

Resonance tube 내 압력 맥동 해석

곽 승 철, 류 호 선*

Numerical analysis on the pressure pulsation in the resonance tube

Seung-Chul Kwak, Ho-Seon Rew*

ABSTRACT

2 차원 압축성 오일러 방정식을 지배 방정식으로 하여 음향학적 문제를 직접 수치 계산하였다. Roe 의 개략적인 리만해(Approximate Riemann Solver)에 의거하여 대류항을 구성하였고 높은 정확도를 유지하기 위해 Vanleer 의 MUSCL 방법을 사용하여 공간을 이산화 하였다. 시간 적분으로는 2 차의 Runge-Kutta 방법을 사용하였다. Resonance tube 내의 음향학적 문제 해석을 위해 최근까지 제시된 음향 경계 조건들을 비교하였고 각 경계 조건들이 갖는 물리적 의미를 고찰하였다. 이들을 통하여 압력파의 물리적인 행태를 모사하였고 실험과 비교하였다. 계산 결과들을 통하여 사용된 방법은 전형적인 압축성 유동 해석 문제뿐만 아니라 선형, 비선형의 음향학적 문제들을 적절한 경계 조건과 결합하여 해석 할 수 있음을 알 수 있었고 resonance tube 와 같은 공학적으로 실제적인 문제들에 대한 응용이 기대된다

1. 서론

전산 유체역학의 급격한 발달은 이제 음파까지 직접 다룰 수 있을 정도가 되었다. 아직 공학적인 응용에는 많은 난제가 있으나 기존의 고전 음향학과 비교해 볼때 그 가치는 충분하며 많은 부분이 연구 과제로 남아 있다. 음파를 직접 수치 계산해내려면 음파의 특성상 시간,공간상의 정확도가 중요하며 또한 기존의 전산 유체역학의 경계 조건들 보다 까다로운 경계 조건들을 요구 하는데 이는 이러한 요인들에 의해 유동장은 별 영향이 없을지 몰라도 음향장은 완전히 틀리게 계산 될 수 있기 때문이다. 본 연구는 공명관(resonance tube)이라는 공학적으로 실제적인 문제를 염두에 두고 수치 기법 및 경계 조건들을 검토 비교하였으며 음향 경계 조건들의 물리적 의미에 대하여 고찰 하였다. 이들을 바탕으로 하여 공진 주파수로 작동되는 공명관 내의 압력 맥동 현상을 수

치 계산 하였고 실험[1]과 비교한 결과 정량적,정성적 일치를 이루었다.

2. 지배 방정식

지배 방정식으로는 점성을 제외한 2 차원 축 대칭 압축성 오일러 방정식이며 아래와 같다[2].

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \alpha H = 0 \quad (1)$$

$$Q = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T$$

$$E = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(e+p)]^T$$

$$F = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(e+p)]^T$$

$$H = \frac{1}{y} [\rho v, \rho uv, \rho v^2, v(e+p)]^T$$

$$\rho = (\gamma - 1) [e - \rho(u^2 + v^2)/2]$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & : 2차원 비 축대칭 \\ 1 & : 2차원 축대칭 \end{cases}$$

* LG 전자 리빙시스템 연구소 유체유동팀

위의 식(1)을 (2)의 관계에 따라 계산 영역으로 변환 시키면 지배 방정식은 아래와 같이 변한다.

$$\begin{aligned} \tau &= t \\ \xi &= \xi(t, x, y) \\ \eta &= \eta(t, x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \alpha \hat{H} &= 0 \\ \hat{Q} &= Q/J \\ \hat{E} &= [\xi, Q + \xi, E + \xi, F] / J \\ \hat{F} &= [\eta, Q + \eta, E + \eta, F] / J \\ \hat{H} &= H / J \end{aligned} \quad (3)$$

3. 지배 방정식의 이산화

식 (3)에 외재적인 2 단계의 Runge-Kutta 시간 적분법을 적용하면

$$\begin{aligned} Q^{n+1/2} &= Q^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot RHS^n \\ Q^{n+1} &= Q^n - \Delta t \cdot RHS^{n+1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

