

# 고차 보요소를 이용한 폐단면 사각 박판보 진동해석

°김운영\*, 김진홍\*\*

## Vibration Analysis of Closed Thin-Walled Box Beams Using High-Order Beam Elements

Yoon Young Kim, Jin Hong Kim

### ABSTRACT

This paper proposes a new finite element for the vibration analysis of thin-walled beams of rectangular closed sections. To predict the dynamic behavior of the thin-walled beam accurately, warping and distortion deformations should be considered for the analysis. The motivation of the present development is that conventional beam elements cannot describe correctly deformations such as warping and lozenging which are not negligible in some situations. Several numerical examples are studied to confirm the validity of the present element.

### 1. 서론

박판보는 질량에 비해 상대적으로 강성값이 크기 때문에 자동차 항공기 등과 같은 구조물에 많이 사용되고 있다. 특히 폐단면 박판보는 개단면 박판보에 비해 비틀림에 매우 잘 저항하기 때문에 그 활용도가 점점 높아지고 있다. 그러나 현재 상용 프로그램 등에서 사용되고 있는 보요소, 즉 박판보의 복잡한 변형을 고려하지 않은 6 자유도를 갖는 보요소만으로는 물리적인 현상을 기술할 수 없는 경우가 있다. 예를 들면 폐단면 박판보들이 결합하는 자동차 조인트 부위 해석 시에는 상용되는 기

존의 보요소만으로는 올바른 결과를 얻을 수 없음이 여러 연구에서 지적된 바 있다.<sup>(1,2)</sup> 따라서, 폐단면 박판보의 거동을 정확하게 기술할 수 있는 새로운 보요소를 개발할 필요가 있다.

박판보의 경우 단면의 형태에 따라 개단면과 폐단면의 두 가지 형태로 나누어지며, 그 역학적 거동도 상이하다. 개단면의 경우 단면의 형상이 박판 두께의 중심선을 따라 그 평면 내에서는 변형되지 않으며 또한 단면의 두께의 중심선을 따라 전단 변형률을 무시할 수 있다. 그러나 폐단면의 경우 단면이 그것이 놓여 있는 평면 내에서 변형을 무시할 수 없기 때문에<sup>(3)</sup> 폐단면을 갖는 박판보는 해석이 개단면을 갖는 박판보에 비해 보다 복잡한 해석을 요구한다.

본 연구에서는 비틀림 거동을 잘 기술할 수

\*정희원, 서울대학교 기계설계학과

\*\*서울대학교 대학원, 기계설계학과

있는 직각 사각형의 단면을 갖는 박판보 유한요소를 개발하고자 한다. 이와 같이 직사각형 단면을 갖는 경우, 비록 그 형태는 단순하지만 비틀림면의 변형인 워핑과 면내 변형인 로젠징 등이 모두 발생하기 때문이다.

폐단면 박판보에 관련된 연구를 살펴보면, Vlasov<sup>(3)</sup>는 개단면, 폐단면을 갖는 박판보에 대한 포괄적인 이론을 확립한 바 있으며 Gjelsvik<sup>(4)</sup>은 박판보를 여러 개의 판으로 구성된 구조물로 보고 판/셀 이론에서 출발하여 2차원 거동을 1차원으로 근사하여 평형 방정식을 유도하였다. 일반적으로 많은 연구자들이 박판보를 매우 얇은 판으로 이루어진 것으로 가정함으로써 두께 내부에서 워핑을 고려하지 않았는데, Gjelsvik<sup>(4)</sup>은 그 효과가 어떤 경우 무시하지 못할 만큼 클 수 있다는 것을 지적한 바 있다. 국내에서는 곡률보에 바탕을 둔 형상함수를 이용하여 개단면 폐단면의 박판보에 대한 보요소 개발한 바 있으나<sup>(5)</sup>, 이 연구에서는 박판보 단면내의 변형을 고려하지 않았다. 또한 Boswell 등<sup>(6)</sup>도 굴곡이 있는 박판보요소를 개발하였다. 이 연구에서는 통상적으로 사용되는 6개의 자유도에 회전 변화율, 로젠징, 로젠징의 변화율 등의 세 가지 자유도를 추가로 고려한 바 있다. 김진홍 등<sup>(7)</sup>은 직사각 단면을 갖는 박판보의 비틀림 해석을 위해 워핑과 로젠징의 2개의 물리적 양을 추가로 고려한 유한요소를 개발한 바 있다.

