단체법에서의 효율적인 단일인공변수법의 구현†

임성묵*, 박찬규*, 김우제**, 박순달*

*서울대학교 산업공학과, **대진대학교 산업공학과

Abstract

In this paper, both the generalization of one artificial variable technique to the general bound problem and the efficient implementation of the technique are suggested.

When the steepest-edge method is used as a pricing rule in the simplex method, it is easy to update the reduced cost and the simplex multiplier every iteration. Therefore, one artificial variable technique is more effiecient than Wolfe's method in which the reduced cost and simplex multiplier must be recalculated in every iteration.

When implementing the one artificial variable technique on the LP problems with the general bound restraints on the variables, an arbitrary basic solution which satisfies the bound restraints is sought first, and the artificial column which adjusts the infeasibility is introduced. The phase one of the simplex method minimizes the one artifical variable.

The efficient implementation technique includes the splitting, scaling, storage of the artificial column, and the cure of infeasibility problem.

1. 서론

선형계획법을 푸는 해법으로는 1940년대에 Danzig에 의해 개발된 단체법이 대표적이며, 그 실용성으로 인해 요즘도 널리 이용되고 있다. 그리고 단체법의 효율적인 구현을 위해 여러 가지 방법들이 연구되어져 왔고 특히 전산기의 발달과 그에 따른 계산방법의 효율화에 대한 연구가 진행되면서 상당히 큰 대형문제도 쉽게 해결되게 되었다.

단체법에서는 일반적으로 초기기저가능해를 구하기 위해 2국면법을 사용한다. 즉 국면 1 문제를 풀어 원문제의 초기기저가능해를 구한다. 국면 1 문제를 형성하는 방법으로 널리 사용되고 있는 방법으로 Wolfe가 제안한 방법이 있다. Wolfe의 방법은 비가능기저해로부터 출발하여 비가능성을 최소화하는 문제를 풀어 초기기저가능해를 찾는 방법이다. 즉, 문제 (P)에 대해,

$$(P)\quad \begin{array}{ll} Max & cx \\ s.t. & Ax = b\ ,\quad A:\ m\times n \\ & l\le x\le u \end{array}$$

다음과 같은 문제를 국면 1 문제로 하여 가능해를 찾게 된다.

$$\begin{array}{ll} Min & \tilde{c}x \\ s.t. & Ax = b \\ & l\le x\le u \end{array}\qquad \tilde{c}_i=\begin{cases} -1, & x_i< l_i \text{ 일 경우} \\ 1, & x_i> u_i \text{ 일 경우} \\ 0, & \text{기타 경우} \end{cases}$$

위 문제는 비가능성의 총량을 최소화하기 위한 문제가 된다. 이 문제형태를 보면 알 수 있듯이 Wolfe의 국면 1 방법은 국면 1에서 매회 목적함수의 계수가 바뀌게 된다. 즉, 현 기저의 비가능성에 따라 목적함수의 계수가 변한다. 따라서 할인가의 갱신이 효율적으로 수행될 수 있는 상황에서는 불리하게 된다. 반면 모든 비가능행에 대해 인공변수를 첨가하여 국면 1 문제를 형성하는 방법은 국면 1의 반복횟수를 증가시키게 되어 또한 불리하다. 따라서 할인가의 갱신이 효율적으로 수행될 수 있는 상황에서 인공변수를 하나만 첨가하는 방법이 Wolfe의 방법에 대해 경쟁력있게 된다.

본 연구에서는 변수의 상하한제약이 있는 일반적인 선형계획법 문제를 푸는 단체법프로그램에서 단일인공변수법의 효과적인 구현에 대해 소개한다.

2. steepest-edge 방법

선형계획법 문제를 단체법으로 풀 때, 목적함수값을 개선시킬 수 있는 후보 능선방향들을 평가하는 방법으로는 여러 가지 방법이 있을 수 있다. 그 중에서 반복횟수면에서 효과적인 steepest-edge 방법에 대해 알아보자.