위의 시간 적분법은 2 차의 정확도를 갖게 된다. 대류항은 비선형을 내포하고 있어 해의 정확성과 수렴 안정성에 영향이 매우 크므로 정확한 수치적 유량을 구하는 것은 중요 관심사가 된다. 여기서는 Roe[3]가 제안한 개략적인 Riemann 해에 기초하여 수치 유량을 구했다.

$$\hat{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\hat{E}(Q_L) + \hat{E}(Q_R) + \hat{R}_{i+1/2} \hat{\phi}_{i+1/2} / J_{i+1/2}] \quad (5)$$

위의 방법으로 구하는 대류항은 1 차의 정확도 이므로 고차의 정확도를 구현할 수 있는 Vanleer의 MUSCL 방법[4]을 도입하였다. 또한 충격파와 같은 불연속 면에서 수치 진동을 제어 하기 위하여 Koren의 미분가능 제한자[5](differentiable limiter)를 사용하여 TVD 성질을 보장하였다. 그 식들은 아래와 같다.

MUSCL :

$$\begin{aligned} Q_{i+1/2}^t &= \left\{ 1 + \frac{\psi_i}{4} [(1-\kappa)\nabla + (1+\kappa)\Delta] \right\} Q_i \\ Q_{i+1/2}^n &= \left\{ 1 - \frac{\psi_{i+1}}{4} [(1+\kappa)\nabla + (1-\kappa)\Delta] \right\} Q_{i+1} \end{aligned} \quad (6)$$

제한자(Limiter) :

$$\psi_i = \frac{3\nabla Q_i \Delta Q_i + \varepsilon}{2(\Delta Q_i - \nabla Q_i)^2 + 3\nabla Q_i \Delta Q_i + \varepsilon} \quad (7)$$

참고로 식(6)에서 $k=-1$ 이면 2 차 정확도, $k=1/3$ 이면 3 차 정확도를 갖고 제한자의 ε 값은 0 으로 나누어 지는 것을 방지하기 위한 것으로 통상 아주 작은 값(10^{-6})을 준다.

4. 경계조건

흔히 일반적으로 전산 유체역학에서 사용하는 경계 조건들은 음향장 계산에는 치명적일 수 있기 때문에 주의를 요한다. 본 연구에서 사용된 경계 조건들은 크게 두 부류로 나뉘는데 첫째는 전형적인 유동 해석에 사용되는 경계 조건들이고 다른 하나는 특성치(characteristic value)에 따른 경계 조건들이다. 첫번째에 해당하는 것으로는 비점착 벽면 경계조건, 축 대칭 경계 조건, 0 차의 외삽법이 사용되었고 두번째, 즉 특성치에 기초하여 음향장 계산에 사용된 경계 조건들은 Thompson[6]의 비반사 경계조건(이하 NRBC), 압력을 가진 원으로 한 Watson-Myers[7]의 음원 조건(이하 WMP), Hwang[8]의 투명음원조건(이하 TAS), 속도를 가진 원으로 하는 Watson-Myers 음원 조건(이하 WMU), 벽면에서 와 같이 압력파를 모두 반사시키는 특성을 지닌 전반사 경계조건(이하 FRBC)들이 사용되었다. 이중 여기서는 기존에 잘 알려진 첫번째는 생략하고 두 번째에 대해서만 설명한다.

4-1. NRBC (Non-Reflective Boundary Condition)

2 차원의 식(3)으로부터 1 차원의 특성방정식은 아래로 유도 된다.

