

## 다단 회전축 고유진동 특성

전오성, 김홍건(전주대학교 기계공학과), 김진오(숭실대학교 기계공학과)

### Natural Vibration Characteristics of Multi-step Rotating Shaft

Oh Sung Jun, Hong Gun Kim(Jeonju University),  
and Jin O. Kim(Soongsil University)

#### ABSTRACT

Natural vibration of the rotor system having multi-step cross-sections is analyzed. The rotary inertia and the shear deformation are considered. Torque is also included in order to simulate the power transmission system. The complex displacement and the variable separation are introduced. The exact solutions in uniform cross-section segment and the boundary conditions are used. Natural frequencies and mode shapes are obtained, especially the mode shapes are continuous.

#### 1. 서 론

극히 소수의 예외적인 경우를 제외하고는, 회전체 연구는 진동이 발생하지 않도록 하는 연구가 주류를 이룬다. 회전체 사용시 발생하는 진동은 매우 다양한 발생원을 갖고 있다. 대체로 비정상성들이 주류를 이루지만, 경우에 따라서는 정상적인 요인들도 진동발생에 원인제공을 할 수가 있다. 외부가진 요소로서 이들을 피할 수 없다고 할 때에, 진동연구에서는 회전체의 고유진동 특성에 관련한 정보를 흔히 최우선으로 요구하게 된다. 이는 축의 회전에 의해서 발생할 수 있는 다양한 스펙트럼(synchronous and non-synchronous) 성분이 축의 고유진동 특성과

맞물리면 공진을 유발하여 회전체의 기능을 저하시키기 때문이다.

회전축 굽힘진동 해석의 본 연구에서는 축의 회전관성, 전단 변형, 자이로스코프 효과가 고려되고 축 양단에 토오크가 부여된 모형에 있어서 해를 해석적으로 구하는 방법을 개발하여 각 고유진동수에 해당하는 모우드를 연속곡선으로 표현한다. 이와같은 연속 모우드의 정보는, 단위 길이당 변형(굽힘, 비틀림)의 크기를 구하는 문제와도 쉽게 연계시킬 수 있어 응력의 분포 형태도 연속적으로 표현한 결과를 제공할 수 있게 된다.

#### 2. 운동방정식과 경계조건

균일단면을 갖는 굽은 회전축의 변형 거동은 회전관성과 전단변형을 고려해야 제대로 표현할 수 있다. 이에 축의 회전에 의한 자이로스코프 효과를 포함하면 운동방정식은 다음과 같다. 특히 운동방정식을 동력전달 축에 대해 일반화시키기 위하여 토오크를 고려하였다. [1]

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{EI\rho}{xG} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + T \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{T\rho}{xG} \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho A r_0^2 \left[ \left( \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{xG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} \right) + 2\Omega \left( \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{xG} \frac{\partial^3 z}{\partial t^3} \right) \right] = 0 \quad (1a)$$

$$EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{EI\rho}{xG} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial t^2} - T \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{T\rho}{xG} \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \rho A r_0^2 \left[ \left( \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{xG} \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} \right) - 2\Omega \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{xG} \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} \right) \right] = 0 \quad (1b)$$

이 식에서  $x$ 는 길이방향 좌표,  $y$ 와  $z$ 는 수평과 수직방향 변위이다.  $T$ 는 양단에 부여된 토오르크를 나타내며,  $E$ 와  $G$ 와  $\rho$ 는 재료의 종탄성계수와 횡탄성계수 및 밀도를 나타낸다.  $I$ 와  $A$ 는 봉 단면의 면적모멘트와 면적을 나타내며,  $r_o$ 와  $x$ 는 단면의 회전반경(radius of gyration)과 형상계수(form factor)를 나타낸다. 그리고  $\Omega$ 는 축 회전수이다.

균일 단면 요소들이 연결되어 있는 경계에서의 연속조건은 아래와 같이 좌측요소( $L$ 로 표시)의 우측 끝과 우측요소( $R$ 로 표시)의 좌측 끝에서 변위, 기울기, 모멘트 및 전단력이 같다는 가정이다. 정리하면 다음과 같다.

