

# 탄성 축-익 붙임 원판 계의 진동에 있어서 엇각 및 비틀림각의 영향

0전상복\*\*·이종원\*\*

## Effects of Stagger and Pretwist Angles on the Vibration of Flexible Shaft-Bladed Disk Systems

Sang-Bok Chun\* and Chong-Won Lee\*\*

### ABSTRACT

An analytical procedure on the base of the substructure synthesis and assumed modes method is developed to investigate the flexibility effect of bladed disk assembly on vibrational modes of flexible rotor system. In modeling the system, Coriolis forces, gyroscopic moments, and centrifugal stiffening effects are taken into account. The coupled vibrations between the shaft and bladed disk are then extensively investigated through the numerical simulation of simplified models, with varying the shaft rotational speed and the pretwist and stagger angles of the blade. It is found that the Coriolis and inertia forces and the inertia torque, which are induced by the one nodal diameter modes of the bladed disk and vary depending upon the stagger and pretwist angles, lead to the coupled motions of the shaft and the bladed disk.

**Keywords:** substructural synthesis method, assumed modes method, flexible shaft-bladed disk system, stagger angle, pretwist angle

### 1. 서론

축-익 붙임 원판 조립체는 가스터빈, 증기터빈, 압축기 등, 터보기계에 있어서 가장 중요한 요소 중 하나이다. 최근 이 요소는 과거보다 더욱 혹독한 환경에서 사용될 수 있도록 엄격하게 설계되는 경향이 있다. 이런 환경에서는 익, 원판 또는 축 요소를 과거와 같이 일부 강체로 해석하면, 동역학적 거동을 정확히 예측할 수 없는 경우가 자주 발생하게 된다. 이때에는 각 요소의 탄성적 거동을 설계 단계부터 고려하여 전체로서의 축, 익 붙임 원판의 진동 모드를 구하는 것이 매우 중요하다. 최근 축, 익 붙임 원판 전체의 연성 진동을 고려한 몇 개의 연구가 발표되어 있다<sup>(1-4)</sup>. Sakata<sup>(1)</sup> 및 Okamoto<sup>(2)</sup>는 유한요소법(FEM)을 이용하여 탄성 원판, 탄성 익, 탄성 축 및 강성 지지물로 구성된 회전체의 진동을 연구하였다. 저자들은 비행체가 선회할 때의 각속도 변화 또는 교란하는 외부 힘의 반응에 의해 회전체에 작용하는 자이로 모멘트의 영향을 조사하였다. Kader와 Locwy<sup>(3)</sup>는 탄성 축-익 붙임 원판 계의 강제응답을 계산하기 위해 모드 해석 접근

법에 근거한 해석적 방법을 제시했다. 저자들은 계의 응답에 있어서 코리올리력(Coriolis forces)과 탄성 익 붙임 원판과 축 운동 사이의 구조적 연성 효과를 연구하였다. Zhang의 다수<sup>(4)</sup>는 FEM 및 모드해석법을 이용하여 원심력장에서의 축-강성 원판 및 익 붙임 원판 계를 각각 해석하였다. 그들은 축-익 붙임 원판 계의 운동방정식을 구했는데 여기서 회전하는 익 붙임 원판계의 큰 비선형 변형을 고려하였다. 그러나, 위에 보인 문헌들은 엇각, 비틀림각과 같은 익의 형상 인자의 효과는 검토 못 하고 단순히 연성 모드를 구하는데에 한정되어 있을 뿐이다.

여기서는 탄성 축-익 붙임 원판 계에 있어서 저차 고유진동수 및 진동모드를 구하기 위해 부분구조합성법<sup>(5)</sup>과 가정모드법<sup>(6)</sup>을 이용한 해석적 방법을 제시한다. 본 방법은 유한요소법과 비교하여 작은 자유도를 가지면서 계산이 효율적이며 사용하기 쉽다는 장점을 보여 주고 있다. 마지막으로, 몇가지 수치해석의 예를 보여 줌으로써, 엇각, 비틀림각이 탄성 축-익 붙임 원판 계의 진동 특성에 미치는 영향을 검토하였다.

\* 회원, 경안여자전문대학 환경공업과

\*\* 회원, 한국과학기술원 기계공학과

## 2. 이론 해석

Fig. 1에 보인 바와 같이 두 개의 강성 배어링으로 지지된 축, 그리고 익 붙임 원판으로 구성된 간단한 해석 모델을 고려한다. 여기서 축은 일정치 않은 단면을 가진 보, 원판은 일정 두께를 가진 원형 판으로, 그리고 익은 비틀림 각과 잇각을 가진 일정 두께를 가진 사각 보로 가정한다. 또한 해석 전반에 걸쳐 변형은 극히 작은 범위에 있는 것으로 가정하여 선형적 해석 이론이 적용되는 것으로 한다. 본 연구의 주 관심사는 축과 익 붙임 원판의 동역학적 연성의 규명이므로 배어링의 탄성효과는 고려하지 않는다. 또한 해석 전반에 있어서 변형은 매우 작다고 가정한다. 본 연구는 축과 익 붙임 원판 사이의 연성효과가 계의 진동 특성에 미치는 영향을 정성적으로 조사하는 데 그 목적이 있다. 특히, 본 연구는 몇 개의 저차 굽힘 모드를 해석하는 데 그 목적이 있기 때문에 비틀림 및 축방향의 진동 모드는 다루지 않는다.