한번의 선회연산후에 얻어지는 목적함수값의 개선량은 진입되는 비기저변수의 할인가와 그 변수가 진입했을 때의 최소비율검정값을 서로 곱한 양이다. 이때의 능선방향을 η_q라고 하면 해는 다음과 같이 이동하여 해의 개선폭은 $\|\eta_q\|\cdot r_q$ 이다.

$$\bar{x} = x + r_q\eta_q,\quad (\text{단, } r_q: x_q\text{진입시 최소비율값})$$

일반적인 원단체법에서는 평가방법으로 최소할인가법을 사용하는데 이는 후보 방향들을 평가하는데 할인가를 사용한다. 그리고 최소할인가법에서는 r_i이 1이라고 가정한다. 즉, 해의 개선폭이 $\|\eta_i\|$라고 가정하게 되고 할인가는 주어진 능선방향으로 능선방향의 크기($\|\eta_q\|$)를 개선폭으로 하여 해가 이동했을 때의 목적함수 개선량을 의미하게 된다. 최소할인가법의 단점은 능선방향의 크기(norm)을 고려하지 않고 어떠한 크기의 능선방향이든지 항상 최소비율값 r_i가 1이라고 가정하는데 있다. 그런 가정하에서는 같은 진행방향을 나타내는 능선방향이 라 할지라도 크기가 큰 능선방향일수록 해의 개선

† 본 연구는 한국과학재단의 목적기초연구과제(과제번호 95-0200-39-01-2)에 의해 지원되었음

폭이 크다고 가정하는것을 의미하게 된다. 즉, 할인가의 계산에는 능선방향의 크기가 영향을 미치게 되는 것이다. 한 비기저변수 x_i의 할인가는 그 비기저변수가 진입했을 때의 능선방향 η_i과 목적함수 개선방향 c와의 내적으로 이루어진다. 즉, 다음과 같이 할인가가 계산된다.

$$\bar{c}_i = -c^T\eta_i,$$

$$\eta_i = \begin{bmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{bmatrix} e_{i-m}, \quad i=m+1,\ldots,n$$

위 식에서 알 수 있듯이 할인가의 크기가 능선방향의 크기에 영향을 받는다는 것을 알 수 있다.

이와 같은 최소할인가법의 단점을 보완하는 평가방법으로 steepest-edge방법이 있는데 이는 다음과 같은 개념을 이용한다. 최대화문제의 경우 주어진 정점에서 다음 정점으로 이동할 때의 가능능선 방향들중에서 c와 가장 근접한 능선방향을 개선방향으로 택하는 것이 합리적이다. 왜냐하면 c에 근접한 능선방향일수록 단위개선폭을 움직였을 때 얻을 수 있는 목적함수의 개선량이 더 크기 때문이다. 이러한 개념을 이용하여 현재의 정점에서 나아갈 수 있는 능선방향 중 c와 가장 작은 각도를 이루는 방향을 찾는 방법이 steepest-edge방법이다.

비기저변수 x_j가 진입했을때의 능선방향과 목적함수 개선방향과의 각도를 θ라고 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\cos\theta = \frac{c^T\eta_j}{\|c\|\cdot\|\eta_j\|} = \frac{-\bar{c}_j}{\|c\|\cdot\|\eta_j\|}$$

위식에서 알 수 있듯이 정확한 각도를 계산하여 해의 단위개선폭당 목적함수값의 개선량의 우위를 평가하기 위해서는 할인가를 능선방향의 크기로 정규화해야 하며 따라서 steepest-edge방법에서는 다음과 같이 평가를 한다.

$$\frac{c^T\eta_q}{\|\eta_q\|} = \max_{j>m}\left\{\frac{c^T\eta_j}{\|\eta_j\|}\right\} = \min_{j>m}\left\{\frac{\bar{c}_j}{\|\eta_j\|}\right\}$$

Steepest-edge 방법은 그 자체로는 많은 양의 계산을 필요로 하는데 steepest-edge 방법에 요구되는 계산을 할인가와 단체승수 수정에 사용하면 전체 계산시간을 줄일 수 있다. 또한 할인가의 수정으로 full-pricing이 가능해져 반복회수를 줄일 수 있다. 현재 비기저변수의 할인가를 $\bar{c}_j$라 하고 다음 회에서의 할인가를 $\tilde{c}_j$라 하자. 또한 현재의 단체승수를 π라 하고 다음 회에서의 단체승수를 $\tilde{\pi}$라 하자. 그러면 다음의 관계식이 성립한다.

$$\tilde{c}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_q(\bar{a}_{pj}/\bar{a}_{pq}), \quad \tilde{\pi} = \pi - (\bar{c}_q/\bar{a}_{pq})B^{-T}e_p$$

3. 일반한계문제에서의 단일인공변수법

방법

앞에서 주어졌던 문제 (P)에서 초기 비가능기저 B가 선택되었다고 하자. B가 비가능기저라고 하는 것은 $Ax=b$는 만족하지만 $l\le x\le u$은 만족시키지 못한다는 뜻이다.