박판보의 동적 해석에 대한 연구결과가 다수 발표된 바 있으나,<sup>(8)</sup> 비틀림과 워핑만을 고려한 경우가 대부분이다. 반면, 로젠징 변위를 포함하여 그 영향을 고려한 경우는 알려진 바 없다. 따라서 본 연구에서는 워핑과 로젠징의 2개의 물리적 양을 직접 변수로 사용하여 동적 거동을 정확하게 기술하는 새로운 요소를 개발하였다.

## 2. 기본 가정 및 변위, 변형률

본 연구에서는 직사각형 단면을 갖는 박판보에 대해서 다루었는데, 이는 직사각형이 간단한 형상이면서도 폐단면 박판보 특성을 잘 나타내고 있기 때문이다. 특히 비틀림이 일어날 때 나타나는 비틀림 변형 이외에 워핑과 단면 내의 변형인 로젠징을 고려할 수 있는 박판보요소를 개발하고자 한다. (통상적으로 개단면에서는 비틀림 변형과 워핑만을 고려함) 그러나 단면내의 변형이 발생할 때

에는 단면을 이루는 변들이 이루는 각도는 변형 후에도 변하지 않는다는 사실을 정식화 과정에서 고려하고자 한다. 우선 변위장의 형태, 그리고 이로부터 변형률을 구하는 과정을 살펴보기로 한다.<sup>(7)</sup>

Fig. 1에서는 박판 단면의 두께의 중립면의 임의의 점의 변위를 보여주고 있는데  $xy$  평면은 보의 단면을,  $z$ 축은 박판보 단면에 수직한 축을 그리고  $s$ 좌표는 중립면에서 반시계 방향으로의 길이를 나타낸다. 먼저 통상적인 비틀림 변형인 강제회전 (강제회전은 단면의 형상이 변하지 않은 채로 축방향으로 돌아가는 것을 의미함.), 로젠징, 워핑의 3가지 변형 양상을 단면 두께의 중립면의 세 변위인 축방향 변위 ( $u_z$ ), 접선 방향 변위 ( $u_s$ ), 접선에 수직한 변위 ( $u_n$ )로 나타내면 다음과 같다.

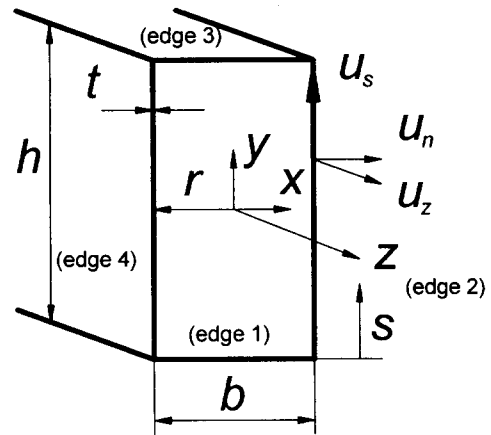


Fig. 1 Displacements at an arbitrary point on the contour of a box beam. (The edge wall thickness  $t$  is assumed to be uniform.)

먼저 강제회전이 발생하는 경우에 나타나는 변위는 접선방향과 수직방향으로, 단면좌표  $s$ 와 무관한 단면의 회전각  $\theta(z)$ 와 단면좌표  $s$ 만의 함수의 곱의 형태로 표시할 수 있다.

$$u_s(z, s) = \phi_s^{\theta}(s) \cdot \theta(z) \quad (1a)$$

$$u_n(z, s) = \phi_n^{\theta}(s) \cdot \theta(z) \quad (1b)$$

$$u_z(z, s) = 0 \quad (1c)$$

여기서  $\psi_s^\theta$ ,  $\psi_n^\theta$ 는 단면 변위 형상을 나타내는 함수로서 다음과 같다.

$$\psi_s^\theta(s) = r(s) \quad (2a)$$

$$\psi_n^\theta(s) = -\frac{l_{side}}{2} + s \quad (2b)$$

식 (2a)에서  $r(s)$ 는 단면 중심에서부터 변에 수직 한 거리를 나타낸다. 그리고  $l_{side}$ 는 각각의 변의 길이를 나타내며  $s$ 는 편의상 각변의 두 꼭지점 중 에서  $s$ 가 반시계 방향으로 향할 때의 첫 번째 꼭 지점에서 출발하는 것으로 놓는다.

