

# 저속 충격시 고차이론을 이용한 복합재료 판의 동적 특성

°심동진\*, 김지환\*\*

## Dynamic Characteristics of Composite Plates Based On a Higher Order Theory Under Low-Velocity Impact

°Dong Jin Shim, Ji-Hwan Kim

### ABSTRACT

The dynamic response of symmetric cross-ply and angle-ply composite laminated plates under impact loads is investigated using a higher order shear deformation theory. A modified Hertz law is used to predict the impact loads and a four node finite element is used to model the plate. By using a higher order shear deformation theory, the out-of-plane shear stresses, which can be a crucial factor in the failure of composite plates, are determined with significant accuracy. The results compared with previous investigations showed good agreement. The effect of ply sequence and ply angle on the contact force is also studied.

### 서 론

복합재료는 일반재료보다 월등히 낮은 하중대 강성비와 적층 방법에 따라 특정 방향으로 강도를 높일 수 있는 특성 때문에 최근 많은 구조물에 널리 사용되고 있다. 한편 복합재료 구조물은 금속재료 구조물에 비해 충격에 약하다는 단점이 있다. 지금까지의 연구에 의하면 충격에 의해 복합재료가 손상을 입게 되는 방법에는 크게 압입(indentation), 기지분열(matrix cracking)과 층간분리(delamination)가 있고, 이외에도 섬유 절단(fiber breakage)등의 손상을 입을 수 있다. 특히 복합재료 구조물에 저속 충격이 가해졌을 때 육안으로 식별할 수 없는 내부적인 손상이 발생하는 경우가 많다. 따라서 구조물의 충격 거동을 구해서 손상을 예측하고 방지하는 연구가 매우 중요하게 된다.

등방성 재료로 형성된 판 부재에 대한 저속 충격 문제는 헤르츠 법칙(Hertz Law)을 사용해서 해석

적으로나 수치적으로 비교적 쉽게 구할 수 있다. 이러한 예는 문헌에서 찾아볼 수 있다<sup>1</sup>. 한편 이방성 판에 대한 문제는 여러 방법으로 해석이 시도되어 왔는데, 특히 항공기 구조물에 복합재료 적층판의 사용율이 높아지면서 이에 대한 연구가 많이 시도되었다. 복합재료 적층판의 경우 헤르츠 법칙이 부적당하기 때문에 Yang과 Sun<sup>2</sup>은 실험적으로 복합재료의 영구압입(permanent indentation)을 고려한 저속 충격시 힘과 변형의 관계를 구하였고 이 결과를 이용해서 Sun과 Chen<sup>3</sup>은 초기 인장이 있는 판에 대한 충격 거동을 1차 전단변형을 고려한 이론으로 해석하였고 Carins와 Lagace<sup>4</sup>는 수정된 헤르츠 법칙(modified Hertz Law)과 모드 가정법(assumed-mode analysis)을 이용해서 충격 문제를 빠르게 해석하는 연구를 하였다. 일반적으로 충격에 의한 복합재료의 손상을 해석하기 위해서는 면내응력(inplane stress), 수직전단응력(transverse shear stress) 그리고 수직응력(normal stress)을 정확하게 구하는 것이 중요하다. 이러한 응력을 예측하기 위하여 3차원 이론을 이용한 해석을 시도한 문헌에는 Wu<sup>5</sup>와 구남서<sup>6</sup>가 있다. Wu는 Yang

\* 서울대학교 항공우주공학과 대학원

\*\* 서울대학교 항공우주공학과

과 Sun의 실험적인 힘과 변형관계와 3차원 해석을 유한요소법을 통해서 복합재료 적층판의 층간분리 영역을 예측하는 방법을 제시하였다. 구남서는 동적 접촉문제(Signorini's problem)을 2차원 및 3차원으로 직접 해석하여 손상영역을 예측하는 등의 연구를 수행하였다. 또한 해석적인 방법을 이용한 문헌에는 Nosier<sup>7</sup>이 Reddy의 층별이론(layerwise theory)을 사용하여 여러 가지 하중분포와 접촉법칙에 대해 해석한 연구와 Thangjitham<sup>8</sup>이 고차 전단변형이론을 이용하여 몇가지 경우에 대해서 접촉 하중을 구하였던 연구와 최근에는 Pierson과 Vaziri<sup>9</sup>가 1차 전단변형이론을 이용하여 충격 거동을 예측하는 것 등이 있다. 그러나 이와 같은 2차원 판이론을 사용한 연구에서는 응력을 구하는데 주안점을 두지 않았었다.