## 2.1 복소수 운동방정식

앞의 운동방정식을 복소수 공간에서 표현하면,  $x$ - $y$ 와  $x$ - $z$ 평면 상의 두 개의 식을 하나로 축약할 수 있다. 즉,

$$u(x, t) = y(x, t) + jz(x, t) \quad (2)$$

를 이용하면, 운동방정식은

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{EI\rho}{xG} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - jT \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + j \frac{T\rho}{xG} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho A r_o^2 \left[ \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{xG} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) - j 2\Omega \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{xG} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) \right] = 0 \quad (3)$$

로 표현된다. 이를 다시  $x$ 에 대한 미분차수 크기로 정리하면,

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - jT \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \left( \frac{EI\rho}{xG} + \rho A r_o^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + j 2\rho A r_o^2 \Omega \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + j \frac{T\rho}{xG} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \frac{\rho^2 A r_o^2}{xG} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - j 2 \frac{\rho^2 A r_o^2 \Omega}{xG} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

이 된다. 이는 복소수 4차 편미분방정식이다.

## 2.2 복소수 경계조건

경계조건을 복소수함수로 나타내면 다음의 4개 식으로 정리된다.

$$u|_L = u|_R \quad (5a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_L = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_R \quad (5b)$$

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - jT \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_L = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - jT \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_R \quad (5c)$$

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - jT \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A r_o^2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \rho \Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \Big|_L = EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - jT \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A r_o^2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \rho \Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \Big|_R \quad (5d)$$

## 3. 해석 방법

### 3.1 변수분리

식(3)의 운동방정식 해를

$$u(x, t) = U(x) \cdot e^{j\omega t} \quad (6)$$

로 가정하고 대입하면 다음과 같이 변수분리된 식을 구할 수 있다.

$$EI \frac{d^4 U}{dx^4} - jT \frac{d^3 U}{dx^3} + \left[ \left( \frac{EI\rho}{xG} + \rho A r_o^2 \right) \omega^2 - 2\rho A r_o^2 \Omega \omega \right] \frac{d^2 U}{dx^2} - j \frac{T\rho}{xG} \omega^2 \frac{dU}{dx} + \left[ \frac{\rho^2 A r_o^2}{xG} \omega^4 - 2 \frac{\rho^2 A r_o^2 \Omega}{xG} \omega^3 - \rho A \omega^2 \right] U = 0 \quad (7)$$

이 식은 복소수 계수와 복소수 변위  $U$ 를 갖는 4차 완전미분방정식이므로, 이 식을 요약정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d^4 U}{dx^4} + a \frac{d^3 U}{dx^3} + b \frac{d^2 U}{dx^2} + c \frac{dU}{dx} + dU = 0 \quad (8)$$

이는  $x$ 에 대한 선형상미분방정식이므로  $U = pe^{\lambda x}$ 의 해를 갖는다. 따라서 이를 대입하면

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (9)$$

의 4차 다항식이 된다. 여기서  $a, b, c, d$ 는 복소수이며 다음과 같고,  $\lambda$ 도 복소수이다.

$$\begin{aligned} a &= -\frac{jT}{EI} \\ b &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{EI\rho}{xG} + \rho A r_o^2 \right) \omega^2 - 2\rho A r_o^2 \Omega \omega \right] \\ c &= -j \frac{1}{EI} \frac{T\rho}{xG} \omega^2 \\ d &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{\rho^2 A r_o^2}{xG} \omega^4 - 2 \frac{\rho^2 A r_o^2 \Omega}{xG} \omega^3 - \rho A \omega^2 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

### 3.2 4차 다항식의 해

앞의 4차 polynomial은 다음의 3차 해석방정식을 가진다. [2,3]

$$\mu^3 - b\mu^2 + (ac - 4d)\mu - a^2d + 4bd - c^2 = 0 \quad (11)$$

이  $\mu$ 에 대한 3차 방정식의 임의의 근을  $\mu_1$ 라 하고

$$R = \left(\frac{a^2}{4} - b + \mu_1\right)^{1/2} \quad (12)$$

라고 하자. 그러면 다음과 같이  $D$ 와  $E$ 를 정의하여,

$R \neq 0$ 일 때는

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b + \frac{4ab - 8c - a^3}{4R}\right)^{1/2} \\ E &= \left(\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b - \frac{4ab - 8c - a^3}{4R}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (13)$$

