

가상수동형 제어기를 이용한

독립모달공간 제어기법

황재혁*, °박홍조**, 유병성**

Design of Independent Modal Space Controller using Virtual Passive Approach

Jai-Hyuk Hang*, °Hong-joe Park**, Byung-Sung Yoo**

Abstract

In this study, a new modified independent modal space control (IMSC), which relaxes the fundamental hardware limitation of IMSC, is suggested to handle vibration control problems using a virtual passive controller. This method has adapted a new stable switching algorithm between controlled modes and a virtual vibration absorber as a virtual passive controller in the independent modal space. It has been found that the new modified IMSC suggested in this paper, which can reduce the number of actuators, is shown to be simple and efficient in a realistic example of vibration control of a cantilever beam.

1. 서 론

우주구조물과 같은 유연성을 갖는 구조물의 진동제어기법으로 지금까지 많은 제어기법들이 제안되었다.^[1-5] 그러나 대부분의 제어기법들은 제어계의 차수가 증가할 수록 실제 제어기를 적용할 때 많은 어려움에 직면한다. 특히 제어기의 차수가 크고 제어계인을 실시간으로 구해야 할 경우, 계산량이 매우 증가하게 된다. 이러한 문제를 효과적으로 다루기 위해, Meirovitch와 공동연구자들은 독립된 모달공간에서 제어기를 간단하고 쉽게 설계할 수 있는 독립모달공간 제어기법 (Independent Modal Space Control)을 제안하였다.^[6] 이 기법은 모달행렬을 변환행렬로 하여 구조물의 운동방정식을 모달좌표계의 비결합된 방정식으로 분리시킨 후 모달공간에서 제어기를 설계

한다. 이 경우, 제어기의 설계는 각 모드별로 모달 상태를 이용하여 독립적으로 수행되므로, 모델의 자유도 수에 관계없이 설계가 항상 간단하다. 즉 계산량이 매우 적게 된다. 이 제어기법에서는 모달제어력을 먼저 설계하고, 좌표변환을 통해 실제제어력을 계산하게 된다.

또한 독립모달공간 제어기법은 제어하고자 하는 모드의 수와 작동기의 수가 같으면 가제어성이 항상 만족하고, 제어 스펙오버를 최소화할 수 있다. 모달 제어력의 설계를 위한 모달 상태의 추정에는 모달필터(충분한 수의 센서를 활용)를 이용하면, 관측 스펙오버를 배제할 수 있다. 그러나 이러한 많은 장점에도 불구하고, 이 제어기법의 단점은 제어모드의 수만큼 작동기의 수가 필요하다는 것이다. 이 단점 때문에 독립모달공간 제어기법의 응용성에 제한을 받고 있다.^[8-9]

본 연구에서는 독립모달공간 제어기법의 하드웨어적 단점인 작동기의 수를 줄이는 방법으로서 작동기의 적절한 스위칭 기법을 사용하고자 한다.

* 한국항공대학교 항공기계공학과

** 한국항공대학교 대학원

또한 독립모달공간 제어기법의 제어구조는 안정성이 항상 보장되는 가상수동형 제어기법 (virtual passive controller)을 사용하고자 한다.^[12] 본 연구에서는 가상수동형 제어기로 구조가 단순한 진동흡진기를 채택하였다.^[13-15] 진동흡진기는 고전적 에너지감쇠장치이다. 이 장치는 주구조물에 부착되어, 주구조물이 진동할 때 진동에너지를 흡수하는 역할을 한다. 따라서 진동흡진기의 고유진동수는 주구조물의 고유진동수 근처에 놓이도록 설계해야 한다. 진동흡진기의 파라메타는 구조물의 진동을 원활히 흡수할 수 있도록 최적설계를 수행하였다. 또한 제어모드의 수보다 진동흡진기의 수 (작동기의 수)가 적으므로, 스위칭기법을 이용하여 진동흡진기를 제어모드 사이에서 스위칭하면서 진동을 제어하도록 하였다. 본 논문에서는 진동흡진기의 수가 제어모드 수보다 적을 때, 실제 진동제어계의 안정성과 성능의 저하를 유발하지 않는 효과적이고 안정한 스위칭 알고리즘과 모달 제어력을 설계하였다.