본 연구에서는 고차 전단변형이론을 사용하여 복합재료 적층판의 특성 및 충격 거동과 응력분포를 살펴보았다. 고차 전단변형이론은 판의 상단과 하단에서의 전단변형 경계조건을 만족하기 때문에 유한요소를 사용해서 비교적 정확하게 응력분포를 구할 수 있다. 또한, 이러한 모델을 이용하여 여러 가지 적층 순서와 적층각을 갖는 판에 적용하여 복합재료 판의 동적 거동을 살펴보았다.

## 본 론

### 1. 판 모델

복합재료 판의 해석에 있어서 고전적층판이론(classical lamination theory)은 부적합한 것으로 알려져 있다<sup>10</sup>. 따라서 적층판을 해석할 경우 일반적으로 1차 전단이론을 사용하게 되는데, 이 경우 판의 윗면과 아랫면에서 응력 경계조건을 만족하지 못하게 된다. 또한 판의 두께비가 커질수록 전단보정계수(shear correction factor)가 중요하게 되므로 이 계수를 적층각에 따라 계산을 해야하는 문제점이 있다<sup>11</sup>.

응력 경계조건을 만족하는 고차 전단변형이론은 여러 저자에 의해 제시되었다<sup>14</sup>. 본 연구에서는 Reddy<sup>12</sup>의 유도 과정을 따른다.

즉, 변위장 가정은

$$u(x, y, z, t) = u_0 - z \left[ \psi_x + \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \right] \quad (1a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0 - z \left[ \psi_y + \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \right] \quad (1b)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (1c)$$

이다.

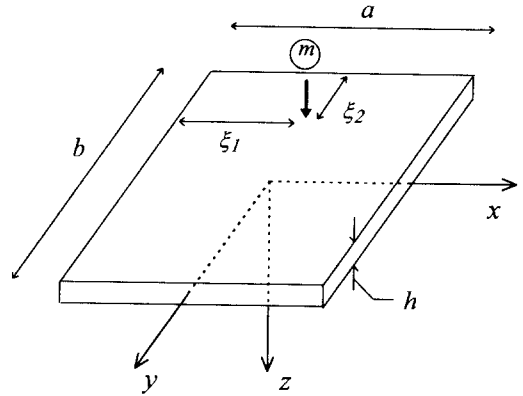


Figure 1. Coordinates and dimensions of laminated plate subjected to impact

복합재료 적층판의 k번째 적층면에서 판고정 좌표(body coordinate)에 대한 응력-변형도 관계식은

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2a)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{pmatrix} \quad (2b)$$

으로 주어진다. 본 연구에서는 선형문제에 대한 해석에 주안점을 두었으며  $\{\epsilon\}$ 은 선형 변형도-변위 관계식을 사용하여 구한 변형도이다. 그러면 식(1)과 식(2)를 이용해서 변형에너지  $U$ 를 구할 수 있다.

판의 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_{vol} \rho [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dV \quad (3)$$

따라서 판에 대한 운동방정식은 변형에너지식과 식(3)을 해밀턴의 정리에 대입하여 구하면 다음과 같다.

$$\int_0^t \int_{vol} \delta(T - U) dV dt = \frac{1}{2} \int_0^t \int_R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\rho \delta(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) - \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}] dz dAdt = 0$$

$$i, j = 1, \dots, 6 \quad (4)$$

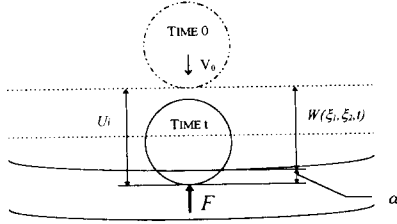


Figure 2. Sketch of impactor and plate after time t

## 2. 충격 모델

헤르츠 법칙에 의하면 두 물체가 충돌할 경우 충격체의 첫 번째 주기가 충격시 접촉시간보다 아주 작으면 충격시 힘과 변형의 관계식을 시간에 무관한 정적인 이론으로 수식화할 수 있는데, 그 관계는