$R = 0$ 일 때는

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{3a^2}{4} - 2b + 2(y^2 - 4d)^{1/2}\right)^{1/2} \\ E &= \left(\frac{3a^2}{4} - 2b - 2(y^2 - 4d)^{1/2}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

4차 방정식의 근을 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{a}{4} + \frac{R}{2} + \frac{D}{2} \\ \lambda_2 &= -\frac{a}{4} + \frac{R}{2} - \frac{D}{2} \\ \lambda_3 &= -\frac{a}{4} - \frac{R}{2} + \frac{E}{2} \\ \lambda_4 &= -\frac{a}{4} - \frac{R}{2} - \frac{E}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

### 3.3 공간 해

4차 polynomial의 해를 사용하여 방정식의 해를 표시하면,

$$U = p_1 e^{\lambda_1 x} + p_2 e^{\lambda_2 x} + p_3 e^{\lambda_3 x} + p_4 e^{\lambda_4 x} \quad (16)$$

이 되며, 이는 회전수  $\Omega$ 와 고유진동수  $\omega$ 에 의존하여 결정되는  $\lambda_i$ 와 함께  $x$ 축을 따라 분포하는 복소 변형을 나타낸다.

### 3.4 경계조건의 변수분리

앞의 4개의 경계조건에 대하여 변수분리하면,

$$U_L = U_R \quad (17a)$$

$$\frac{dU}{dx} \Big|_L = \frac{dU}{dx} \Big|_R \quad (17b)$$

$$EI \frac{d^2 U}{dx^2} - jT \frac{dU}{dx} \Big|_L = EI \frac{d^2 U}{dx^2} - jT \frac{dU}{dx} \Big|_R \quad (17c)$$

$$\begin{aligned} EI \frac{d^3 U}{dx^3} - jT \frac{d^2 U}{dx^2} + \rho A r_o^2 (\omega^2 - 2\omega\Omega) \frac{dU}{dx} \Big|_L \\ = EI \frac{d^3 U}{dx^3} - jT \frac{d^2 U}{dx^2} + \rho A r_o^2 (\omega^2 - 2\omega\Omega) \frac{dU}{dx} \Big|_R \end{aligned} \quad (17d)$$

### 3.5 전체 해석 방정식

주어진 시스템에 적절한 경계조건을 부여하면 전체 시스템에 대한 식이 만들어진다. 전체 시스템에 대한 식은, 축요소 수의 4배 크기의 차원을 갖는 행렬을 갖는다. 이는 각 끝단 경계에서 생성된  $(2 \times 4)$ 차원의 부분행렬과, 각 중간단 경계에서의  $(4 \times 8)$ 차원의 부분행렬들로부터 구성되어 진다.

이 행렬은 회전축의 기하학적 특징, 재질 특징, 회전수 및 토오크 등의 값 뿐만 아니라 진동수  $\omega$ 에 의존하여 결정되는 특징을 갖는다. 전체 시스템에 대한 식은 우변이 0인 연립방정식으로서, 이 식이 의미있는 해를 갖기 위한 조건은 좌변 행렬의 행렬식이 0이 될 때이다. 이 때 이를 만족하는  $\omega$ 가 존재하는데, 이것이 고유진동수이며, 이 때의  $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, \dots, p_{M1}, p_{M2}, p_{M3}, p_{M4}$ 는 축의 변형곡선을 결정하는 계수들이 된다.

#### 4. 계산 결과 및 토의

그림 1에 Prohl의 회전축 모형을 보여주는데, 본 해석에서는 동력전달축에 적용을 목표로 해서 디스크를 제외하였고, 표1에도 디스크를 제외한 제원을 나타냈다. 표에 주어진 수치는, 길이를 cm로, 질량을 kg으로, 시간은 sec로 표시한 것이다. 회전체의 고유진동수  $\omega$ 의 계산은, 이의 값을 작은 값으로부터 시작하여 서서히 증가시켜가면서 행렬식의 값을 조사하여 그 값이 0이 되는  $\omega$ 를 찾는다.

그림 2는 회전체 회전수  $\Omega=0$ 일 때, 각 고유진동수에서 계산된 고유모우드를 보여준다. 이들 고유모우드에 해당하는 고유진동수는 축 회전수  $\Omega$ 에 따라 변하는데, 자이로스코프의 stiffening 효과에 의하여 고유진동수의 상승이 발생한다. 이들의 변화를 표2에서 볼 수 있다. 고유진동수에 대응하는 고유모우드는 거의 변화없는 특징을 보여주었다.