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \tau} + \hat{\Lambda} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \xi} = 0 \quad (8)$$

여기서

$$\delta\hat{Q} = \hat{P}\delta\hat{W}$$

\hat{Q} : Conservative Variable

\hat{W} : Characteristic Variable

이고 특성 변수의 변화량은 아래로 정의된다.

$$\delta\hat{W} = \begin{bmatrix} \delta p - \delta p/c^2 \\ \delta q_i \\ \delta p + \rho c \delta q_n \\ \delta p - \rho c \delta q_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

식(8)의 고유값은 아래와 같다.

$$\hat{\Lambda} = \text{Diag}(U, U, U + c\nabla\xi, U - c\nabla\xi) \\ U = \xi, +\xi, u + \xi, v \quad (10)$$

여기서 Thompson[6]의 비반사 경계 조건은 식(11)과 같고 간략히 표현하자면 영역 내부로 들어오는 특성치는 없고(Sommerfeld radiation condition) 나가는 특성치는 고유값에 의한 전파 속도로 반사 없이 영역 밖으로 빠져나간다는 수학적 표현이다.

$$\frac{\partial\hat{W}}{\partial\tau} + \hat{\Lambda}_m \frac{\partial\hat{W}}{\partial\xi} = 0 \\ \frac{\partial\hat{W}}{\partial\tau} + \hat{\Lambda}_{out} \frac{\partial\hat{W}}{\partial\xi} = 0 \quad (11) \\ \hat{\Lambda}_m = 0$$

4-2. FRBC (Full-Reflective Boundary Condition)

이 경계 조건은 무한대의 임피던스를 지닌 고체의 벽면과 같이 압력파가 전반사 되기 위한 조건으로 4-1의 경계 조건과는 달리 영역 밖으로 나가려는 특성치가 빠져나가지 않고 위상파 크기는 동일한 상태로 다시 반사 되어 들어오는 조건이며 벽에서 수직한 방향으로의 속도 성분은 없다는 조건과 등엔트로피(isentropic), 무와도(zero vorticity)의 조건으로 부터 입구 경계에 대해서만 써보면 아래와 같이 유도된다.

$$\frac{\partial p}{\partial\tau} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial\tau} \\ \frac{\partial q_i}{\partial\tau} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial\tau} = -\lambda_4 \left(\frac{\partial p}{\partial\xi} - \rho c \frac{\partial q_n}{\partial\xi} \right) \\ \frac{\partial q_n}{\partial\tau} = 0 \quad (12)$$

4-3. WMP (Watson-Myers's acoustic source based on Pressure)

WMP 조건은 Watson-Myers[7]가 특성 방정식에 의거해 만든 음원 조건으로 임의의 크기의 음압이 가진되었을 경우 만족해야 하는 관계식이며 등엔트로피, 무와도의 조건으로 유도된다. 입구에 대해 써보면

$$\frac{\partial p}{\partial\tau} = \varepsilon\omega \cos(\omega\tau) \\ \frac{\partial p}{\partial\tau} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial\tau} \quad (13)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial\tau} = \left[\frac{\partial_i p}{\partial\tau} + \lambda_4 \left(\frac{\partial p}{\partial\xi} - \rho c \frac{\partial q_n}{\partial\xi} \right) \right] / \rho c$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial\tau} = 0$$

이다.

4-4. TAS(Transparent acoustic source)

비반사 특성을 갖는 음원 조건으로 Hwang[8]은 이를 단순 팽창형 머플러에 적용하여 전달손실(TL)을 구하는데 효과적으로 사용하였다. 이역시 특성 방정식에서 등엔트로피, 평면파 관계로 부터 유도된다.

$$\frac{\partial p}{\partial\tau} = \varepsilon\omega \cos(\omega\tau) \\ \frac{\partial p}{\partial\tau} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial\tau} \\ \frac{\partial q_n}{\partial\tau} = \pm \frac{1}{\rho c} \frac{\partial_i p}{\partial\tau} \quad (+: \text{right}, -: \text{left going}) \\ \frac{\partial q_i}{\partial\tau} = 0 \quad (14)$$

4-5. WMU (Watson-Myers's acoustic source based on velocity)

WM-U 조건은 Watson-Myers[7]의 논문에서 압력을 가진원으로 하였던 경우와는 다소 달리 압력이 아닌 경계에 수직한 방향으로

의 속도를 가진원으로 할때 특성 방정식이 만족해야 하는 관계식이며 등엔트로피, 무와도의 조건으로 유도된다. 그러므로 이조건은 WMP 와는 다른 반사 특성을 보이게 된다. 입구에 대해 써보면

$$u' = \varepsilon \sin(\omega\tau)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \rho c u' - \lambda_4 \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} - \rho c \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial \tau} = \left[\frac{\partial_t p}{\partial \tau} + \lambda_4 \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} - \rho c \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right) \right] / \rho c = u'$$

$$\frac{\partial q_t}{\partial \tau} = 0$$

이다.