$$F = k\alpha^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

으로 가정할 수 있다<sup>1</sup>. 여기서 k는 충격하는 물체의 모양과 물성치에 따라 변화하는 비례상수이고  $\alpha$ 는 간극(approach)인데

$$\alpha = u_i - w(\xi_1, \xi_2, t) \quad (6)$$

이다.  $u_i$ 는 충격체의 변위이고  $w(\xi_1, \xi_2, t)$ 는 판의 충격지점에서의 변위이다. 구형 충격체가 복합재료 평판에 충돌하는 경우에 사용되는 수정된 헤르츠 법칙에서는 k를

$$k = \frac{4}{3} \frac{R_i^{\frac{1}{2}}}{\Delta_1 + \Delta_2} \quad (7)$$

으로 가정하는데<sup>5</sup>,  $\Delta_1 = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}$  이고  $\Delta_2 = \frac{1}{E_T}$  이다.  $\nu_i, E_i$ 는 충격체의 물질상수이고  $E_T$ 는 판

의 수직방향 물질상수이다. 따라서 충격체의 운동방정식은

$$m_i \ddot{u}_i = -F = -k\alpha^{\frac{3}{2}} \quad (8)$$

으로 주어진다<sup>4</sup>.

## 3. 요한요소 정식화

고차전단변형이론은 처짐에 대한 2차 편미분을 포함하게 되기 때문에  $C^1$ 연속성을 만족하는 보간함수가 필요하다. 본 연구에서는 4절점 요소를 사용하여 아래와 같은 형태로 함수를 가정하였다.

$$w(x, y, t) = \sum W_i \phi_i^1 e^{i\omega t}$$

$$\psi_x(x, y, t) = \sum \psi_{xi} \phi_i^0 e^{i\omega t}$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum \psi_{yi} \phi_i^0 e^{i\omega t} \quad (9)$$

여기서 전단 변형에 대해서는  $C^0$ 연속성을 만족하는 Lagrange 보간함수를 사용하였고 처짐에 대해서는 conforming Hermite cubic 보간함수를 사용하였다<sup>13</sup>. 따라서 각 절점에서의 자유도는

$$[U]^T = \left[ w \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \psi_x \quad \psi_y \right] \quad (10)$$

으로 다섯 개가 된다. 식을 판의 운동방정식에 대입하여 정리하면

$$[M][\ddot{U}] + [K][U] = [F] \quad (11)$$

이 된다. 강성행렬  $[K]$ 를 계산하는데 있어서 1차 전단변형이론을 사용할 경우 과잉강성현상(shear locking)을 피하기 위해 선택적 감소 적분(selective/reduced integration)이 필요하지만 고차전단변형이론에서는 그 효과가 훨씬 적게 나타나기 때문에 선택적 감소적분을 사용하지 않아도 된다<sup>11</sup>. 그러나 본 연구에서는 계산 시간을 줄이기 위해 횡방향 전단변형과 관련된 항들을  $2 \times 2$  가우스 적분(Gauss integration)으로 그리고 나머지 항들은  $3 \times 3$  적분을 사용하여 계산하였다.

판의 진동수는 식(11)에 식(9)를 대입하면 다음과 같다.

$$\omega^2[M] = [K]. \quad (12)$$

충격 거동을 해석하는데 있어서 충격체에 대한 운동방정식 식(8)과 판의 운동방정식 식(11)의 해는 뉴마크 방법(Newmark implicit time integration)을 사용하여 구하였다<sup>13</sup>. 각 시간 간격  $\Delta t$ 에서 힘  $F_{t+\Delta t}$ 는 식(8)과 식(11)을 만족하는 값으로 수렴할 때까지 반복계산하여 구하였다. 초기 힘  $F_{t+\Delta t}^0$ 는 이전 시간 간격에서의 힘  $F_t$ 로 하였다.

#### 4. 결과 및 고찰

##### 4.1 자유진동

아래와 같은 무차원화된 물성치를 갖는 AS/3501 graphite-epoxy 복합재료 적층판에 대해서 고차 전단변형이론을 사용하여 자유진동 특성을 살펴 보았다.

$$E_1/E_2 = 15, \quad G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.4286$$

$$G_{23}/E_2 = 0.3429, \quad \nu_{12} = 0.4$$

판의 적층 형태는  $[0/90]_s$ 와  $[45/-45]_s$  일 때 4단이 단순지지된 경우와 고정지지된 경우에 대해서 해석하였다. 판의 종횡비( $\frac{a}{b}$ )는 1이고 두께비( $\frac{a}{h}$ )는 20이다.

