휘돌림 진폭을 증가 또는 감소시키는 것으로 나타났다. 또한 부하토크가 일정한 경우 다른 설계인자의 변화가 진폭에 미치는 영향을 파악한 결과 R_w 값과 R/L 값이 다른 인자에 비하여 상대적으로 큰 영향을 미치는 것으로 나타났다.

참고 문헌

(1)Alford, J.S.:Protecting Turbomachinery

From Self-Excited Rotor Whirl, J. of Engineering for Power, Oct. 1965, pp.333 - 344

(2)Wachel, J.C.:Nonsynchronous Instability of Centrifugal Compressors, ASME Paper No. 75-PET-22, Petroleum Mech. Engineering Conf., Tulsa, Ok., Sept.21-25,1975

(3)Fowlie, D.W., and Miles, D.D.:Vibration Problems with High Pressure Centrifugal Compressors, ASME Paper No.75-PET-28, Petroleum Mech. Engineering Conf., Tulsa, Ok., Sept.21-25, 1975

(4)Vance, J.M.: Torquewhirl - A Theory to Explain Nonsynchronous Whirling Failure of Rotors with High Load Torque, ASME. J. of Engineering for Power, Vol.100, pp. 235 -240, 1978

(5)Vance, J.M. and Laudadio, F.J : Rotor-dynamic Instability in Centrifugal Compressors:Are All the Excitations Understood?, ASME Paper 80-GT-149, ASME Gas Turbine Conf., New Orleans, La., March 10-13, 1980

(6)Nelson, C.C:A Torquewhirl Analysis of the Space Shuttle Main Engine High Pressure Turbopumps, ASME Paper No. 79-DET-76, Proc. of Design Engineering Tech. Conf, St.Louis, 1979

(7)Vance, J.M., Yim, K.B., and Noah, S.T.: Experimental Verification and Practical Application of Torquewhirl Theory of Rotor dynamic Instability, Proc. of the Symposium on Instability in Rotating Machinery, Carson City, Nev, 1985

(8)Yim, K.B., Noah, S.T. and Vance, J.M.: Effect of Tangential Torque on the Dynamic of Flexible Rotors, ASME J. of Applied Mechanics, Vol53, pp. 711-718, 1986