다음으로 단면 중심선에서 워핑에 의한 변위가 발생할 때는 축방향으로 변위가 발생하게 되며, 이 변위  $u_z$ 는 단면상의 변위 형태를 결정하는 함수  $\psi_z^U(s)$ 와 축방향으로의 워핑의 양을 기술하는 워핑 자유도인  $U(z)$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$u_s = 0; u_n = 0 \quad (3a,b)$$

$$u_z(z, s) = \psi_z^U(s) \cdot U(z) \quad (3c)$$

식 (3c)의 함수  $\psi_z^U(s)$ 는 다음과 같이 간단한 형태 로 놓을 수 있다.

$$\psi_z^U(s) = x(s) \cdot y(s) \quad (4)$$

면내 변형, 즉 사각형 단면형상이 찌그러지는 변형이 발생하는 경우에는 다음과 같은 변위장을 얻게 된다.

$$u_s(z, s) = \psi_s^x(s) \cdot \chi(z) \quad (5a)$$

$$u_n(z, s) = \psi_n^x(s) \cdot \chi(z) \quad (5b)$$

$$u_z(z, s) = 0 \quad (5c)$$

여기서  $\psi_s^x$ ,  $\psi_n^x$ 은 면내의 단면 형상의 변화를 기 술하는 함수이며  $\chi(z)$ 는 물리적으로 인접하는 두 변들이 찌그러지는 평균각을 나타내는 자유도이다.

$$\psi_s^x(s) = \left( \frac{dx(s)}{ds} y(s) + x(s) \frac{dy(s)}{ds} \right) \quad (6a)$$

$$\psi_n^x(s) = \alpha \cdot \left( -\frac{l_{side}}{2} + \frac{3s^2}{l_{side}} - \frac{2s^3}{l_{side}^2} \right) \quad (6b)$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{2b}{b+h} & \text{for edges 1, 3} \\ \alpha_2 = \frac{2h}{b+h} & \text{for edges 2, 4} \end{cases} \quad (6c)$$

식 (6)에서  $\alpha$ 는 로젠징 변형이 발생할 때도 인접 하는 두 변이 이루는 꼭지각이 변화하지 않으면서 꼭지점에서 모멘트 평형 조건을 만족시키도록 결 정된 값이다.

이상과 같은 변형 양상으로부터 0이 아닌 변 형률을 구하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \psi_z^U(s) \cdot \frac{dU(z)}{dz} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{zs} &= \frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \\ &= \frac{d\psi_z^U(s)}{ds} U(z) + \psi_s^\theta(s) \frac{d\theta(z)}{dz} \\ &\quad + \psi_s^x(s) \frac{d\chi(z)}{dz} \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\epsilon_{ss} = \zeta \frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} = \zeta \frac{d^2 \psi_n^x(s)}{ds^2} \chi(z) \quad (7c)$$

식 (7c)에서  $\epsilon_{ss}$ 는 변이 평면 내에서 변형됨으로 인하여 발생하는 굽힘 변형률로서,  $\zeta$ 는 변 중심선 으로부터 두께 방향으로의 거리를 나타낸다. 개단 면 박판보의 경우 변형률  $\epsilon_{ss}$ 를 고려하지 않으나 폐단면 박판보에서 이 성분을 고려하지 않으면 큰 오차가 발생할 수 있어 상당한 주의를 요한다.

### 3. 유한요소 정식화

본 연구에서는 비틀림, 워핑, 로젠징의 자유도 를 갖는 2 절점 폐단면 박판 유한요소를 개발하고 자 하는데 이를 위해 통상적으로 사용되는 선형 형상함수를 사용하여 변위장을 근사화하였다.

$$\mathbf{u}(z, t) = \begin{Bmatrix} \theta(z, t) \\ U(z, t) \\ \chi(z, t) \end{Bmatrix} \quad (8a)$$

$$\mathbf{u}(z, t) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}(t) \quad (8b)$$

여기서,  $\mathbf{N}$ 는 형상함수 행렬을,  $\mathbf{d}$ 는 절점 변위벡터를 나타낸다.