2. 독립모달공간에서의 진동흡진기의 설계

연속체의 운동방정식은 다음과 같은 상미분방정식으로 근사화될 수 있다.

$$I \ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t) \quad (1)$$

여기서 I 는 크기가 n 인 단위행렬이고, A 는 대각성분이 고유진동수의 제곱으로 구성된 대각행렬 ($A = \text{diag}[\omega_1^2 \dots \omega_n^2]$) 이며, D 는 감쇠를 나타내는 대각행렬이다. 또한 $f(t)$ 는 크기가 n 인 모달제어력 벡터이다. 여기서 n 은 제어모드의 개수를 뜻하며, $x(t)$ 제어기의 설계 시 사용되는 모달변위 벡터이다. 독립모달공간 제어기법은 제어력 $f(t)$ 를 각 모드별로 모달상태를 이용하여 독립적으로 수행하므로, 제어력의 설계가 매우 간단하다. 그러나 제어모드의 수만큼 작동기의 수가 필요하

다는 단점을 안고 있다. 이러한 독립모달공간 제어기법의 단점을 개선하기 위해 아래와 같은 작업을 수행하였다.

우선 독립모달공간 제어기법에서 제어모드의 수가 n 이고 작동기의 수가 m 일 때 ($n > m$), 각 모드별로 모달 에너지 ($\omega_i^2 x_i^2 + \dot{x}_i^2, i=1,2,\dots,n$)의 순위를 매기고, 이중 모달 에너지가 가장 큰 m 개의 모드를 선정하여 제어한다. 그러나 모드의 스위칭이 일어날 때, 제어제인 값의 갑작스러운 변화로 인해 제어력에 불연속이 존재하게 된다. 이러한 결과는 시스템의 응답에 좋지 않은 영향을 주게 된다. 따라서 모드의 스위칭에 주의하여야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 제어하고자 하는 모드로 작동기를 스위칭한 후 각 모드의 시정수(고유치의 실수부의 역수)에 해당되는 시간만큼 제어한 후 다시 스위칭할 모드를 모달에너지의 순서를 계산하여 결정한다. 작동기를 다른 모드로 스위칭할 때 제어하고자 하는 모드의 모달상대변위가 영이 될 때 위치 피드백을 스위칭시키고, 모달상대속도가 영이 될 때 속도피드백을 스위칭시킨다. 이렇게 함으로서 제어계의 안정성을 확보할 수 있다.

먼저 모달제어력 벡터를 다음 식과 표현한다.

$$f(t) = I\Gamma^*(t) \quad (2)$$

여기서 좌표변환행렬 Γ 는 모달제어력 벡터 순서를 바꾸는 역할을 한다. 그리고 Γ 의 모든 행은 단위행렬의 행들로 이루어진다. $f^*(t)$ 는 순서가 바뀌어진 모달제어력 벡터로서 제어하려고 하는 모드와 제어하지 않는 모드가 순서대로 배열된 벡터이다.

$$f^*(t) = \begin{bmatrix} f_c(t) \\ f_v(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 $f_c(t)$ 및 $f_v(t)$ 는 각각 제어모드 및 제어하지 않는 모달 제어력 벡터이다. 일반적으로 $f_v(t)$ 는 제어 스펙오버에 의해 발생하는 모달힘

이다. 모달 제어력은 실제 제어력으로 표현할 수 있는 데, 이는 고유함수로 구성되는 모달 변환행렬을 통해서 이루어진다.

$$f^*(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) \cdots \phi_1(x_m) & \vdots & \phi_1(x_{m+1}) \cdots \phi_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m(x_1) \cdots \phi_m(x_m) & \vdots & \phi_m(x_{m+1}) \cdots \phi_m(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m+1}(x_1) \cdots \phi_{m+1}(x_m) & \vdots & \phi_{m+1}(x_{m+1}) \cdots \phi_{m+1}(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(x_1) \cdots \phi_n(x_m) & \vdots & \phi_n(x_{m+1}) \cdots \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_C(t) \\ F_U(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{TC} & B_{TU} \\ B_{TC} & B_{TU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_C(t) \\ F_U(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 첨자 C 는 제어모드를, 첨자 U 는 제어하지 않는 모드를 나타낸다. 만일 작동기의 개수인 m 개의 모드만을 제어하려고 한다면 $F_U(t) = 0$ 이 되고 $f^*(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$f^*(t) = \begin{bmatrix} B_{CC} \\ B_{UC} \end{bmatrix} F_C(t) \quad (5)$$