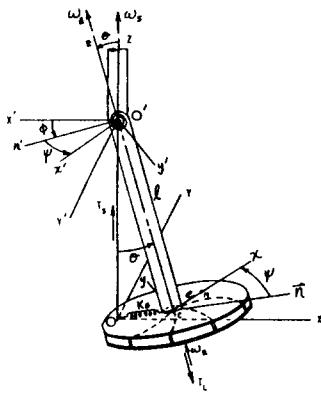


Fig.1 Torquewhirl model

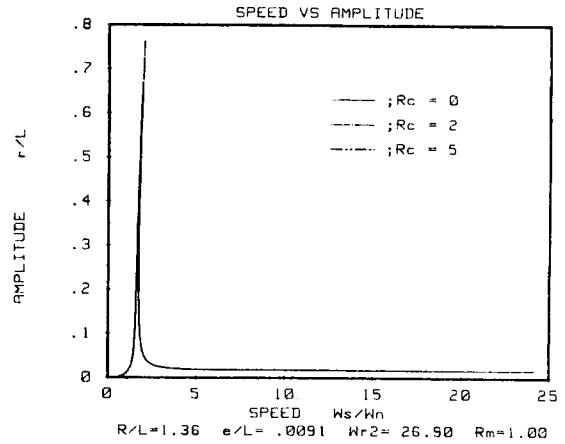


Fig.4 Synchronous response for $R_c=0,2,5$ with $e/L = 0.009$

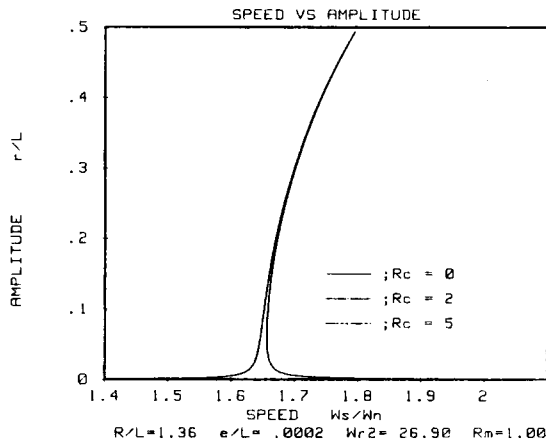


Fig.2 Synchronous response for $R_c=0,2,5$

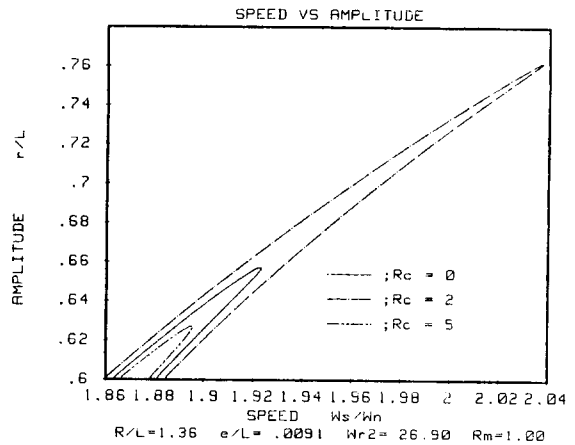


Fig.5 Synchronous response for $R_c=0,2,5$ with $e/L=0.009$

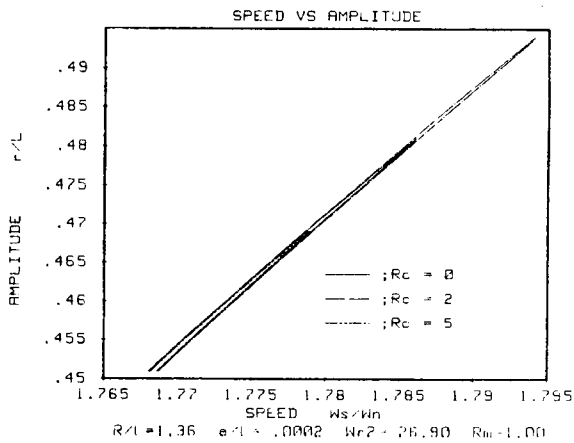


Fig.3 Synchronous response for $R_c=0,2,5$

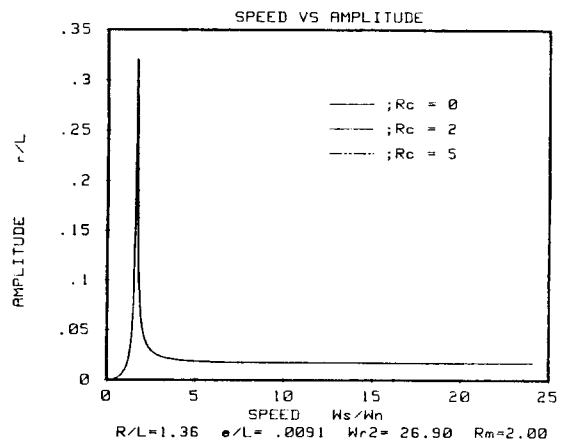


Fig.6 Synchronous response for $R_c=0,2,5$ with $R_m = 2.0$