5. 계산 결과 및 토론

5-1. NRBC

Fig.6 에서 입구는 TAS 음원을 주고 출구에는 NRBC 를 주어 NRBC 의 비반사 특성을 시험 하였다. 수렴 곡선(Fig.2)은 반복 계산 회수 1200 을 기준으로 급격히 떨어지는데 이는 압력파가 NRBC 에서 반사 없이 빠져나가기 때문이며 이는 즉, 수렴성을 향상시키려면 영역내의 파(Wave)들이 잘 빠져 나가게 경계 조건을 설정해야 함을 의미한다. Fig.3 과 Fig.5 를 보면 비반사 조건이 잘 작동함을 알 수 있다. 입구 가진 조건은 아래와 같고 ω 는 무차원화 된 각속도, ε 는 진폭으로 무차원 주파수는 0.5 , 진폭은 0.001 로 하였다. 참고로 이러한 진폭은 선형 음파의 크기에 해당한다.

$$\text{if } 0 \leq \omega\tau \leq \pi \quad \partial_t p' = \varepsilon \omega \cos(\omega\tau) \quad (16)$$

$$\text{else } \partial_t p' = 0$$

5-2. FRBC

위와 마찬가지로 조건에서 NRBC 와는 성격이 정 반대인 FRBC 를 출구에 주고 계산 하였다. 위와는 반대로 수렴 곡선은 파의 반사에 의해 다른 양상을 보이고 Fig.4 와 Fig.5 는 고체 벽면에서 압력파의 전반사를

FRBC 가 모사하고 있음을 알려준다.

5-3. 음원 조건

참고문헌[8]의 조건과 같이 입구는 모두 TAS 조건으로 가진하고 출구 조건은 각각 TAS, WMP, WMU 로 달리 하여 계산하였다.(Fig.6) 계산 결과 세가지의 음원은 입사하는 파에 대해 다른 반사 특성을 가진다 (Fig.7 - 9). WMP 는 압력을 가진원으로 하기 때문에 피스톤 처럼 표면 속도가 가진원인 경우에는 비물리적인 반사파를 만들어 낸다. 이런 경우에는 WMU 조건을 사용하여야 한다. 그러나 역으로 압력이 가진원인 경우에 WMU 조건을 사용하면 역시 특성 방정식을 만족시키기 위해 비물리적인 반사파를 만들어 낼 것이라 유추할 수 있다. 따라서 물리적인 상황에 적합한 음원 선택이 필요하며 만약 음원을 향하여 오는 파가 없을 경우는 참고문헌[8]에서 언급한 바와 같이 모든 음원은 같은 결과를 준다. TAS 는 무반사의 음원 조건이므로 멀리 있어 반사가 거의 없는 음원을 모사할 때 유용하다.[8] 여기서 입출구에서 가진 조건들은 아래와 같다.

$$\text{입구 : 식(16)}$$

$$\text{출구 : } \partial_t p' = \varepsilon \omega \cos(\omega\tau) \quad (17)$$

5-4. 공명관

공명관내 피스톤은 관의 길이에 비해 진폭이 작기때문에 변형 격자 기법(deforming mesh algorithm)을 통한 모사를 피하고 이를 간략히 WMU 조건으로 대체하였다. 공명관의 막힌 벽면은 FRBC 조건을 주고 축대칭 가정을 하여 계산하였다. 피스톤과 관끝부분에서 압력 신호(Fig.10)를 보면 공진 상태이므로 위상이 180 도 차이가 나는것을 볼 수 있고 Fig.12 는 시간이 지날 수록 압력파들의 계속되는 중첩에 의해 작은 압력파들이 강한 충격파를 형성해나가는 과정을 보여 주며 Fig.10 은 이러한 반사 과정을 통하여 평균 압력이 상승함을 보여주고 있다.