실제 제어력 벡터는 다음과 같다.

$$F_C(t) = B_{CC}^{-1} f^*(t) \quad (6)$$

또한 제어하지 않는 모드의 모달힘 벡터는 다음과 같다.

$$f_U = B_{UC} B_{CC}^{-1} f^*(t) \quad (7)$$

이와 같이 독립모달공간 제어기법에서는 적은 수의 작동기만으로 많은 모드를 제어할 때, 제어하지 않는 모드에 제어 스펙오버 $f_U(t)$ 가 발생한다.

제어모드의 모달제어력 벡터는 독립모달공간에서 다음과 같이 설계하였다.

$$f_C = -K_C(x_C - x_A) - D_C(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \quad (8)$$

$$f_U = -B_{UC} B_{CC}^{-1} K_C(x_C - x_A) - B_{UC} B_{CC}^{-1} D_C(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \quad (9)$$

여기서 K_C, D_C 는 제어게인 행렬로서 양한정 대각행렬이다. 독립모달공간에서 제어력을 식(8)과 같이 설계하는 것은 해당 제어모드에 진동흡진기를 부착하는 것으로 간주할 수 있다(Fig.1 참조). 제어게인 행렬 K_C, D_C 는 각각 진동흡진기의 강성계수와 감쇠계수를 뜻한다. 식 (8)과 같이 설계된 제어력을 모달방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$\ddot{x}_C + A_C x_C = -K_C(x_C - x_A) - D_C(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \quad (10)$$

$$\ddot{x}_U + A_U x_U = -B_{UC} B_{CC}^{-1} K_C(x_C - x_A) - B_{UC} B_{CC}^{-1} D_C(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \quad (11)$$

$$M_A \ddot{x}_A = K_C(x_C - x_A) + D_C(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \quad (12)$$

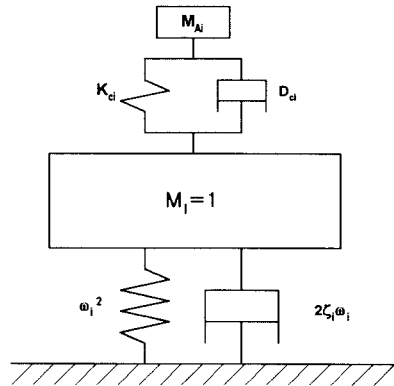


Fig.1. 진동흡진기를 이용한 독립모달공간 제어기법 (i 번째 제어모드).

각 모드별 진동흡진기 매개변수의 최적값은 Hartog의 결과식을 이용하여 다음과 같이 선정하였다.^[13]

$$K_{Ci} = M_{Ai} \left(\frac{\omega_i}{1 + \mu_i} \right)^2 \quad D_{Ci} = 2M_{Ai} \omega_i \sqrt{\frac{3\mu_i}{8(1 + \mu_i)^3}} \quad (13)$$

$$\mu_i = \frac{M_{Ai}}{M_i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

여기서 M_i , M_{Ai} 는 각각 i 번째 모드의 질량 및 진동흡진기의 질량이다. 식 (13), (14)의 유도 과정에서 구조물의 감쇠는 없는 것으로 가정하였다.