Table1과 Table2에 Bowlus등<sup>10</sup>이 제시한 진동수와 본 연구의 결과가 비교되었다. Bowlus등은 1차 전단변형이론을 이용하여 Galerkin방법으로 진동수와 모드를 구했다. 본 예제와 같이 판의 두께가 얇은 경우 고차 전단변형이론과 큰 차이를 보이지 않고 있음을 볼 수 있다.

##### 4.2 충격 거동

적층 형태가  $[90/0/90/0/90]_s$ 인 T300/934 graphite-epoxy 판의 충격 거동을 해석하였다. 이러한 복합재료 판에 대한 해석은 여러 문헌에서 찾아볼 수 있다. 복합재료 물성치는 아래와 같다.

$$E_{11} = 141.2 \text{ GPa}, \quad E_{22} = 9.72 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.30, \quad \nu_{23} = 0.30$$

$$G_{12} = 5.53 \text{ GPa}, \quad G_{23} = 3.74 \text{ GPa}$$

$$\rho = 1536 \text{ kg/m}^3, \quad h = 0.269 \text{ mm(per ply)}$$

Table 1. Nondimensional frequencies\* for  $[0/90]_s$  plates

Mode	Bowlus et al <sup>a</sup>	Present
Simply supported		
1	11.758	11.837
3	36.866	36.960
5	42.573	42.831
Clamped		
1	22.776	22.753
3	48.328	48.764
5	55.665	56.066

$$*\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}. \quad \text{a항 개수는 } M=8, N=8$$

Table 2. Nondimensional frequencies for  $[45/-45]_s$  plates

Mode	Bowlus et al	Present
Simply supported		
1	14.205	14.171
3	34.613	34.280
5	54.856	55.090
Clamped		
1	21.110	21.245
3	42.449	42.708
5	63.095	64.763

충격체는 지름  $12.7 \text{ mm}$ 인 강철구(steel sphere)이고 초기 속도가  $3.0 \text{ m/s}$ 이다. 판의 크기는  $a = b = 0.2 \text{ m}$ 이고 4단이 단순지지 경계조건을 갖는다. 충격이 가해지는 위치는  $\xi_1 = \xi_2 = a/2$ 이다. 저속 충격에 따른 충격력과 판의 거동은 Fig.3과 Fig.4에 Carins와 Lagace<sup>4</sup> 그리고 Sun과 Chen<sup>3</sup>의 결과와 비교하여 나타내었다.

Carins와 Lagace는 모드 가정법과 수정된 헤르츠 법칙을 사용하여 계산하였고 Sun과 Chen은 1차 전단변형이론을 사용과 압입을 고려한 법칙을 사용하여 계산하였다. 본 연구의 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다.

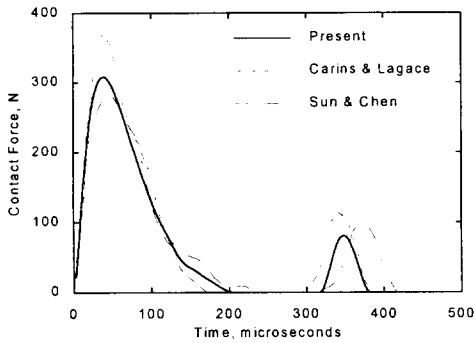


Figure 3. Contact force history for impact of simply supported  $[90/0/90/0/90]_s$  ply

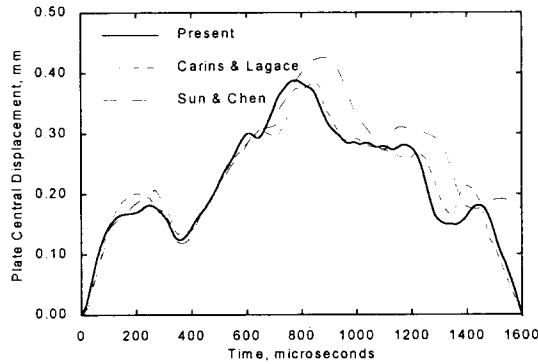


Figure 4. Center displacement history for impact of simply supported  $[90/0/90/0/90]_s$  ply