전체계의 운동 에너지 및 변형 에너지를 구하기 위해, 계를 여러 개의 부분구조들의 합으로 이루어진 것으로 간주하고, 여기에 각 부분구조의 강체 운동을 묘사하기 위해 각 부분구조에 고정된 국소 좌표계(local reference frame)를 지정한다. 그러면 각 부분구조의 탄성 변형은 지정된 국소 좌표계에 대한 상대 운동으로 정의된다. Fig. 2 및 Table 1에, 이러한 국소 좌표계 및 관련 단위 벡터 그리고 각 좌표계에 대해 정의된 병진 및 회전 변위를 설명하였다. 이제  $i$ 번째 부분구조 상의 임의의 위치에서의 한 점을 고려해 보자. 그러면 그 점의 절대 속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1)$$

여기서  $[d\mathbf{r}/dt]$ 는 국소 좌표계에 대한  $\mathbf{r}$ 의 시간에 대한 미분을 나타내며  $\boldsymbol{\omega}$ 는 그 국소좌표계의 순간 절대 각속도 벡터를 나타낸다. 그러면  $i$ 번째 부분구조의 운동에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_i = \frac{1}{2} \rho_i \int_{V_i} \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV \quad (2)$$

여기서  $\rho_i$ 는 질량밀도 그리고  $V_i$ 는 체적을 나타낸다. 회전하는 원판의 변형 에너지는 순수 굽힘 에너지와 원판의 평면 상에 존재하는 원심력에 의한 굽힘 에너지로 구성된다. 그러면 원판의 변형 에너지 식은 다음과 같이 유도된다<sup>(7)</sup>.

$$U_D = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{D}{2} \left[ (\nabla^2 u_D)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 u_D}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_D}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_D}{\partial \theta^2} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_D}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_D}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \right] r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{h_D}{2} \left\{ \sigma_r \left( \frac{\partial u_D}{\partial r} \right)^2 + \sigma_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_D}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta, \quad (3)$$

여기서  $R_1$  및  $R_2$ 는 각각 내경 및 외경,  $u_D$ 는 탄성 변형,  $\sigma_r$  및  $\sigma_\theta$ 는 각각 반경 방향 및 원주 방향 응력이고,  $\Omega$ 는 축의 일정 회전 각속도,  $\nu$ 는 푸아송비,  $\nabla^2$ 는 라플라시안(Laplacian),  $D$ 는 굽힘 강성(flexural rigidity), 그리고  $E_D$ 는 종탄성계수(Young's modulus)를 나타낸다. 마찬가지로 축의 변형 에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다<sup>(7)</sup>.

$$U_S = \frac{E_S}{2} \int_0^S I_{Sy} \left\{ \left( \frac{\partial v_S}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_S}{\partial s} \right)^2 \right\} ds, \quad (4)$$

여기서 여기서  $E_S$ 는 축의 종탄성계수,  $S$ 는 축의 길이,  $I_{Sy}$ 는 축의 단면 관성 모멘트, 그리고  $v_S$  및  $w_S$ 는 두 개의 수직 평면 상에서의 탄성 변형을 나타낸다. 익의 변형 에너지는 두 가지 형태의 변형 에너지로 구성되어 있다. 첫 번째의 것은 두 수직 평면 상의 탄성 휨 변형과 관계있는 변형 에너지이고, 두 번째의 것은 원심력에 의한 변형 에너지이다. 그러면 익의 변형 에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다<sup>(1,2)</sup>.

$$U_B = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E_B \hat{\mathbf{i}}_{By} \left( \frac{\partial^2 u_{Bi}}{\partial l^2} \right)^2 + E_B \hat{\mathbf{i}}_{Bx} \left( \frac{\partial^2 v_{Bi}}{\partial l^2} \right)^2 + 2E_B \hat{\mathbf{i}}_{Bxy} \left( \frac{\partial^2 u_{Bi}}{\partial l^2} \right) \left( \frac{\partial^2 v_{Bi}}{\partial l^2} \right) \right\} dl + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_0^L F_i \left\{ \left( \frac{\partial u_{Bi}}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_{Bi}}{\partial l} \right)^2 \right\} dl \quad (5)$$

여기서  $N$ 은 익의 개수,  $L$ 은 익의 길이,  $E_B$ 는 종탄성계수,  $\hat{\mathbf{i}}_{Bx}$  및  $\hat{\mathbf{i}}_{By}$ 는 이차단면관성모멘트(second area moments of inertia),  $\hat{\mathbf{i}}_{Bxy}$ 은 단면관성적(arca product of inertia),  $u_{Bi}$  및  $v_{Bi}$ 는 두 수직 평면 상의 탄성 국소 변형, 그리고  $F_i$ 은 익의 기저에서  $l$ 만큼 떨어진 곳에서의 익에 작용하는 평면력을 나타낸다. 모든 부분구조들의 탄성 변형은 허용함수(admissible function)들의 가중에 의한 중첩으로 근사화 할 수 있다. 이 때, 비연성 및 비회전을 가정한 해석에서 구한