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ U_1 \\ \chi_1 \\ \theta_2 \\ U_2 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

이제 2절에서 유도한 변형률을 절점에서의 변위로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{zs} \\ \varepsilon_{ss} \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad (10)$$

$$= \mathbf{B} \cdot \mathbf{d}$$

여기서,  $\mathbf{L}$ 은 미분 연산자로서 식 (7a,b,c)에 의해서 구할 수 있다.

이상의 결과들을 이용하여 Hamilton 정리에 대입하여 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\delta H = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt \quad (11)$$

여기서,  $T$ 와  $V$ 는 각각 운동 에너지와 포텐셜 에너지를 나타낸다. 포텐셜 에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta V &= \delta \int \int \int \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} |J| d\xi dA \\ &\quad - \delta \int (\mathbf{N} \cdot \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{P} |J| d\xi ds \\ &= \int \int \int \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \delta \mathbf{d} |J| d\xi dA \\ &\quad - \int \int \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{P} \delta \mathbf{d} |J| d\xi ds \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)에서  $\xi$ 는 길이 방향의 무차원 변수로서  $-1 \leq \xi \leq 1$ 의 범위를 갖는다. 또한  $\mathbf{E}$ 는 강성 행렬을,  $\mathbf{P}$ 는 외력항을,  $|J|$ 는 자코비 행렬의 행렬값을 나타내고 있다.

한편 운동 에너지  $T$ 를 시간에 대해 부분 적분을 수행하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\delta T = - \int \rho (\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{d}})^T \delta (\mathbf{N} \cdot \mathbf{d}) |J| d\xi dA \quad (13)$$

식 (12, 13)을 식 (11)에 대입하여 다음의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta H = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathbf{d}^T [\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{d}} - \mathbf{F}] \quad (14)$$

여기서  $\mathbf{K}$ 와  $\mathbf{M}$ 은 각각 강성행렬과 질량 행렬을 가리키는 것으로서 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} |J| d\xi dA \\ \mathbf{M} &= \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} |J| d\xi dA \\ \mathbf{F} &= \int \mathbf{N}^T \mathbf{P} |J| d\xi ds \end{aligned} \quad (15)$$

#### 4. 수치 해석 결과

양단이 자유인 박판보의 진동 해석을 수행하여 NASTRAN<sup>(9)</sup>의 평판 해석에 의한 변형과 비교해 보았다. (단면 폭과 높이, 그리고 길이는 각각 25mm, 50mm, 500mm 이고, 물성치는 Steel 값을 사용하였다.) Fig. 2는 평판 요소를 이용해 얻은 해석 결과로서, 첫 번째 고유 모드를 나타내는데 비틀림, 워핑, 로젠징이 동시에 일어나는 모드이다. 현 모델의 첫 번째 비틀림 모드인데 해석 방법에 따른 고유진동수를 Table 1에 실어 놓았다. 이 경우 통상의 보이론에 근거한 값은 상당히 높게 나타나는 반면, 현 보요소 결과는 평판요소 결과에 상당히 접근하는 것을 볼 수 있다. 또한 사용한 박판보의 길이가 단면의 폭(또는 높이)에 비해 상대적으로 짧지 않은 경우임에도 (단면 폭에 10배) 불구하고 통상 보요소 해석 결과와 많은 차이가 없을 주목할 필요가 있다.

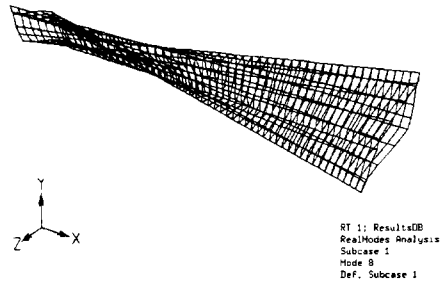


Fig. 2 Torsional mode of the box beam under free-free condition

Table 1 Torsional natural frequency of the box beam (unit: Hz)

