

# 불규칙 매개변수 가진을 받는 동적시스템의 안정성 해석<sup>†</sup>

°허훈°, 조윤현°, 양재혁°

## Stability Analysis of a Dynamic System under Random Parametric Excitation<sup>†</sup>

Hoon Heo°, Yun Hyun Cho°, Jae Hyuk Yang°

### 요약

일반적인 형태의 동적시스템에서 감쇄계수와 강성계수가 시간에 따라 불규칙하게 변할 때  
의 그 확률시스템의 특성과 제어에 대한 연구 과정중의 일부로서, 그 안정성에 대해서 논하였  
다. 이 「파라메트릭」 시스템의 지배방정식이 확률론적인 관점에서 F-P-K 접근법으로 유도  
되었다. 이때 각각의 파라미터 변화량의 자기 힘 스펙트럼밀도나 상관힘 스펙트럼 밀도의 크  
기에 따른 시스템의 안정성에 대한 영향이 검토되었고 그 영역을 구하였다.

### Abstract.

Investigation is performed on the stability of general form of dynamic system whose  
damping and stiffness are varying in irregular manner along time, which is a preliminary  
result in the course of research on the characteristic and the control of the stochastic  
system. The governing equation of the 「parametric」 system is derived via F-P-K  
approach in stochastic sense. The influence on the stability due to the magnitude of auto  
power spectral density and cross power spectral density of random variation of system  
parameters is studied and the region is surveyed.

### 1. 서 론

자연계에서 동적시스템들은 다양한 형태의  
외부가진에 노출되는 바 특히 유연한 구조물과

유체간의 상호간섭이 일어나는 공탄성  
(Aeroelasticity)이나 수탄성(Hydroelasticity)의  
경우는 특이한 예가 되겠다. 이러한 경우에는  
유체에 의한 외부에서의 가진은 실제로 시스템  
의 동작 좌표계에 종속되는 형태로 나타난다.  
따라서 이 경우 시스템은 더 이상 외부가진에  
의한 동적시스템이 아니라 시스템 파라미터가  
가진되는 형태의 동적시스템으로 구성된다. 특  
히 이때의 가진 형태가 불규칙한 형태인 경우  
를 본 논문에서는 연구의 대상으로 삼았다. 즉  
불규칙한 매개변수 가진을 받는 동적시스템의  
해석 및 제어기법에 대한 일련의 연구 중 첫

† 과학재단 특정 기초 연구과제  
(96-0200-07-01-3)

\* 고려대학교 제어계측공학과 교수  
(Professor Dept. of Control and Instrumentation  
Engineering)

\*\* 고려대학교 제어계측공학과 대학원  
(Graduate Students Dept. of Control and  
Instrumentation Engineering)

번째 단계로서 백색잡음 가진의 경우에 안정성 문제에 대해서 연구하였다.

## 2. 시스템 방정식

백색잡음 형태의 불규칙한 매개변수 가진을 갖는 1-자유도 동적시스템의 전형적인 형태로 아래 식(1)과 같은 시스템을 대상으로 삼는다.

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega \dot{y} + \omega^2 y = f(\dot{y}, y) \quad (1)$$

여기서  $f(\dot{y}, y)$ : external random excitation depends on  $y$  and  $\dot{y}$

식(1)은 아래와 같이 매개변수 가진의 형태로 재구성할 수 있겠다.

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega(1+g_\zeta)\dot{y} + \omega^2(1+g_k)y = 0 \quad (2)$$

여기서  $g_k$ : white noise type random fluctuation of stiffness having power spectral density  $D_{kk}$

$g_\zeta$ : white noise type random fluctuation of damping having power spectral density  $D_{\zeta\zeta}$

식(2)를 (3)과 같은 좌표변화를 거쳐서 Ito의 확률미분방정식의 형태로 구할 수 있겠다.

$$\begin{aligned} y &= X_1 \\ \dot{y} &= X_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Ito의 확률미분방정식은 Fokker - Planck - Kolmogorov 방정식(4)에 의해서 지배되는 전이 확률밀도 함수(transition probability density function)  $P(\underline{X}, \tau)$  에 따라서 특성화 된다.<sup>(1),(2)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\underline{X}, \tau) = & \\ & - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial X_i} [a_i(\underline{X}, \tau) P(\underline{X}, \tau)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} [b_{ij}(\underline{X}, \tau) P(\underline{X}, \tau)] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 계수  $a_i(\underline{X}, \tau)$ : 1st incremental moment or drift coefficient