진동제어계의 페루프 방정식을 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$I \begin{bmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{x}_U \\ \ddot{x}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & A_U & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ x_U \\ x_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_C & 0 & -K_C \\ B_{UC}B_{CC}^{-1}K_C & 0 & -B_{UC}B_{CC}^{-1}K_C \\ -M_A^{-1}K_C & 0 & M_A^{-1}K_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ x_U \\ x_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_C & 0 & -D_C \\ B_{UC}B_{CC}^{-1}D_C & 0 & -B_{UC}B_{CC}^{-1}D_C \\ -M_A^{-1}D_C & 0 & M_A^{-1}D_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{x}_U \\ \dot{x}_A \end{bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)를 간략히 표현하기 위해 다음과 같은 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$G_d^* = \begin{bmatrix} K_C & 0 & -K_C \\ B_{UC}B_{CC}^{-1}K_C & 0 & -B_{UC}B_{CC}^{-1}K_C \\ -M_A^{-1}K_C & 0 & M_A^{-1}K_C \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$G_v^* = \begin{bmatrix} D_C & 0 & -D_C \\ B_{UC}B_{CC}^{-1}D_C & 0 & -B_{UC}B_{CC}^{-1}D_C \\ -M_A^{-1}D_C & 0 & M_A^{-1}D_C \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & I_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서 행렬 P 는 제어력벡터나 모달좌표의 순서를 변환하는 직교정규행렬으로서 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x_A(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_C(t) \\ x_U(t) \\ x_A(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f(t) \\ M_A^{-1}f(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} f_C(t) \\ f_U(t) \\ -M_A^{-1}f_C(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

위에서 정의한 행렬을 이용하여 식(15)를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{x}_A(t) \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & A_U & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^T \begin{bmatrix} x(t) \\ x_A(t) \end{bmatrix} = -PG_d^*P^T \begin{bmatrix} x(t) \\ x_A(t) \end{bmatrix} - PG_v^*P^T \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_A(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

식(19)에서 다음과 같은 벡터와 행렬을 정의하면

$$X = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_A(t) \end{bmatrix}, \quad K = P \begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & A_U & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^T \quad (20)$$

$$G_d = PG_d^*P^T, \quad G_v = PG_v^*P^T$$

진동계의 페루프 운동방정식은 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$I\ddot{X} + G_v\dot{X} + (K + G_d)X = 0 \quad (21)$$

그러나 페루프 방정식의 계수 행렬 $PG_d^*P^T, PG_v^*P^T$ 가 비대칭 행렬이다. 이와 같이 페루프계의 계수 행렬이 비대칭일 때 계의 안정성이 항상 보장되지는 않는다.

3. 예 제

본 절에서는 지금까지 얻어진 결과를 설명하기 위해 외팔보(cantilever beam)를 예제로 사용하겠다. 외팔보를 베르누이-오일러 보 모델로 간주할 때, 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + M(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t)$$

제어력 설계에 사용된 수학적 모델의 단위길이 당 질량은 $M=1$ 로 물성치는 $EI=1$ 으로, 길이 $l=1$ 으로 가정한다. 또한 진동흡진기의 개수는 $m=2$ 으로 제어모드의 개수는 $n=6$ 으로 선정하였다.

진동흡진기의 위치는 각각 0.56, 1.0 으로 선정하였다. 또한 스위칭 시간 t_s 는 시정수(고유치의 실수부의 역수)가 지난 후 모달상대변위와 모달상대속도가 각각 영이 되는 순간으로 잡았다. $x = 0.19$ 지점에 크기가 10 인 임펄스가 가해졌다고 가정하면, 힘은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 모달힘 $f_r = 10\phi_r(0.19)\delta(t)$, $r = 1, 2, \dots, 6$ 으로 나타낼 수 있다.

이 예제의 고유치문제를 풀이하면, 고유치는 다음과 같은 초월함수를 이용하여 얻을 수 있다.

$$\cos(\beta_r l) \cosh(\beta_r l) = -1$$

위의 방정식의 해는 다음과 같다.

$$\beta_r l = [18751, 4.6941, 7.8548, 10.9955, 14.1372, 17.2788]$$

따라서 고유치와 고유함수는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda_r = \omega_r^2 = \beta_r^4 EI / M, \quad r = 1, \dots, 6$$

$$\phi_r(x) = B_r \{ [\cos(\beta_r x) - \cosh(\beta_r x)] - C_r [\sin(\beta_r x) - \sinh(\beta_r x)] \}$$

여기서

$$C_r = (\cos(\beta_r l) + \cosh(\beta_r l)) / (\sin(\beta_r l) + \sinh(\beta_r l))$$

$$r = 1, \dots, 6$$

또한 B_r 은 고유함수를 정규화 시키기 위한 상수로 다음과 같다.

$$B_r = [1.0000 \quad 0.9998 \quad 1.0012 \quad 1.0001 \quad 1.0000 \quad 0.9998]$$