각 부분구조의 모드 형상을 허용함수로 사용할 수 있다. 이러한 개념, 그리고 익 붙임 원판의 한 개의 절직경 모드만이 축의 굽힘 진동 모드와 연성을 일으킨다<sup>(8)</sup>는 사실로부터, 익 붙임 원판의 한 개의 절직경 모드와 관계된 연성 운동은 일반화된 좌표계로 나타낼 수 있다<sup>(7)</sup>. 그러면 축-익 붙임 원판 계의 운동방정식은 라그랑지 식(Lagrange equation)을 적용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_r} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_r} = 0$$

(6)

여기서  $\mathbf{q}_r$  및  $\mathcal{L}(=T-U)$ 는 각각 일반화된 독립좌표계로 구성된 벡터 및 계의 라그랑지안(system Lagrangian)을 나타낸다. 그러면 앞의 에너지 식 (2)에서 (5)를 라그랑지 식 (6)에 대입하면 8개의 운동 방정식을 얻을 수 있다. 서로 직각 방향에서 정의된 두 개의 일반화 좌표를 일반화 복소수 좌표의 실수 및 허수 부분으로 취하면, 복잡한 연성 운동 방정식을 다음과 같이 간단한 행렬 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{Bmatrix}$$

(7)

여기서  $\mathbf{M}$ 은 질량 행렬,  $\mathbf{C}$ 는 감쇠 및 자이로 행렬,  $\mathbf{K}$ 는 강성 행렬,  $\mathbf{Z}$ 는 모드 변형 벡터를 나타낸다. 식 (7)과 관련된 계의 고유치는 여러 가지 방법으로 구할 수 있다<sup>(9)</sup>.

### 3. 수치 해석의 예

탄성 익 붙임 원판이 탄성 회전체의 진동특성에 미치는 영향을 검토하기 위해 익 붙임 원판 구조물로 구성되어 있는 두 개의 간단한 회전체 모델을 선정하였다. 특히, 첫번째 모델(두번째 모델)은, 익 붙임 원판이 축의 중간에(한쪽 끝에) 놓여져 있는데, 이는 익 붙임 원판의 한 개의 절직경 모드를 갖는 탄성 운동과 익 붙임 원판의 병진 운동(원주형 운동)과의 동역학적 연성을 조사하기 위해 도입했다.

수치 해석에서는 계를 구성하는 각 요소의 국소 변형을 표현하기 위해 총 30개의 서로 다른 허용 함수(축의 운동 : 10개, 원판의 운동 : 10개, 익의 운동 : 10개)를 사용하였다. 허용 함수로서, 축의 경우에는 양단 힌지(hinge)의 경계 조건을 가진 비회전 균일 보의 모드 형상을 이용하였고, 원판의 경우에는 내경 고정-외경 자유의 경계 조건을 가진 비회전 균일 원판의 반경 방향의 모드 형상을 이용하였다. 또한 익의 경우에

는 익근(翼根) 고정-익선단(翼先端) 자유의 경계 조건을 가진 비회전 균일 보의 모드 형상을 이용하였다.

#### 3.1. 수치 해석의 예

각 수치해석 모델은 Fig. 1에 보인 바와 같이  $N$ 개의 익이 달린 원판과 양단이 단순 지지된 회전 축으로 구성되어 있다. Fig. 1에 따른 치수는 다음과 같다: 첫번째 모델의 경우,  $l_1 = l_2 = l_4 = l_5 = l_7 = l_8 = d_1 = d_3 = d_4 = 0$ ,  $l_3 = l_6 = 250\text{mm}$ ,  $l_i = 500\text{mm}$ ,  $d_2 = 10\text{mm}$ ,  $d_5 = 60\text{mm}$ ,  $d_6 = 400\text{mm}$ ,  $t_1 = 20\text{mm}$ ,  $t_2 = 2\text{mm}$ ,  $W = 20\text{mm}$  그리고  $N = 8$ ; 두번째 모델의 경우,  $l_3 = 0$  및  $l_6 = 500\text{mm}$ 을 제외하고는 첫번째 모델과 같다. 각 모델의 재료상수는,  $E_S = E_D = E_B = 2.10 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ ,  $\nu = 0.28$ ,  $\rho_S = \rho_D = \rho_B = 7850 \text{N} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4$ 로 선택하였다.