주어진 비가능기저로부터 가능기저를 만들기 위해서는 두가지 방법이 가능하게 된다. 첫째, $Ax=b$의 가능성을 그대로 유지하면서 $l\le x\le u$를 만족시키게 하는 방법이 있다. 둘째, 변수의 상하한 조건을 만족하는 임의의 해를 설정하고 가능성이 깨진 $Ax=b$의 가능성을 만족시켜나가는 방법이 있다.

일반적으로 변수의 비음조건만 있는 상황, 즉 $l=0$, $u=\infty$인 경우에는 첫 번째 방법을 주로 사용하게 된다. 변수의 비음조건만 있는 문제에서 현재 기저열의 양의 계수로 이루어지는 선형결합으로 우변상수가 표현될 수 있다면 그 기저는 가능이다. 그런데 n차원 실공간 R^n에서 positive orthant를 이루는 단위 벡터들과 $-e$와의 선형결합은 R^n 전체를 표시하게 된다. 이를 이용하여 기저를 먼저 결정하고 비가능이면 $-Be$을 비기저열로 추가한 후 그것을 진입시키고 가장 비가능인 기저변수를 탈락시키면 선회연산후 가능기저가 만들어진다. 그리고 인공변수가 탈락할 때까지 국면 1이 진행된다. 그러나, 문제 (P)와 같은 일반한계문제에서는 첫번째 방법을 적용하기가 어렵다.

초기 가능기저를 얻는 두 번째 방법으로는 첫째 방법과 반대로 선형방정식($Ax=b$)과는 상관없이 변수의 상하한 제약을 만족시키는 임의의 기저해를 구한 다음 선형방정식을 만족시키게 하는 인공열을 첨가하는 방법이 있다. 즉, 변수의 상하한을 만족시키는 임의해가 포함되도록 선형방정식이 표현하고 있는 아핀 공간을 확장시키는 열을 원문제에 첨가하는 것이다. 그런 다음 첨가된 인공열의 값을 감소시켜 가면서 원래의 아핀 공간으로 복귀시키면 원문제의 가능기저해가 구해지는 것이다. 첫 번째 방법과는 달리 두 번째 방법은 문제 (P)와 같은 일반적인 문제에 적용하기가 쉽다. 즉, 현재 상하한한계를 만족시키는 임의의 해가 만족될 수 있도록 하기 위해 어떻게 아핀공간을 확장시켜야하는 하는지는 알아내기가 쉽다. 만일 현재 주어진 임의의 해 $\bar{x}_B$, $\bar{x}_N$이 상하한 한계를 만족한다고 할 때, 다음의 문제 (P1)과 같이 인공변수열 x_A을 첨가하면 초기가능기저해를 쉽게 얻어낼 수 있다.

(P1)

$$\begin{aligned} &Min\ x_A \\ &s.t.\ \ Bx_B + Nx_N + (b - B\bar{x}_B - N\bar{x}_N)x_A = b \\ &\qquad l\le x\le u,\ 0\le x_A\le 1 \end{aligned}$$

(단, $\bar{x}_B$, $\bar{x}_N$는 상ㆍ하한 한계를 만족하는 해)

즉, 위 문제의 초기기저 가능해로 $x_B=\bar{x}_B$, $x_N=\bar{x}_N$, $x_A=1$ 이 될 수 있다. 위 문제에서 인공변수의 하한이 영이므로 인공변수열의 값을 최소화함으로써 원문제의 가능해가 존재할 경우 원래의 아핀공간으로 복귀할 수 있게 된다.

문제 (P1)을 단체법으로 풀 때, 인공변수열은 초기에 비기저변수가 된다. 즉, 상한의 값을 가지는 비기저 변수가 된다. 목적함수 계수를 보면 인공변수열만 1이고 나머지 변수의 계수는 영이므로 다음 회에서 인공변수열이 진입변수로 선정되어 기저로 진입하게 된다. 그런 후 인공변수열이 탈락되어 하한인 영의 값을 가지게 되거나 기저이면서 값이 영이 될 때 원문제의 가능기저해가 구해지게 된다.