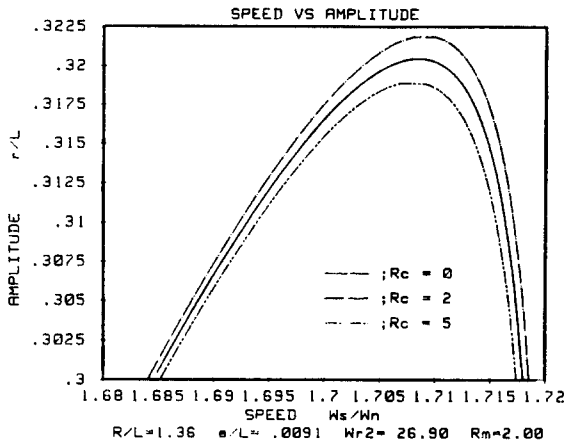


Fig. 7 Synchronous response for $R_c=0, 2, 5$ with $R_m=2.0$

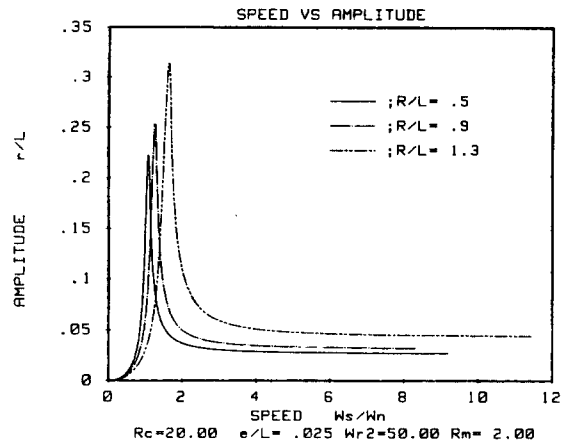


Fig. 10 Synchronous response for various R/L with $R_c=20.0$

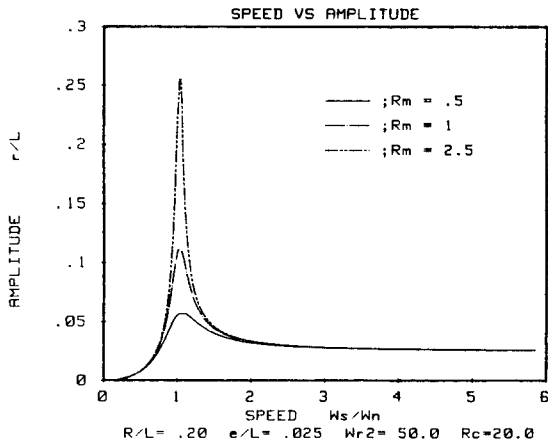


Fig. 8 Synchronous response for various R_m with different design parameters

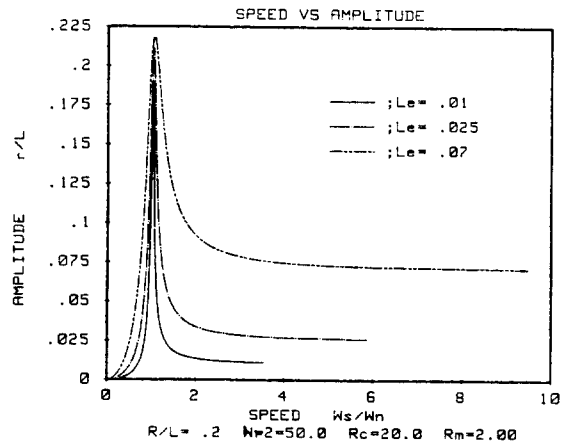


Fig. 11 Synchronous response for various e/L with $R_c=20.0$

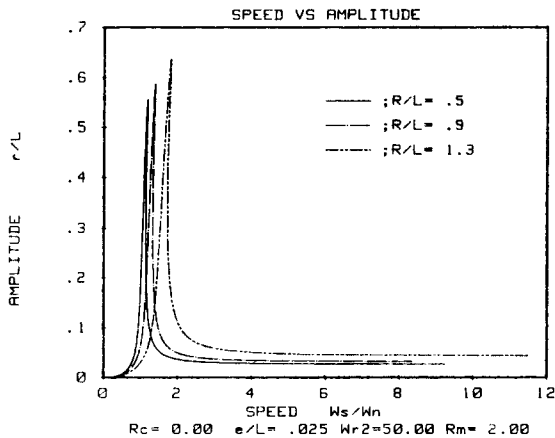


Fig. 9 Synchronous response for various R/L with $R_c=0$