#### 3.2. 결과 및 토론

첫번째 모델의 경우, 익 붙임 원판은 주로 병진 운동을 그리고 축은 기초 모드(fundamental mode)로 운동하고 있음을 알 수 있다. Fig. 2는 여러 가지 엇각( $\phi$ )에 대해 회전 좌표계에서 구한 첫번째(1F, 1B) 그리고 두번째(2F, 2B) 고유진동수를, Fig. 3 및 4는  $\phi = 0^\circ$  및  $90^\circ$ 에 대한 해당 전진파(forward) 모드 형태를 나타낸다. 일반적으로 전진파 및 후진파(backward) 모드 형태에는, 크지는 않더라도, 차이가 분명 존재하나 본 예제에서는 그 차이가 구분되지 않을 정도로 작다. 여기서  $\phi = 0^\circ$ 일 때에는 Fig. 3에 보인 바와 같이 첫번째 고유진동수는 우세한 축 모드와 관계있고 두번째 고유진동수는 우세한 익 붙임 원판 모드임에 유의할 필요가 있다. 이러한 모드는 축 또는 익 붙임 원판의 단독 해석으로부터도 정확히 예측됨을 알 수 있다. 그러나  $\phi$ 가  $0^\circ$ 부터  $90^\circ$ 로 증가함에 따라 Fig. 4에 보인 바와 같이 축과 익 붙임 원판 모드는 서로 크게 연성되기 시작한다. 이 연성 현상은 축에 작용하는 힘의 존재로 설명이 가능한데, 이 힘은 익 붙임 원판의 한 개의 절직경 모드에 의해 발생된다. 그 메커니즘을 Fig. 5(a) 및 (b)에 자세히 나타내었다. 여기서 코리올리력<sup>(7)</sup> 및 관성력은 회전축에 직각 방향의 익의 운동에 의해 유도된다. 이 힘은 익 붙임 원판이 놓여져 있는 곳에서 작용하여 축의 병진운동을 자극한다. 결과적으로 이 힘은 익 붙임 원판의 한 개의 절직경 모드와 축의 모드 사이에 상호작용을 일으켜서 결과적으로 계의 고유진동수를 변화시킨다. 여기서  $k(k \neq 1)$ 개 절직경 모드에서는 이 힘은 서로 상쇄됨에 유의할 필요가 있다. 축과 익 붙임 원판 모드의 연성을 일으키는, 이 힘은  $\phi = 90^\circ$ 일 때 최대 값을 갖고  $\phi = 0^\circ$ 일 때 최소값을 갖게 된다. 그러므로  $\phi = 0^\circ$ 일 때 축과 익 붙임 원판 운동 간의 연성은 무시해도 된다. 첫번째 모드는 강성 익 붙임 원판의 자이로 운동과 유사하며; 그리고 두번째 모드는 익 붙임 원판의 국소 운동이며 전진파 및 후진파의 고유진동수의 크기가 Fig. 2에 보인 바와 같이 같

게 된다. Fig. 6은 첫번째 모델의 여러 가지 엇각( $\alpha_L$ )에 대한 고유진동수를 나타내는데 이는 회전 좌표계에서 계산한 것이다. 여기서 회전속도가 증가함에 따라 고유진동수에 대한 엇각의 영향은 비틀림각과 유사함을 알 수 있다. 그러나 비틀림 각이 엇각의 경우보다 계의 동특성에 미치는 영향이 작음을 알 수 있다.

두번째 모델의 경우 축의 운동은 주로 기초 모드로 운동하고 익 붙임 원판은 주로 원추형 운동을 하고 있음을 알 수 있다. Fig. 7에 회전 좌표계에 대해 계산한 첫번째 그리고 두번째 고유진동수를 나타내었고 Fig. 8 및 9에  $\phi=0^\circ$  및  $90^\circ$ 에 대한 해당 전진파 모드 형태를 보았다. 여기서, Fig. 8에 보인 바와 같이,  $\phi=90^\circ$ 일 때는 첫번째 고유진동수는 우세한 축 모드와 관계 있고 두번째 고유진동수는 우세한 익 붙임 원판 모드와 관계 있음을 알 수 있다. 앞서와 마찬가지로 이 모드는 각각의 축 또는 익 붙임 원판 해석으로도 쉽게 예측할 수 있다. 그러나  $\phi$ 가  $90^\circ$ 에서  $0^\circ$ 로 감소하면, 축 및 익 붙임 원판의 모드는 Fig. 9에 보인 바와 같이 크게 연성되게 된다. 이 현상은 Fig. 5(c)에 보인 바와 같이 익 붙임 원판의 한 개의 절직경 모드에 의해 발생된 관성 토크가 축에 작용하기 때문에 생기는 것으로 설명할 수 있다. 축 방향으로 익 붙임 원판이 운동하면 관성 토크가 발생하며, 이것이 익 붙임 원판의 원추형 운동을 일으킨다. 이 토크는  $\phi=0^\circ$ 일 때 최대가 되고  $\phi=90^\circ$ 일 때 최소가 된다. 그러므로  $\phi=90^\circ$ 일 때 축과 익 붙임 원판 운동 간의 연성은 무시할 정도로 작게 된다. 첫번째 모드는 강성 익 붙임 원판의 자이로 운동과 유사하고; 그리고 두번째 모드는 익 붙임 원판의 국소 모드이기 때문에 Fig. 8에 보인 바와 같이 전진 및 후진파의 고유진동수의 크기는 같게 된다.