토오크의 증가에 따른 고유진동수의 변화를 관찰하기 위하여 표3과 표4와 같이 회전수 0과 5000rpm일 때 계산 결과를 보였다. 토오크는 고유진동수를 변화시키는 역할을 하지만, 차수에 따라 고유진동수를 높이기도, 낮추기도 하는 것을 보여준다. 표4의 값은 회전수가 커서 자이로스코프의 효과 때문에 전반적으로 상승한 값을 보여준다.

그림 3과 그림4는, 제1부터 제4까지의 각 모우드에서의 전단력과 굽힘모멘트 분포를 계산한 결과이다.

#### 5. 결 론

일반 형상을 갖는 동력전달용 다단 회전축의 고유진동 특성을 해석하기 위해, 토오크가 부여되고 회전관성과 전단변형을 고려한 원형단면 회전축의 운동방정식을 취급하였다.

다단 원형단면 봉의 고유진동 특성을 해석하기 위해, 운동방정식의 해를 그대로 사용

하였다. 4차편미분방정식의 해를 구하기 위해 복소수 변위를 사용하고 변수분리를 하여 완전미분방정식으로 표시하였다. 이 완전미분방정식의 해를 해석적으로 표시하고 다단 회전축 모형의 경계조건을 부여하여 연립 대수방정식으로 표시하여 고유진동수와 고유모우드를 계산하였다.

양단에 토오크가 부여될 때, 작은 토오크로는 고유진동의 특성에 변화가 없으나, 일정크기 이상이 되면 고유진동 특성의 변화를 감지할 수 있었다. 토오크에 의한 고유진동수는 일률적인 증가나 감소가 아니라, 차수에 따라 증가 또는 감소함을 보였다.

유한요소법과는 달리 이 연구의 방법을 사용하여 연속된 고유모우드를 구할 수 있었으며, 연속된 고유모우드로부터 전단력과 모멘트의 분포를 구하였다.

#### 참고문헌

- [1] Chong-Won Lee, Vibration Analysis of Rotors, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1993.
- [2] W. H. Beyer, CRC Standard Mathematical Tables, CRC Press, Inc., U.S.A., 1978.
- [3] 전오성 등, "배관계 진동특성에 미치는 탄성 중간지지대의 영향," 대한기계학회논문집, 제15권 제6호, 1799-1806, 1991.

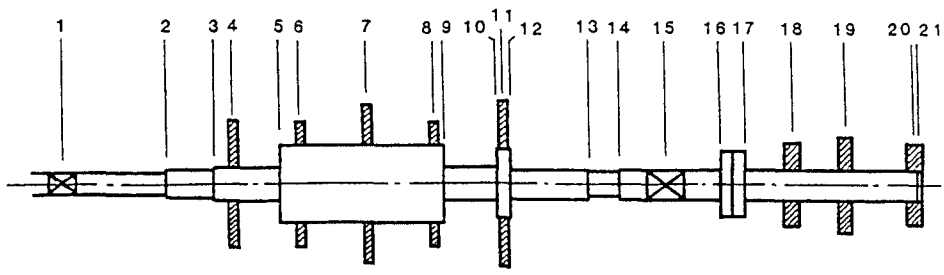


그림 1. Prohl회전체 모형.

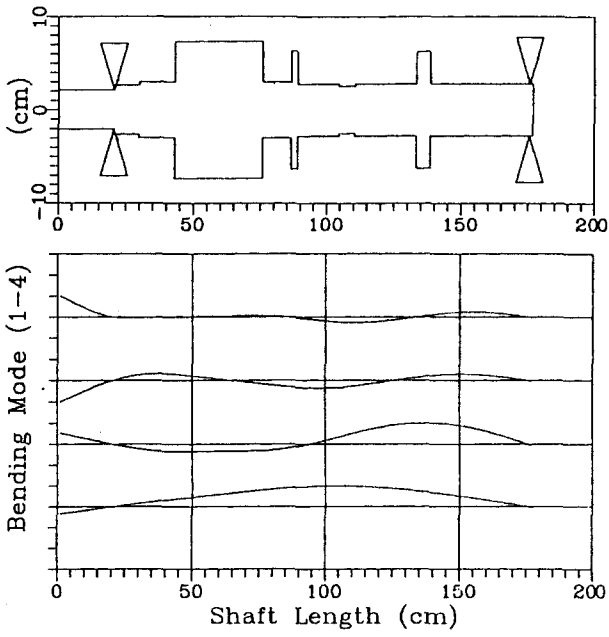


그림 2. 고유 모드.