참고 문헌[9]에서는 실험[1]과 비교를 위해 평균 압력만큼 보정(shift)하여 결과를 비교하였으나 여기서는 보정 없이 직접 비교하였다. 정확한 실험 데이터를 구할 수 없어 논문의 결과들을 대략적으로 비교한 결과 약간의 값의 차이는 있으나 전반적으로 진폭과 주기들을 잘 표현하고 있다.

6. 결론

2차원 압축성 오일러 방정식을 지배 방정식으로 하여 음향학적 문제를 직접 수치 계산하였다. 음향학 문제를 위해 최근까지 제시된 음향 경계 조건들을 비교하였고 각 경계 조건들이 갖는 물리적 의미를 고찰하였다. 이를 통하여 공학적으로 많은 응용이 기대되는 공명관의 적절한 조건들을 찾아내었고 직접 수치 계산하였다. 공명관 내의 압력과의 행태를 실험과 비교하여 본 접근의 유효성을 확인하였다. 계산 결과들을 통하여 공학적으로 실제적인 문제들을 기존의 선형 해석 방법이 아닌 보다 근원적으로 접근할 수 있음을 알았고 적절한 경계 조건은 이러한 방법의 많은 공학적 응용을 위해서 필수적이다.

후기

본 연구에 좋은 제언을 해주신 한국과학기술원 이덕주 교수님께 감사 드립니다.

7. 참고 문헌

- [1] Merkli, P. and Thomann, H., "Thermoacoustic Effects in a Resonance Tube", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 70, July, 1975, pp. 161-177
- [2] Hoffmann, K.A., *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, 1989
- [3] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes", *J. Computational Physics*, Vol. 43, 1981, pp. 357-372
- [4] Van Leer, B., "Flux Vector Splitting for

Euler Equations", *Lecture Notes in Physics*, Vol. 170, 1982, pp. 501-512

- [5] Koren, B., "Upwind Schemes, Multigrid and Defect Correction for the Steady Navier-Stokes Equations", *Proceedings of the 11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, edited by D.L. Dwoyer, M.Y. Hussani, and R.G. Voigt, Springer-Verlag, Berlin, 1989
- [6] Thompson, K.W., "Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems", *Journal of Computational Physics*, Vol. 68, Feb. 1987, pp. 1-28
- [7] Watson, W.R. and Myers, M.K., "Inflow-Outflow Boundary Conditions for Two-Dimensional Acoustic Waves in Channels with Flow", *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 9, 1991, pp. 1383-1389
- [8] Hwang, C.J., "Time Domain Analysis of Nonlinear Acoustic Wave Radiations and Reductions Using an Upwind Finite Difference Scheme for Euler Equations", Ph.D Thesis, KAIST, 1995
- [9] Ridder, J.P. and Beddini, R.A., "Temporal and Acoustic Accuracy of an Implicit Upwind Method for Ducted Flows", *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 11, 1991, pp. 1860-1867

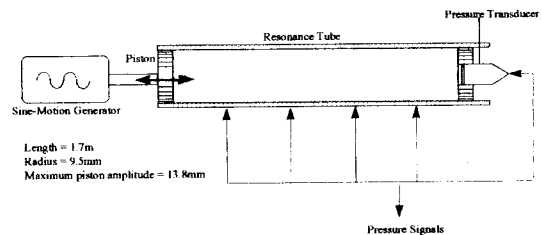


Fig. 1 Experiment by Merkli and Thomann[1]