$b_{ij}(\underline{X}, \tau)$ : 2nd incremental moment or diffusion coefficient

따라서 본 시스템의 동적모멘트방정식은 식(5)에 의해서 구할 수 있겠다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} E[X_1^i X_2^j] = & \\ \int \int_{-\infty}^{\infty} X_1^i X_2^j \frac{\partial}{\partial \tau} P(\underline{X}, \tau) dX_1 dX_2 \end{aligned} \quad (5)$$

이 결과는 아래 식(6)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{M}_{10} &= M_{01} \\ \dot{M}_{01} &= -2\zeta\omega M_{01} - \omega^2 M_{10} \\ \dot{M}_{11} &= M_{02} - 2\zeta\omega M_{11} - \omega^2 M_{20} \\ &\quad + 4\zeta\omega^3 D_{k\zeta} M_{11} \\ \dot{M}_{20} &= 2M_{11} + 2\omega^4 D_{kk} M_{20} \\ \dot{M}_{02} &= -4\zeta\omega M_{02} - 2\omega^2 M_{11} \\ &\quad + 2\omega^4 D_{\zeta\zeta} M_{02} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $M_{ij}$ :  $E[X_1^i X_2^j]$

$D_{kk}$ : Auto Power Spectral Density of Random Variation of Stiffness

$D_{k\zeta}$ : Cross Power Spectral Density of Random Variation between Stiffness and Damping

$D_{\zeta\zeta}$ : Auto Power Spectral Density of Random Variation of Damping

물리적인 영역에서의 파라메트릭 시스템 방정식 (2)는 확률영역에서 파라메트릭 시스템 방정식(6)과 같이 구해진다.

### 3. 결 과

즉 식 (7)와 같은 형태의 확률매개변수 시스템의 안정성 영역이 관심의 대상이다.

$$\dot{M} = [A(\zeta, \omega, D_{kk}, D_{k\zeta}, D_{\zeta\zeta})]M \quad (7)$$

이 확률론적 파라메트릭 방정식을 3개의 Power Spectral Density space ( $D_{kk}$ ,  $D_{\zeta\zeta}$ ,  $D_{k\zeta}$ )에서 안정 영역과 불안정영역을 구해보면 다음 Fig. 1, Fig. 2와 같다.

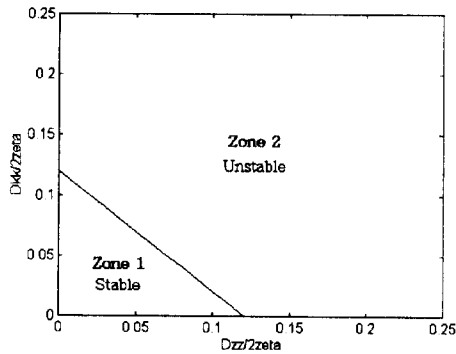


Fig. 1 Stability Region on P.S.D. plane

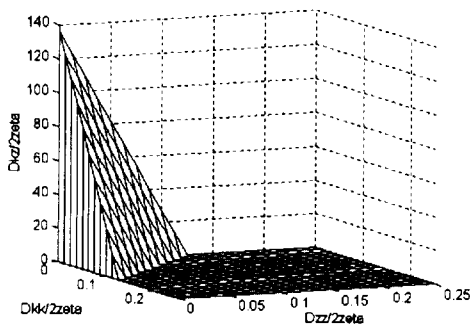


Fig. 2 Stability Region on P.S.D. space

이 안정영역(Zone 1)과 불안정영역(Zone 2)에서의 계의 응답을 식(5)에 의하여 동적 모멘트를 Fig. 3, Fig. 4를 구하였다

이를 확인하기 위해서 Monte - Carlo Simulation을 Zone 1 과 Zone 2에 대해서 시행한 바는 Fig. 5와 Fig. 6과 같다.

이때 damping과 stiffness의 random variation은 Fig. 7과 Fig. 8과 같다.

### 4. 결 론

확률론적 매개변수가진을 받는 동적시스템의 특성과 제어에 대한 연구를 수행하는 과정 중 그 시스템의 안정성에 대한 연구결과를 보였다. 백색잡음 특성을 갖는 Stochastic Parametric System의 안정성해석에 대한 새로운 기법이 시도되었고, 이 또한 성공적이라는 것이 입증되었다.

추후 연구 과제로서 유색잡음 특성의 확률 매개변수 시스템의 안정성과 또 제어기법에 대한 연구가 이론 및 실험적으로 계속되고 있다.<sup>(3),(4)</sup>

### 5. 참고문헌

1. Minsung Kim, Jungyoun Han and Hoon Heo, "A New Approach to stochastic control of Randomly Disturbed System(I)", 1995. Int'l Mechatronics conference chejudo 1~3 Dec.