#### 4.3. 적층 순서에 따른 동적 거동의 변화

복합재료 적층판의 적층 순서를 변화시킬 경우 충격 거동의 변화를 살펴보기 위하여 다음과 같이 두가지 그룹의 cross-ply 판으로 나누어 해석하였다. 그룹 1 :  $[0_4/90_4]_s$ ,  $[0_2/90_2]_{2s}$ ,  $[0/90]_{4s}$ , 그룹 2 :  $[0_6/90_6]_s$ ,  $[0_3/90_3]_{2s}$ ,  $[0/90]_{6s}$  이다. 판의 4단이 단순지지된 경우를 살펴보고 충격체와 판의 크기는 예제4.2와 동일하다.

Fig.5와 Fig.6는 각각 그룹1과 그룹2의 충격 거동을 나타내고 있다. 여기서  $[0_4/90_4]_s$ 이  $[0/90]_{4s}$ 보다 낮은 충격력을 갖는 것을 볼 수 있다. 저속 충격으로 판의 파단이 일어나는 시점은 파단 판별식을 사용하여 판별해야 하지만 문헌에<sup>4,9</sup> 의하면 충격력의 최고값이 파단과 밀접한 관계가 있는 것으로 알려져 있다. 따라서 4단이 단순 지지된 판이 구형 충격체에 의하여 충격을 받을 경우 적층각이 같은 판을 연속적으로 쌓으면 충격력을 최소화할

수 있고 판의 파단도 방지할 수 있다.

#### 4.4. 적층각에 따른 동적 거동의 변화

적층각을 변화시킬 경우 충격 거동의 변화를 살펴보기 위하여 다음과 같이 두가지 그룹의 angle-ply 판으로 나누어 해석하였다. 그룹 1 :  $[0_4/\pm\theta_2]_s$ , 그룹 2 :  $[0_6/\pm\theta_3]_s$ 이다. 판의 4단이 단순지지된 경우를 살펴보고 충격체와 판의 크기는 예제4.2와 동일하다.

Fig.7과 Fig.8은 각각 그룹1과 그룹2의 충격 거동을 나타내고 있다. 여기서 적층 순서 변화의 경우와 비슷한 경향을 볼 수 있는데, 적층각의 변화가 작을수록 최고 충격력이 감소하는 현상을 볼 수 있다. 또한 Fig.7과 Fig.8을 비교해 보면 판의 두께가 증가할수록 적층각의 변화에 둔감해지는 경향을 볼 수 있다.