장점

단체법 국면 1에서 앞에서 설명하였던 Wolfe의 비가능성 최소화 방법을 사용하게 되면 국면 1에서 매회 목적함수의 계수가 바뀌게 된다. 즉, 현재의 비가능성의 상황에 따라 각 기저변수의 목적함수계수가 매회 변한다. 그러므로 매회 할인가의 갱신이 불가능해진다. 따라서 국면 2에서만 할인가를 갱신시켜 갈 수 있게 되어 그만큼 steepest-edge 방법의 효율성이 낮아지게 되는 것이다. 또한 국면 1의 할인가 계산의 계산 부하를 줄이기 위해 full-pricing 대신에 진입변수선정 대상을 제한하는 다종평가, 부분평가를 사용하게 되는데 이로써 전체 국면 1 반복횟수가 늘어나게 된다.

반면, 단일인공변수법을 사용하게 되면 Wolfe의 방법과는 달리 국면 1의 목적함수계수가 매회 고정됨에 따라 할인가의 갱신이 국면 1에서도 가능하게 된다. 따라서 반복횟수면에서 우수한 full-pricing이 다종평가나 부분평가에 비해 소요되는 비용이 그리 많지 않게 되어 전체 수행시간측면에서 다종평가·부분평가보다 유리하게 된다. 또한, Wolfe 방법과 달리 모든 비기저 변수의 비가능성을 판별하여 목적함수계수를 형성하는 연산이 필요없게 된다.

4. 단일인공변수법의 구현문제

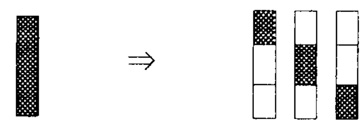
행렬 희소도의 중요성

단체법 프로그램에서 가장 많은 계산이 기저역행렬과 관련된 부분이다. 그러므로 기저역행렬의 계산, 보관의 효율적 구현이 단체법 프로그램의 효율에 상당한 영향을 미치게 된다. 대형문제에서는 기저행렬의 크기도 커져서 그 계산시간은 상당히 길어지게 된다. 그러나 일반적인 대형 선형계획법 문제에서의 입력자료는 희소도가 아주 높기 때문에 그 희소도를 이용하면 기저역행렬 연산 시간을 상당부분 줄일 수 있다. 희소도가 높은 기저역행렬은 실제 계산에 쓰이는 비영요소가 거의 없기 때문에 이를 고려하여 계산의 효율성을 높일 수 있다. 기저역행렬이 관련되는 부분은 단체승수의 계산, 진입열의 수정, 기저역행렬과 해의 수정등인데 이에 대한 계산량을 희소도를 이용하여 줄임으로써 전체 수행시간을 줄일 수 있다. 또한 희소성을 이용한 계산량의 감소는 수치오차의 감소효과도 가져오게 된다. 단일인공변수법의 구현에 있어서도 이러한 행렬 희소성을 고려하여야만 효율적인 구현이 될 수 있다. 그 방법으로 밀집열인 단일인공변수열의 분할법과 보관방법의 효율화등이 있다.

단일인공변수열의 분할

단일인공변수법을 사용하게 되면 인공변수열이 대부분 밀집열(dense column)이 된다. 또한 그 단일인공변수열은 국면 1 수행중 항상 기저열이 되므로 기저역행렬의 밀집도가 높아지게 된다. 기저행렬을 상하분해하여 보관, 계산하는 경우 적절한 순서화를 통해 밀집열을 행렬의 뒤로 치환하여 그 밀집도를 떨어뜨릴 수도 있지만 인공변수를 여러 개 첨가하는 기존의 방법에 비해 기저역행렬이 관계되는 연산이 느려질 수밖에 없다. 기저역행렬 연산은 단체법 수행의 대부분을 차지하므로 그 영향은 상당히 크다고 할 수 있다. 그 해결방안으로 [그림 1]과 같이 인공변수열을 여러개로 분할(splitting)하는 방법이 있다. 단일인공변수법에서는 인공변수열 하나가 모든 비가능성을 보정하고 있기 때문에 비가능성이 제거되기 전에는 그 열은 기저에서 빠지지 않는다. 그러므로 국면 1 의 전체 수행동안 항상 기저행렬의 밀집도가 높아지게 된다. 따라서 인공변수열을 분할하므로써 몇개의 인공변수열이 비가능성을 보정할 수 있도록 하는 것이 절충안으로 제시될 수 있다.