각 모드가 모달진동흡진기를 갖고 있다고 가정할 때, 각 모드별 비감쇠고유진동수, 모달진동흡진기의 스프링 계수, 시정수를 **Table. 1** 에 나타내었다. 앞에서 언급한 초기조건을 적용하여 진동제어계의 시간 영역응답에 대한 시뮬레이션을 수행하였다. 보의 진동이 제어되는 과정동안 진동흡진기의 모드 스위칭에 대한 내용을 Fig. 2 에 나타내

었다. 진동흡진기 2 개중 한 개는 항상 첫번째 모드를 제어하고 있으며, 나머지 하나는 모드 사이를 스위칭하여 나머지 모드를 제어하고 있음을 알 수 있다. 진동이 제어되는 동안 각 모드의 변위 및 속도를 각각 Fig. 3-4 에 나타내었다. 이 그림으로부터 2 개의 모달진동흡진기가 6 개의 모드를 효과적으로 제어하고 있음을 확인할 수 있다. 각 모드별 모달에너지는 Fig. 5 에 나타내었으며, 2 개 작동기의 실제제어력은 Fig. 6 에 나타내었다. 본 연구에서 제안한 제어기법의 제어력은 불연속이 거의 없어 우수한 진동제어 성능을 기대할 수 있다.

Table 1. 각 모드별 진동흡진기 파라메타의 최적값과 시정수

mode	A	K_c	D_c	t_s
1	12	0.0612	0.0015	12.811
2	486	2.4040	0.0095	2.0441
3	3801	18.8140	0.0265	0.7307
4	14614	72.3467	0.0520	0.3726
5	39941	197.7246	0.0859	0.2254
6	89154	441.3444	0.1283	0.1509