지금까지의 결과를 종합해 보면 다음과 같다: 축에 수직인 평면에서의 탄성 익의 평면상의 진동은 코리올리력 및 관성력을 생기게 하고, 이 힘은 축의 병진 진동을 일으킨다; 반면에 탄성 익의 축 방향의 진동은 관성 토크를 생기게 하고, 이 토크는 익 붙임 원판의 원추형 진동을 일으킨다. 그러므로, 원판의 위치 및 관찰 대상 모드에 따라서 탄성 축과 익 붙임 원판의 동역학적 연성은 크게 달라지게 된다. 예를 들면, 원판이 모드의 절(node)에 위치하면, 해당 고유진동수는 주로 관성 토크의 영향을 받고, 이로 인해 축 및 익 붙임 원판 간의 강력한 상호 작용을 일으킨다. 또한 원판이 모드의 배(anti-node)에 위치하면, 해당 고유진동수는 주로 관성력 및 코리올리력의 영향을 받고, 이로 인해 축 및 익 붙임 원판 간의 강력한 상호 작용을 일으킨다.

#### 4. 결론

가정 모드법 및 부분구조합성법을 이용하여 익 붙임 원판 및 축으로 구성된 탄성 회전체의 운동을 지배하는 선형 2차 편미분 방정식을 유도하였다. 이 방정

식으로 두 개의 저차 고유진동수를 구하였고 축의 회전, 그리고 엇각 및 비틀림각의 효과를 검토하였다. 수치해석의 결과로부터 다음 결론을 유추할 수 있다.

(1) 익 붙임 원판의 한 개의 절직경 모드는 축 및 익 붙임 원판 간에 코리올리력, 관성력 및 관성 토크를 일으킨다. 유도된 힘 및 토크의 크기는 엇각 및 비틀림각에 의해 결정되며, 축 및 익 붙임 원판의 운동을 연성시킨다. 또한 엇각이 비틀림각보다 계의 동특성에 큰 영향을 일으킨다.

(2) 익의 축에 직각으로 운동하는 익의 한 개의 절직경 모드는 코리올리 및 관성력을 생기게 하며, 익 붙임 원판의 병진운동을 일으킨다. 이 힘, 즉 연성 효과는  $\phi=90^\circ$ 일 때 최대가 되고  $\phi=0^\circ$ 일 때 최소가 된다.

(3) 익 붙임 원판의 한 개의 절직경 모드의 축 방향의 운동은 관성 토크를 생기게 하고 이 토크는 익 붙임 원판의 원추형 운동을 일으킨다. 이 토크, 즉 연성 효과는  $\phi=0^\circ$ 일 때 최대가 되고  $\phi=90^\circ$ 일 때 최소가 된다.

#### REFERENCES

1. Sakata, M., Kimura, K., and Park, S.K., Vibration of Bladed Flexible Rotor Due to Gyroscopic Moment, *Journal of Sound and Vibration* **131(3)** (1989) 417-430.
2. Okamoto, S., Sakata, M, Kimura, K. and Ohnabe, H., Finite Element Vibration Analysis of a Flexible Rotor Subjected to Base Excitation, *JSME* **58(548)** (1992) 1004-1011.
3. Khader, N. and Loewy, R.G., Shaft Flexibility Effects on the Forced Response of a Bladed-Disk Assembly, *Journal of Sound and Vibration* **139(3)** (1990) 469-485.
4. Zhang, w. et al., Analytical and Experimental Investigation of Bladed-Disk/Shaft Coupled System, *Proceedings of the Fourth International Conference on Rotor Dynamics* (1994) 63-68.
5. Hale, A.L. and Meirovitch, L., A General Substructure Synthesis Method for the Dynamic Simulation of Complex Structures, *Journal of Sound and Vibration* **69(2)** (1980) 309-326.
6. Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Company Collier-Macmillan Limited, London (1967) 233-235.
7. Chun, S.B. and Lee, C.W., Vibration Analysis of Shaft-Bladed Disk System Using Substructure Synthesis and Assumed Modes Method, *Journal of Sound and Vibration*, to be published (1996).
8. Hagawara, N., Ono, Y., and Iizima, H., Forward and Backward Whirling Natural Frequencies of Blade Group, *JSME* **51(463)** (1985) 555-564.
9. Lee, C.W., *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publishers (1993) 156-159.