그러나 이 방법은 인공변수열을 희소하게 유지할 수 있지만 국면 1에서 보다 많은 인공변수열을 비기저로 만들어야 하므로 국면 1의 반복횟수가 늘어날 가능성도 있다.



[그림 1] 단일인공변수열의 분할

단일인공변수열의 보관

인공변수열을 보관하는 방법으로는 두가지 방법이 가능하다. 첫째, 인공변수열을 원래의 입력자료구조에 그대로 첨가시키는 방법이다. 이 방법은 단체법 수행코드의 다른 부분의 변경이 필요없고, 인공변수열을 희소행렬자료구조로 보관할 수 있다는 이점이 있지만 해법종료후 원문제를 그대로 복원하기를 원하는 경우, 특히 단체법 코드를 다른 프로그램에 서브루틴으로 사용하는 경우, 에는 다시 입력자료에서 인공변수열을 제거하는 작업이 필요하다는 단점이 있다. 두 번째 방법으로는 단일인공변수열을 원래의 입력자료구조와 독립적으로 보관하는 것이다. 이 방법은 단체법 수행코드의 다른 부분에서 인공변수열을 항상 고려해야 하는 단점이 있는 반면 원래 문제 입력자료를 그대로 유지할 수 있다는 장점이 있다.

규모화

단일인공변수열은 기저행렬에 항상 포함되는 열이기 때문에 그 수치적 안정성은 상당히 중요하다. 그러나, 인공열하나가 전체 비가능성을 보정하고 있어서 그 열의 요소들이 크기가 상당히 불규칙적이고 수치적 불안정을 유발할 수 있다. 그리고 그 열의 수치적 안정성은 국면 1의 종료판정에도 많은 영향이 있어 반복횟수에도 영향이 있다. 이러한 문제점은 위의 인공변수열의 분할에 의해 어느정도 해결될 수 있지만, 또다른 해결방법으로 규모화(scaling) 방법이 있을 수 있다. 그 방법으로 인공변수열 하나에 대해서만 독립적으로 규모화를 수행할 수도 있고, 인공변수열을 원래의 입력자료에 첨가한 후 전체적으로 다시 규모화를 수행할 수도 있다.

비가능성

단체법으로 문제를 풀다보면 해법수행 도중 전산기 수치오차 때문에 비가능해로 빠지는 경우가 종종 있게 된다. 국면 2의 경우에는 현재의 비가능성을 보정하기 위해 단일인공변수열을 다시 만들어 국면 1로 돌아가면 되지만 국면 1에서 비가능성이 일어나면 문제가 생기게 된다. 왜냐하면 단일인공변수법에서는 Wolfe의 방법과 달리 현재의 해가 항상 가능성을 유지한다고 가정하기 때문이다. 또한 국면 1에서 인공변수열이 기저에 포함되어 있다면 인공변수열을 비가능을 보정하기 위해 수정하는 것이 기저행렬의 일차독립성을 깨뜨릴 수 있다. 해

결방법으로는 인공변수열이 국면 1에서 비기저라면 인공변수열을 다시 만들면 되고, 기저라면 인공변수열을 탈락시키고 기저행렬의 일차독립성을 유지할 수 있는 다른 비기저열을 찾아 진입시킨후 다시 해법을 진행하는 것이다. 즉 인공변수가 기저가 되는 수정된 행에서 비영의 값을 가지는 비기저열을 기저로 진입시키는 것이다. 여기서 일차독립을 유지시키는 비기저열을 찾는 작업이 오버헤드가 약간 있다. 또 다른 방법으로 비가능성을 무시하는 것이다. 실험결과를 볼 때 해법수행도중 비가능성이 발생하는 경우가 그리 많지 않고, 또한 비가능정도가 그리 심하지 않기 때문에 비가능성을 무시하고 해법을 진행해도 큰 문제가 되지 않았다.

5. 결론

본 연구에서는 단일인공변수법의 일반한계문제로의 확장과 그 효율적인 구현에 대헤 다루었다. 선형계획법 문제를 단체법으로 풀 때, 진입변수 선정방법으로 steepest-edge방법을 사용하면 할인가의 갱신이 용이해진다. 따라서 국면 1에서 목적함수 계수가 매회 변해 할인가의 갱신이 불가능한 Wolfe의 국면 1 방법에 비해 하나의 인공변수를 첨가하여 비가능성을 보정하는 단일인공변수법이 유리하게 된다.