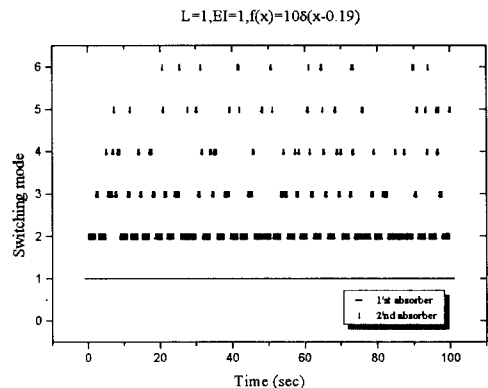


Fig. 2. 진동흡진기의 모드 스위칭

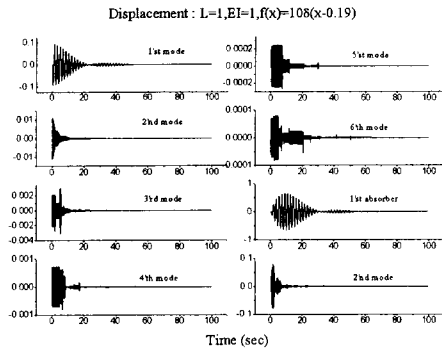


Fig. 3. 각 모드와 진동흡진기의 변위 응답

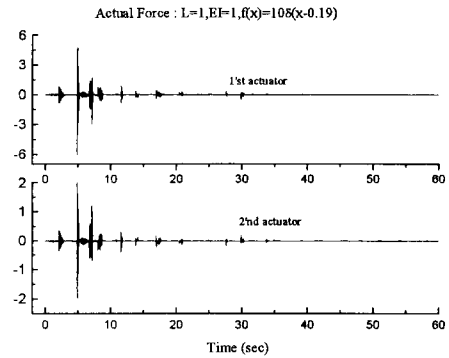


Fig. 6. 진동흡진기의 실제 제어력

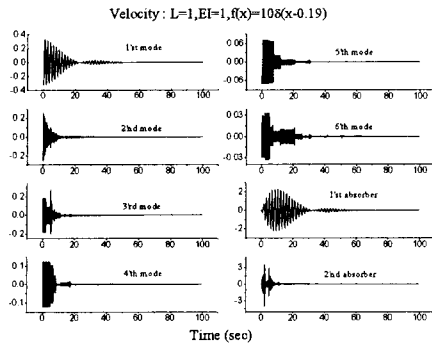


Fig. 4. 각 모드와 진동흡진기의 속도 응답

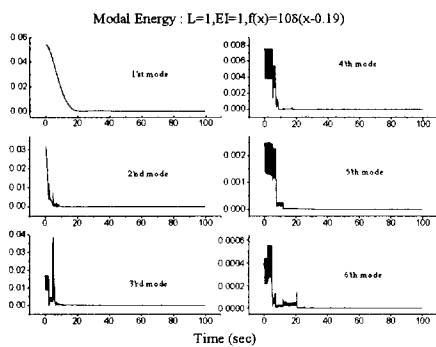


Fig. 5. 각 모드의 에너지 응답

4. 결론

본 논문에서는 가상수동형 제어를 사용한 독립모달공간 제어기법에 대해 연구하였다. 독립모달공간 제어기법은 제어기의 설계가 간단한 반면, 제어모드의 수만큼 작동기의 수가 필요하다는 단점을 갖고 있다. 본 연구에서는 이와 같은 단점을 보완하기 위해 작동기의 적절한 스위칭기법을 사용하여 작동기의 수를 절감할 수 있었다. 독립모달공간 제어구조는 안정성이 보장되는 가상수동형 제어기법을 사용하였고, 가상수동형 제어기로 구조가 단순한 진동흡진기를 채택하였다. 진동흡진기의 파라메타는 Hartog의 최적 설계값을 이용하여 결정하였다. 본 연구에서 제안한 설계기법은 안정성과 성능, 하드웨어의 절감, 제어구조의 단순함 등에서 우수한 효과를 나타내고 있음을 수치해석을 통해 확인하였다.

참고 논문

[1] Balas, M. J., 1979, "Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures," *J. Guidance and Control*, Vol. 2, pp. 252~253.
 [2] Balas, M. J., 1978, "Active Control of Flexible System," *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 25, pp. 415~436.

- [3] Chen, C. L., 1982, "Direct Output Feedback Control of Large Structures," Dynamics Laboratory Report DYNL-82-1, Cal Tech., Pasadena, CA.
- [4] Goh, C. J., and Caughey, T. K., 1985, "On the Stability Problem Caused by Finite Actuator Dynamics in the Collocated Control of Large Space Structures," *Int. J. Control*, Vol. 41, pp. 787~802.
- [5] Fanson, J. L., and Caughey, T. K., 1990, "Positive Position Feedback Control for Large Space Structures," *AIAA J.*, Vol. 28, pp. 717~724.
- [6] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1982, "Control of Self-Adjoint distributed-Parameter Systems," *J. Guidance and Control*, Vol. 5, pp. 60~66.
- [7] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1983, "Robustness of the Independent Modal-Space Control Method," *J. Guidance and Control*, Vol. 6, pp. 20~25.
- [8] Meirovitch, L., 1990, *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley & Sons, New York.
- [9] Meirovitch, L., Baruh, H., and Oz, H., 1983, "A Comparison of Control Techniques for Large Flexible Systems," *J. Guidance and Control*, Vol. 6, pp. 302~310.
- [10] Hale, A. L., and Rahn, G. A., 1984, "robust Control of Self-Adjoint Distributed Parameter Structures," *J. Guidance and Control*, Vol. 7, pp. 265~273.
- [11] Baruh, H., and Silverberg, L., 1985, "Robust Natural Control of Distributed Systems," *Guidance and Control*, Vol. 6, pp. 717~724.
- [12] Jer-Nan Juang and Minh Phan, 1992, "Robust Controller Designs for Second-Order Dynamic Systems: A Virtual Passive Approach," *J. Guidance, control, Dynamics*, Vol 15, pp 1192~ 1198
- [13] J. P. Den Hartog, 1956, "Mechanical Vibrations". McGRAW-HILL, New york.
- [14] R.Quan and D.Stech, 1996, "Time Varying Passive Vibration Absorption for Flexible Structures," *J. Vibration and Acoustics*, Vol. 118, pp 36~40.
- [15] Tasi and G.-C. Lin, 1994, " EXPLICIT FORMULAE FOR OPIMUMABSORBER PARAMETERS FOR FORCE EXITED AND VISCOUSLY DAMMPED SYSTEM," *J. Sound and Vibration*, pp 585~596