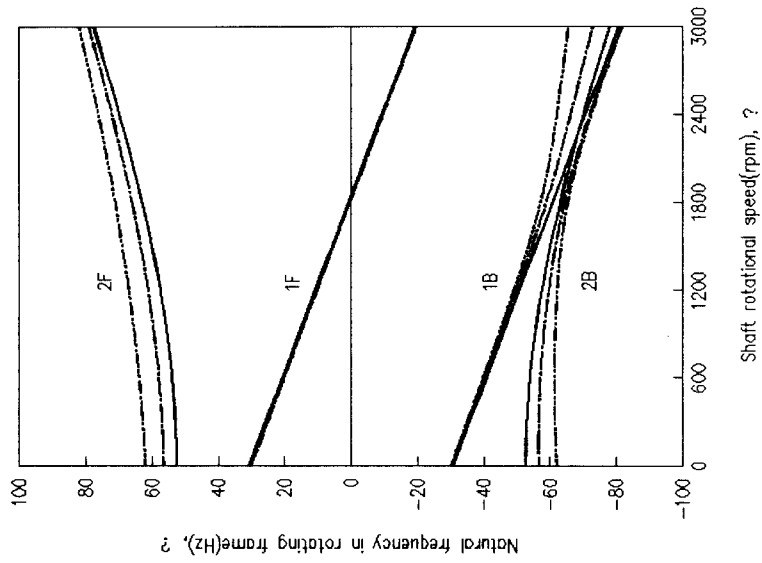


Figure 2. Natural frequencies of model #1 with flexible bladed disk for stagger angles: —,  $\phi=0^\circ$ ; - - -,  $\phi=45^\circ$ ; — — —,  $\phi=90^\circ$ .

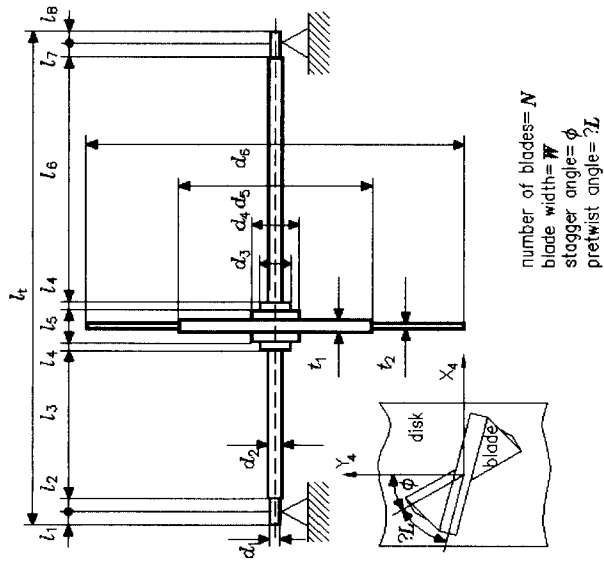


Figure 1. Analysis model.