기존의 단일인공변수법에서는 선형방정식을 만족하는 임의의 기저해를 구하여 변수의 비음조건을 만족시키는 기저해를 찾아나가는 방식을 취하는데 이 방법은 일반한계문제로의 확장이 어렵다. 그래서 본 연구에서는 변수의 상하한 한계를 만족하는 임의의 기저해를 구한 후 선형방정식까지 만족하는 기저해를 찾아가는 단일인공변수법을 제안하였다.

단일인공변수법을 구현할 때 여러 가지 문제들이 발생할 수 있는데, 첫째로 인공변수열의 밀집성이 높다는 점이다. 이것은 단일인공변수열을 몇 개의 열로 분할하는 방법으로 어느정도 해결될 수 있다. 둘째로 인공변수열의 수치적 안정성 문제인데, 이것은 인공변수열의 적절한 규모화를 통해 안정성을 높일 수 있다. 셋째로 비가능성 문제는 인공변수열의 재구성 또는 비가성의 허용등으로 해결할 수 있고, 넷째로 단일인공변수열의 보관문제는 원문제 입력자료구조에 포함시키는 방법과 독립적으로 관리하는 방법이 가능하다.

마지막으로 아래의 실험결과를 통해 단일인공변수법의 효율성을 검증하였다.

6. 참고 문헌

[1] 박순달,「선형계획법(3정판)」, 민영사, 1992

[2] 박찬규, 임성묵, 박순달, "동적 steepest-edge 방법과 퇴화방지기법의 구현", 한국경영과학회 대한산업공학회 '97 춘계 공동학술대회 논문집, 1997

[3] 서용원, 김우제, 박순달, "선형계획법프로그램의 수치오차보정과 행렬희소도 유지", 한국경영과학회 '95 추계학술대회 논문집, 1995

[4] 서용원, 김우제, 박순달, "단체법에서의 초기기저 구성에 관한 연구", 경영과학, 제13권 3호, pp.105-113, 1996

[5] 안재근, 김우제, 박순달, "단체법에서의 규모화와 허용오차", 전산활용연구, 제6권 1호, pp.29-39, 1994

[6] Goldfarb, D., "Using the steepest-edge simplex algorithm to solve sparse linear programs," in: J. Bunch and D. Rose, eds., Sparse Matrix Computations (Academic Press, New York, 1976) pp. 227-240.

[7] Goldfarb, D., Reid, J.K., "A practical steepest-edge simplex algorithm", Mathematical Programming 5 (1973), 1-28

[8] Forrest, J. J, Goldfarb, D., "Steepest-edge simplex algorithms for linear programming", Mathematical Programming 57, pp. 341-374, 1992

[9] Reid. J. K., "Fortran Subroutines for Handling Sparse Linear Programming Bases", Computer Science and Systems Devision, A.E.R.E., Harwell R.8269 pp 1-23, 1976

[표 1] 실험결과

문제	행	열	단일인공변수법				Wolfe의 방법			
			반복횟수		수행시간		반복횟수		수행시간	
			국면 1	전체	국면 1	전체	국면 1	전체	국면 1	전체
bandm	306	472	107	265	0.21	0.53	101	230	0.21	0.46
perold	626	1376	726	1349	4.73	8.94	807	1462	6.11	10.57
25fv47	822	1571	597	1587	4.63	13.73	564	1566	5.03	14.06
80bau3b	2263	9799	1777	7422	18.54	69.22	3317	8524	42.46	95.28
bnl2	2325	3489	1001	1827	9.21	18.06	945	1792	10.90	20.00
d2q06c	2172	5167	632	5942	6.98	150.56	692	5690	11.84	153.27
tuff	334	587	196	200	0.47	0.51	369	414	1.09	1.18
finnis	498	614	241	414	0.43	0.69	206	463	0.46	0.88
fit2p	3001	13525	4724	8685	238.88	401.82	7163	13596	490.65	799.02
greenbea	2393	5405	1304	4580	21.27	75.51	1185	4218	23.61	75.27
pilot	1442	3652	2354	3845	90.95	212.09	3816	5633	191.24	325.24
stocfor3	16676	15695	1954	6119	143.34	545.19	2195	6577	200.05	604.89
wood1p	245	2594	158	358	3.44	6.32	200	442	4.60	8.62
degen3	1504	1818	945	1786	15.34	32.20	917	1722	17.72	33.87