Plate	Classical beam	Present beam
928.9	2387	803.5

다음은 일단 자유, 일단 고정인 박판보에 대해 진동해석을 수행하였다. 이 경우 정사각 단면을 사용하였다. (단면 폭과 높이, 그리고 길이는 각각 50mm, 50mm, 500mm이다.) Fig. 3은 평판요소 해석 결과로서 첫 번째 고유모드를 나타내고 있는데, 이때는 워핑과 로젠징 모드만 나타나는 것을 볼 수 있다. 비틀림에 의한 강제회전은 초기 모드에서 나타나지 않는다. 이는 비틀림 해석만으로 저주파수 영역에서 정확하게 박판보의 동적 거동을 예측하기는 어렵다는 것을 입증하는 것이다. Table 2는 이 모드에 대한 고유진동수값을 실어 놓았는데, 통상의 보이론으로는 구할 수 없는 값으로서 본연구의 타당성을 입증하고 있다.

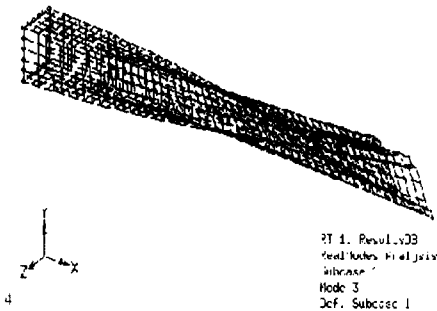


Fig. 3 First mode of the cantilever box beam

Table 2 First natural frequency of the cantilever beam (unit: Hz)

Plate	Classical beam	Present beam
570.1	-	541.3

## 5. 결론

본 연구에서는 직사각형 단면을 갖는 폐단면

박판보에 대해서 비틀림 또는 그와 관련된 모드와 진동수를 정확하게 예측할 수 있는 보요소를 개발하였다. 비틀림 거동을 정확하게 기술할 수 있도록 Vlasov 이론을 바탕으로 하여 단면의 비틀림 변위 이외에 워핑변위, 로젠징변위의 자유도를 고려하였다. 이 요소를 이용한 수치 해석 결과, 기존의 보요소로는 고려할 수 없는 폐단면 박판보에서도 평판 요소 결과와 유사한 결과를 얻음으로써 효율성과 타당성을 입증하였다.

본 연구에서는 직사각형 단면을 갖는 박판보를 중심으로 연구하였지만, 이 결과는 일반적인 비대칭인 단면에서 발생하는 비틀림과 굽힘 등을 고려할 수 있는 요소 개발의 방향을 제시하고 있다고 할 수 있다.

## 후기

본 연구는 통상산업부 G7 차세대 자동차 안전도 공통 기반 기술 과제의 지원을 받아 수행되었으며, 이에 관계자 제위께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) 김윤영, 김진홍, 강정훈, 임홍재, 1995, "박스보 T형 조인트의 강성 평가에 관한 연구," 한국자동차공학회논문집, 제 3권 제 4호, pp. 68 ~ 77.
- (2) Balch, C. D., 1986, End Effects in Thin-Walled Box Beams and Tubular Frame Joints, Ph. D. Dissertation, Stanford University, Stanford, California.
- (3) Vlasov, V. Z., 1961, Thin Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations.
- (4) Gjelsvik, A., 1981, The Theory of Thin Walled Bars, John Wiley & Sons, New York.
- (5) 양응필, 신호철, 1996, "임의 형상의 단면을 갖는 박판보의 유한요소해석," 대한기계학회논문집, 제 20권, 제 1호, pp. 100 ~ 114.
- (6) Boswell, L. F., and Zhang, S. H., 1983, "A Box Beam Finite Element for the Elastic Analysis of Thin-Walled Structures," Thin-Walled Structures, Vol. 1, pp. 353 ~ 383.
- (7) 김진홍, 김윤영, 송상현, 1996, "사각 단면 박판보의 유한 요소 개발," 대한기계학회 1996년 추계

학술대회논문집 A, pp. 362 ~ 367.

(8) Zhang, Zongfen, and Chen, Suhuan, 1990, "Dynamic Finite-Element Method of Thin-Walled Beams," AIAA Journal, Vol. 28, No. 5, pp. 910 ~ 914.

(9) MSC/NASTRAN, 1989, User's manual, The Macneal Swendler Corporation, Los Angeles.