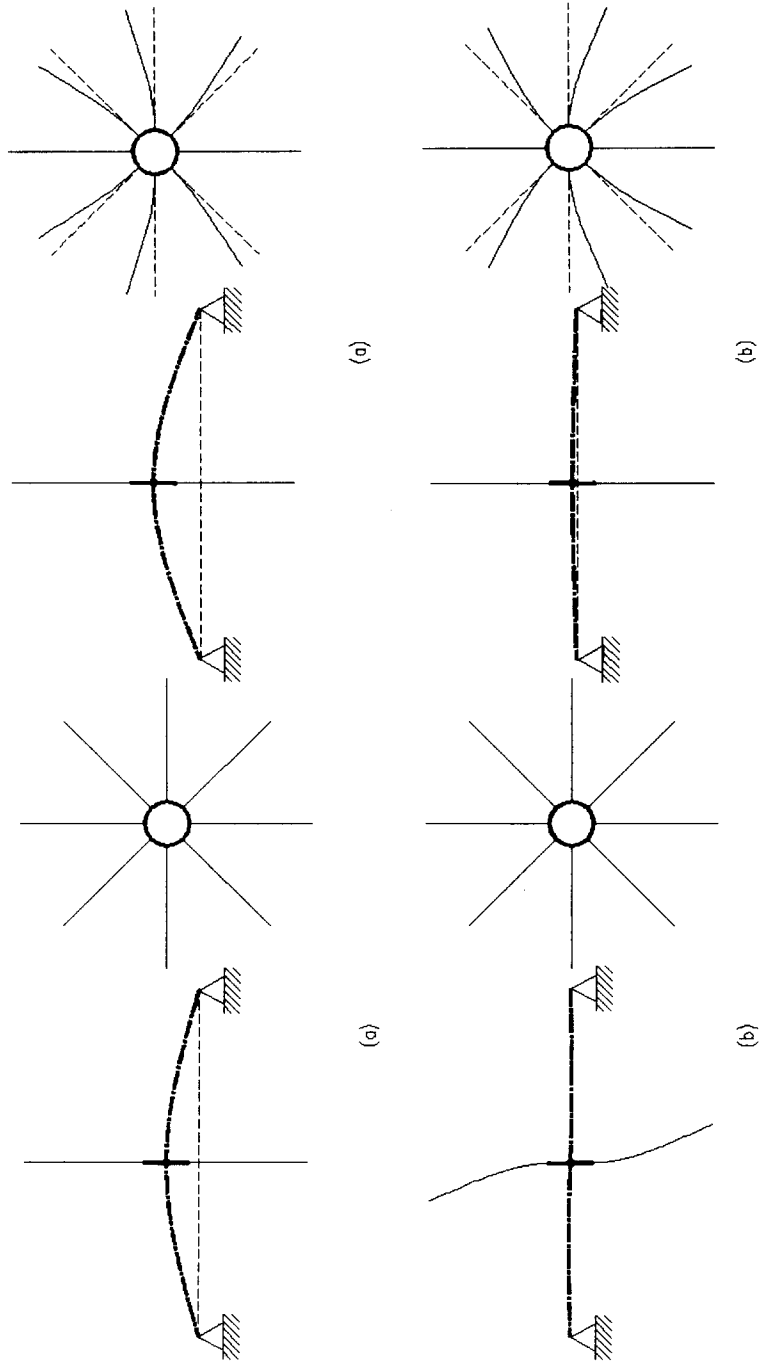


Figure 3. (a) First and (b) second mode shapes of model #1:  
 $\phi = 90^\circ$ ,  $\psi = 0$ .

Figure 4. (a) First and (b) second mode shapes of model #1:  
 $\phi = 0$ ,  $\psi = 90^\circ$ .

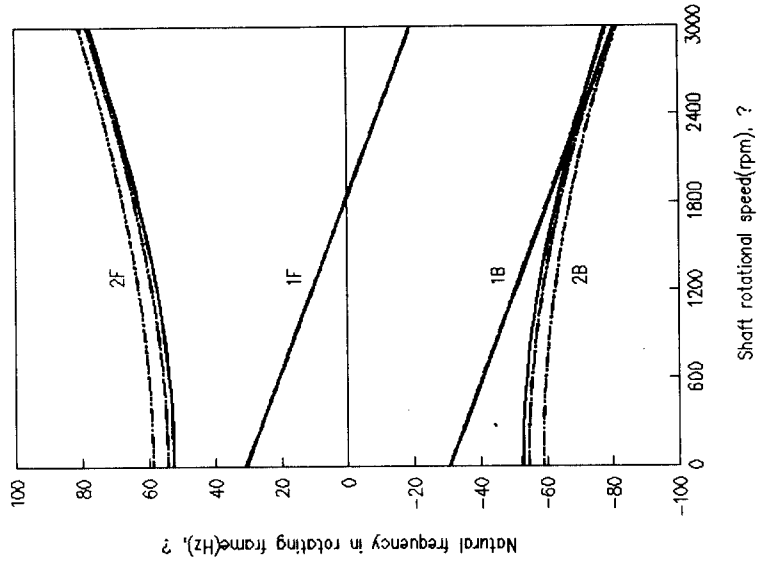


Figure 6. Natural frequencies of model #1 with flexible bladed disk for pretwist angles of: —,  $\beta_L=0^\circ$ ; - - -,  $\beta_L=90^\circ$ ; ····,  $\beta_L=180^\circ$ .

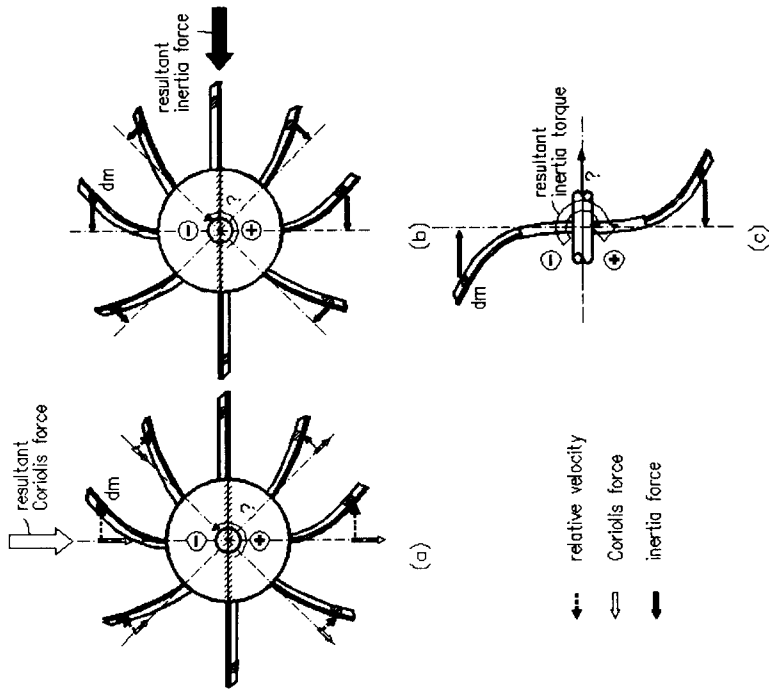


Figure 5. Mechanism for induced excitations. (a) Coriolis force, (b) inertia force, (c) inertia torque.