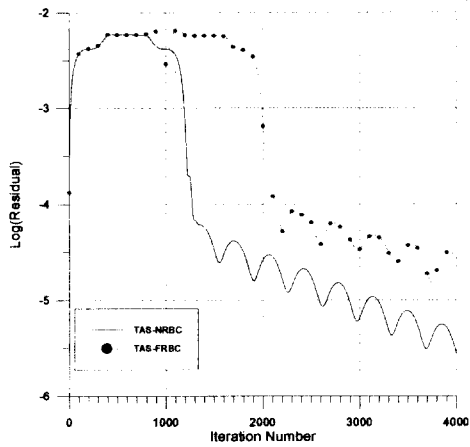


Fig. 2. Convergence Histories for TAS-NRBC and TAS-FRBC

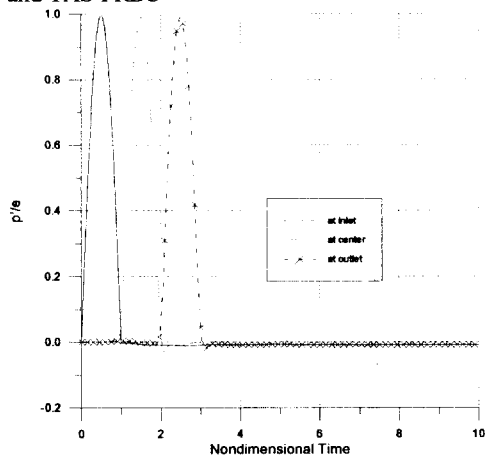


Fig. 3 Time History of Pressure for TAS-NRBC

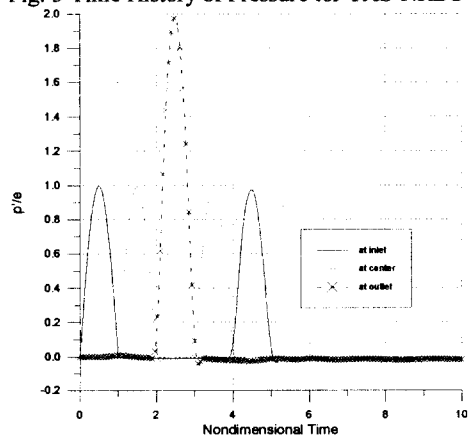


Fig. 4 Time History of Pressure for TAS-FRBC

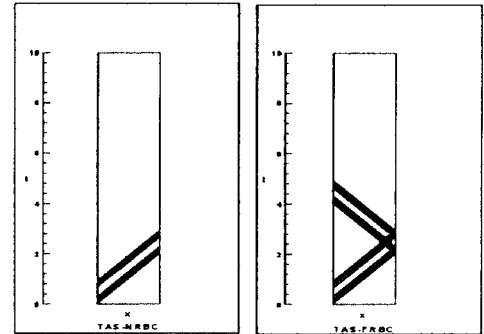


Fig.5 x-t Diagram for TAS-NRBC and TAS-FRBC

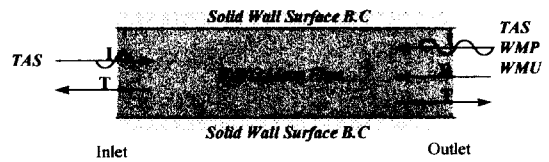


Fig.6 Schematic Diagram for the Test of Acoustic Sources

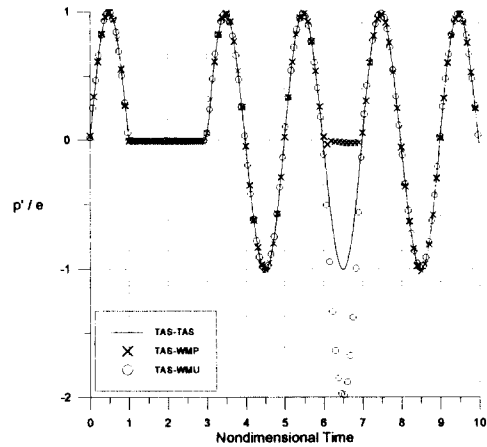


Fig.7 Time histories of acoustic pressure at inlet