2. Jungyoun Han and Hoon Heo, "Optimal Design of Smart Actuator by using of GA for the control of a Flexible Structure Experiencing White Noise Disturbance", 1996. 소음진동공학회 춘계학술대회.

3. Hoon Heo, Jungyoup Han, "A New stochastic control Technique for probabilistic structural System.", A.I.A.A Journal (under review)

4. Hoon Heo, Yun Hyun Cho and JaeHyuk Yang, "Stochastic Control on Random Parametric System.", Journal of Dynamic System and Control (A.S.M.E. : in preparation)

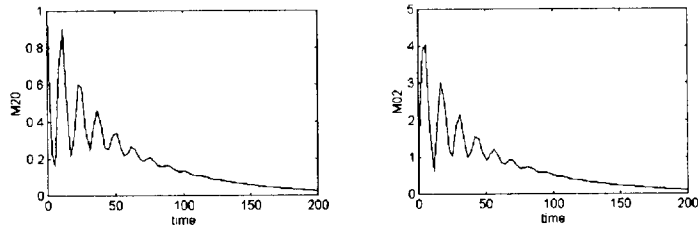


Fig. 3 Stable Moment Response of the System (Zone 1)

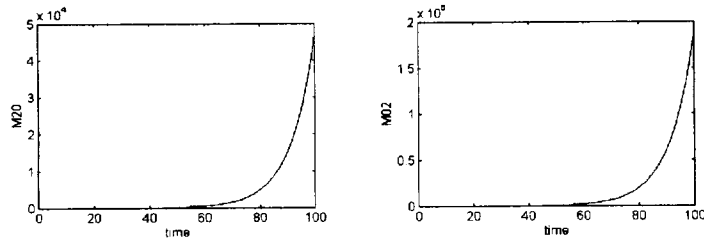


Fig. 4 Unstable Moment Response of the System (Zone 2)

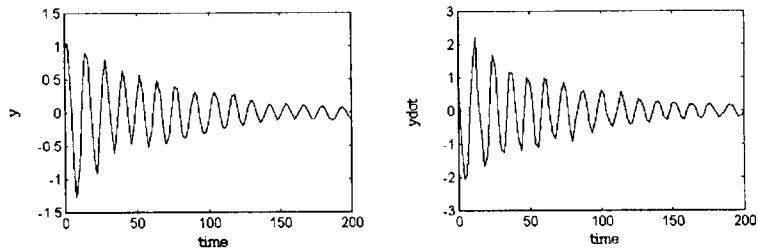


Fig. 5 Stable Physical Response of the System (Zone 1)

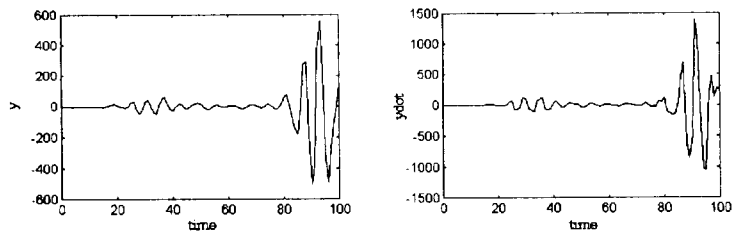


Fig. 6 Unstable Physical Response of the System (Zone 2)

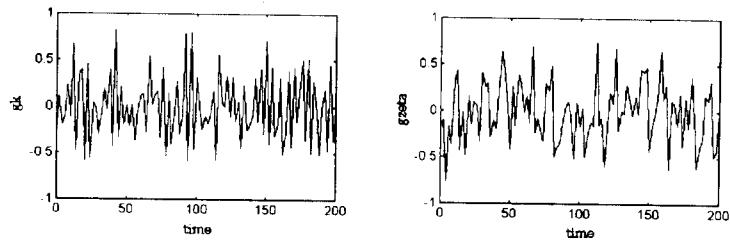


Fig. 7 White Noise Type Random Fluctuation of Stiffness and Damping in Stable Region

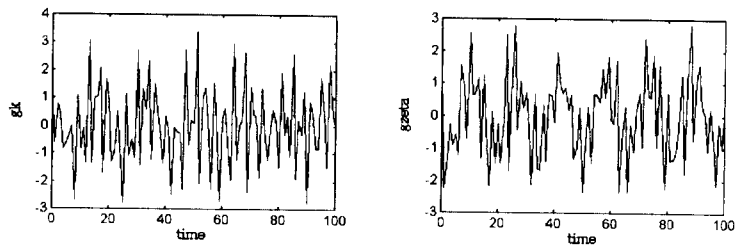


Fig. 8 White Noise Type Random Fluctuation of Stiffness and Damping in Unstable Region