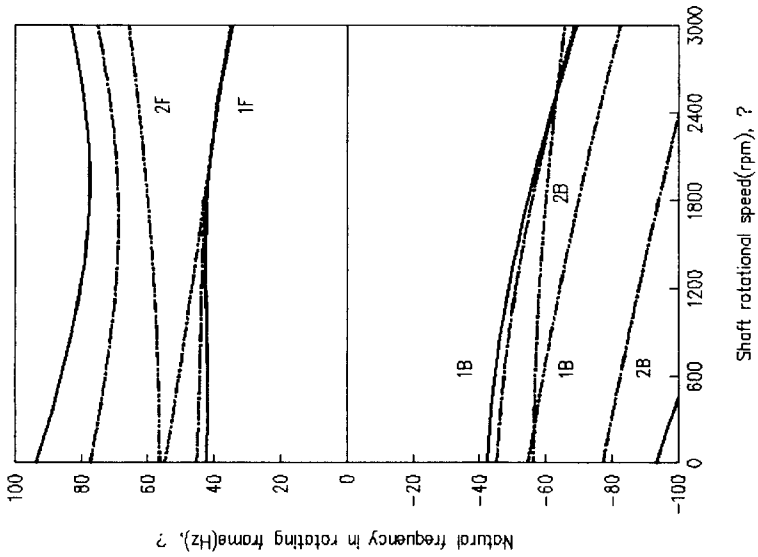


Figure 7. Natural frequencies of model #2 with flexible bladed disk for stagger angles: —,  $\phi=0^\circ$ ; - - ,  $\phi=45^\circ$ ; - · - · ,  $\phi=90^\circ$ .

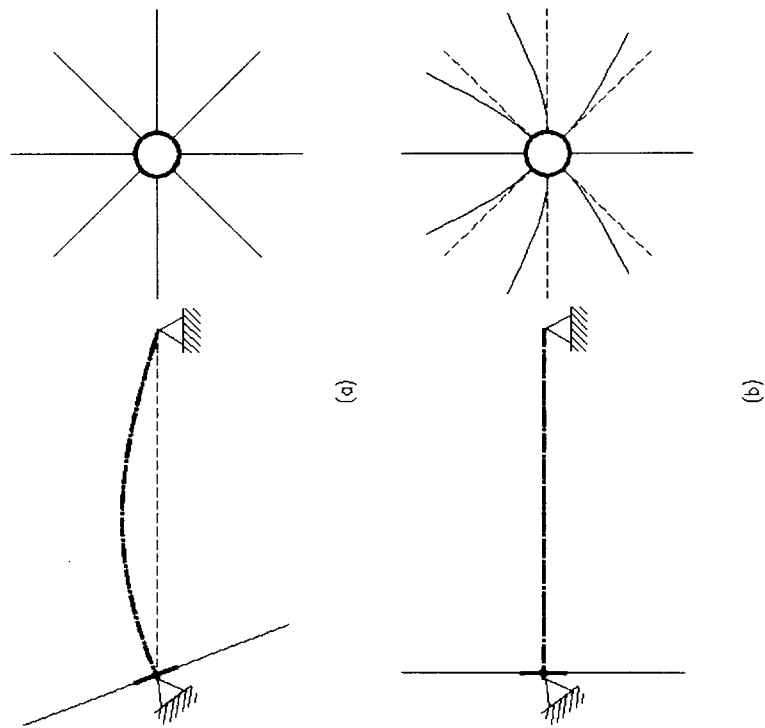


Figure 8. (a) First and (b) second mode shapes of model #2:  $\gamma=2, L=0, \phi=90^\circ$ .



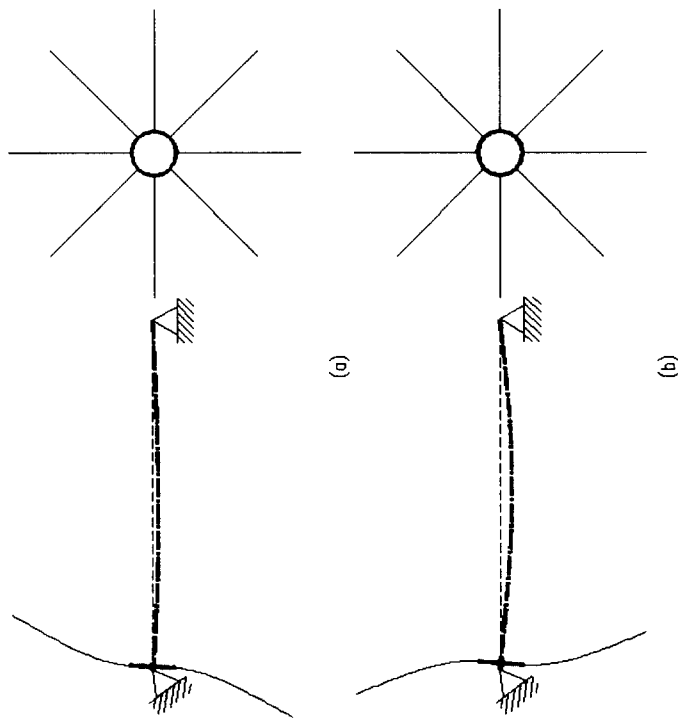


Figure 9. (a) First and (b) second mode shapes of model #2.  
 $\gamma = \phi = \tau \mathbf{L} = 0.$