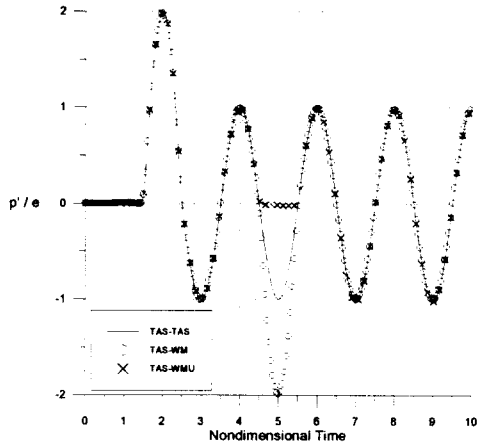


Fig.8 Time histories of acoustic pressure at center

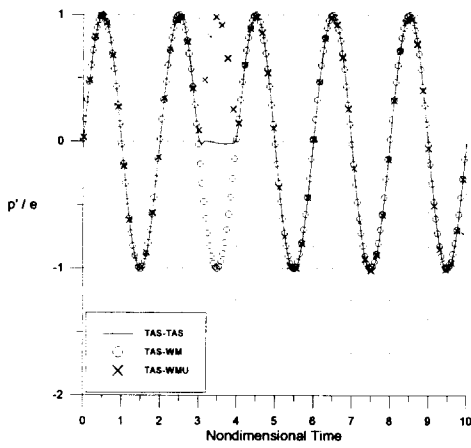


Fig.9 Time histories of acoustic pressure at outlet

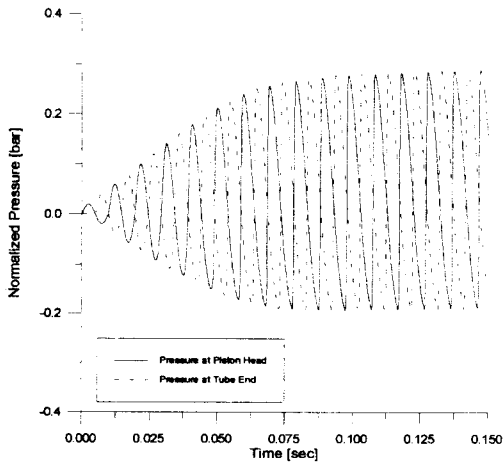


Fig.10 Pressure response at resonant frequency, $f=102\text{Hz}$. piston amplitude=13.8mm

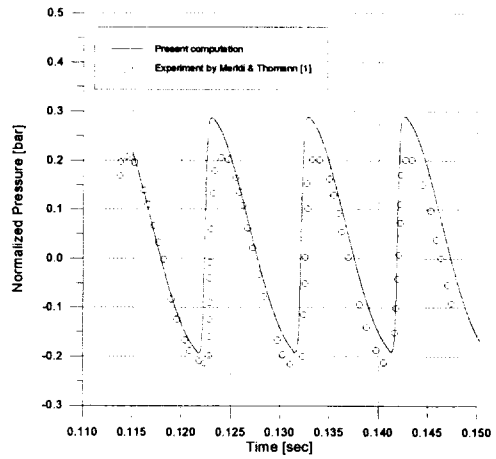


Fig.11 Comparison of Computed and Experimental Results, $f=102\text{Hz}$, piston amplitude=13.8mm

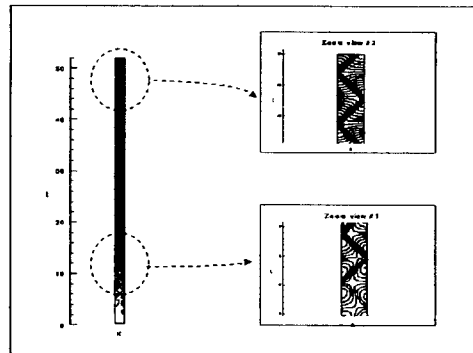


Fig.12 x-t Diagram of Resonance Tube at Resonance