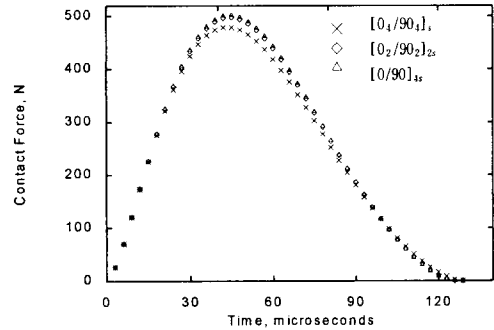


Figure 5. Contact force history for impact of cross-ply, group 1

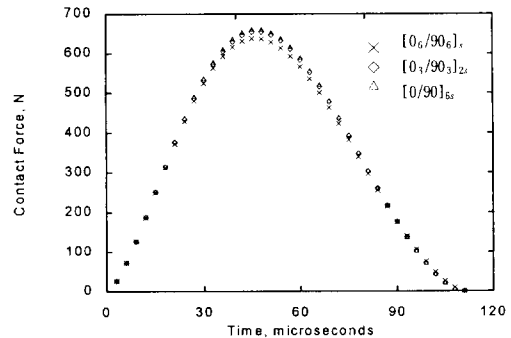


Figure 6. Contact force history for impact of cross-ply, group 2

## 참고문헌

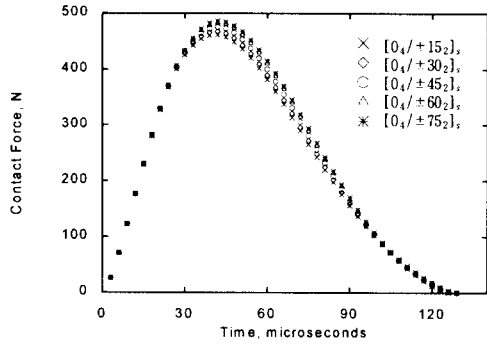


Figure 7. Contact force history for impact of angle-ply, group 1

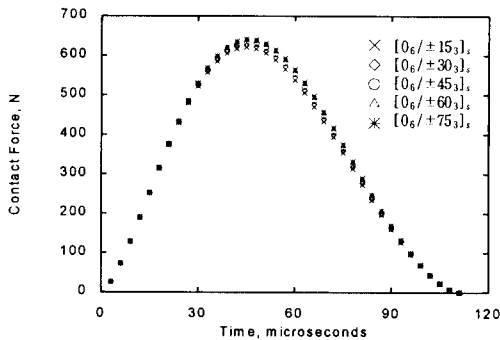


Figure 8. Contact force history for impact of angle-ply, group 2

## 결론

복합재료 적층판의 충격 거동을 고차전단변형 이론을 사용하여 구하였다. 본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 첫째, 고차 전단변형이론은 응력분포의 예측이 중요한 저속 충격문제를 해석하는데 있어서 1차 전단변형이론보다 정확하다. 둘째, 고차 전단변형이론을 사용할 경우 저속 충격문제의 거시적인 현상, 즉 충격력과 판의 동적 거동은 1차 전단변형이론과 큰 차이가 없다.

이와 같은 모델로 4단이 단순지지된 복합재료 적층판의 적층 순서와 적층각을 변화시켜 계산해본 결과 적층 순서는 같은 적층각을 연속해서 쌓을수록 충격력이 감소하고 적층각은 각도 차이가 적을수록 충격력이 감소하는 것을 알 수 있다.

[1] W. Goldsmith, "Impact : The Theory and Physical Behaviour of Colliding Bodies", Edward Arnold, London, 1960

[2] S.H.Yang, C.T.Sun, "Indentation Law for Composite Laminates", Composite Materials: Testing and Design(6th Conference), ASTM STP 787, American Society for Testing and Materials, 1982

[3] C.T.Sun, J.K.Chen, "On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates", J. Composite Materials, Vol. 19, 490~504, 1985

[4] D.S.Carins, PA.Lagace, "Transient Response of Graphite/Epoxy and Kevlar/Epoxy Laminates Subjected to Impact", AIAA Journal, Vol. 27, No. 11, 1590~1596, 1989

[5] H.Y.T.Wu, G.S.Springer, "Impact Induced Stresses, Strains and Delaminations in Composite Plates", J. of Composite Materials, Vol.22, 533~560, 1988

[6] 구남서, "저속충격시 복합재료 구조물의 동적 거동 및 손상예측에 관한 연구", 서울대학교 대학원 박사학위 논문, 1996

[7] A.Nosier, R.K.Kapania, J.N.Reddy, "Low-Velocity Impact of Laminated Composites Using a Layerwise Theory", Computational Mechanics, Vol. 13, 360~379, 1994

[8] S.Thangjitham, L.Librescu,G.Cederbaum, "Low-Velocity Impact Response of Orthotropic Plates Using a Higher-Order Theory", Proc. of 28th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference, 448~457, 1987

[9] M.O.Pierson, R. Vaziri, "Analytical Solution for Low-Velocity Impact Response of Composite Plates", AIAA Journal, Vol. 34, No. 8, 1633~1640, 1996

[10] J.A.Bowlus, A.N.Palazotto, J.M Whitney, "Vibration of Symmetrically Laminated Rectangular Plates Considering Deformation and Rotatory Inertia", AIAA Journal, Vol. 1987

[11] N.D.Phan, J.N.Reddy, " Analysis of Laminated Composite Plates Using a

Higher-Order Shear Deformation Theory", Inter. J. for Numerical Methods in Eng., vol.21, 2201~2219, 1985

[12] J.N.Reddy, "Energy and Variational Methods in Applied Mechanics", John Wiley & Sons, New York, 1992

[13] K.J.Bathe, " Finite Element Procedures", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995

[14] J.N.Reddy, "A General Non-Linear Third-Order Theory of Plates with Moderate Thickness", Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 25, No. 6, 677~686, 1990