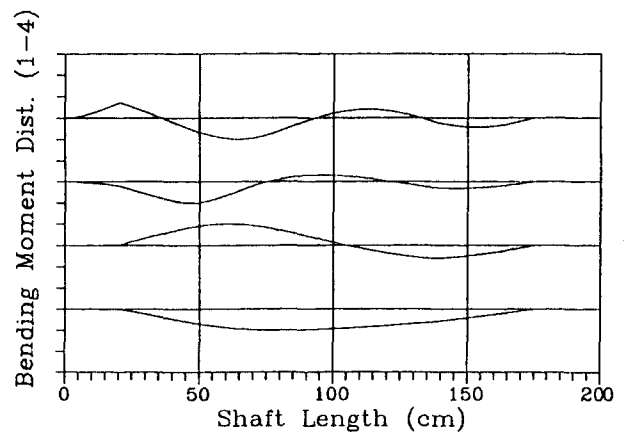


그림 4. 고유 모드에서의 굽힘모멘트 분포.

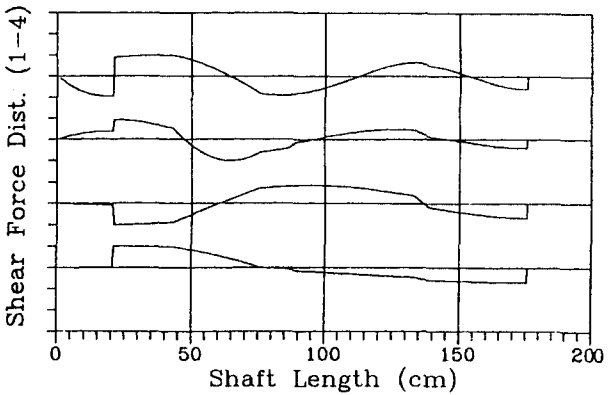


그림 3. 고유 모드에서의 전단력 분포.

표1 Prohl 회전체 세원

```

*** NO. OF SEGMENTS: 20
*** NO. OF BRGS: 2

*** ELASTICITY: .21E+07
*** GRAVITATIONAL ACC.: .98E+03
*** SHAFT DENSITY: .78E-02
*** POISSON RATIO: .290

*** NO. OF NODES: 21
*** NO. OF DIMENSION: 80

***** NODE POSITION ( 1): .000E+00
***** NODE POSITION ( 2): .206E+02
***** NODE POSITION ( 3): .298E+02
***** NODE POSITION ( 4): .338E+02
***** NODE POSITION ( 5): .430E+02
***** NODE POSITION ( 6): .471E+02
***** NODE POSITION ( 7): .605E+02
***** NODE POSITION ( 8): .738E+02
***** NODE POSITION ( 9): .757E+02
***** NODE POSITION (10): .865E+02
***** NODE POSITION (11): .878E+02
***** NODE POSITION (12): .891E+02
***** NODE POSITION (13): .105E+03
***** NODE POSITION (14): .111E+03
***** NODE POSITION (15): .120E+03
***** NODE POSITION (16): .133E+03
***** NODE POSITION (17): .138E+03
***** NODE POSITION (18): .151E+03
***** NODE POSITION (19): .161E+03
***** NODE POSITION (20): .176E+03
***** NODE POSITION (21): .177E+03

***** SHAFT RADIUS ( 1): INNER: .00 OUTER: 2.10
***** SHAFT RADIUS ( 2): INNER: .00 OUTER: 2.62
***** SHAFT RADIUS ( 3): INNER: .00 OUTER: 2.98
***** SHAFT RADIUS ( 4): INNER: .00 OUTER: 2.98
***** SHAFT RADIUS ( 5): INNER: .00 OUTER: 7.34
***** SHAFT RADIUS ( 6): INNER: .00 OUTER: 7.34
***** SHAFT RADIUS ( 7): INNER: .00 OUTER: 7.34
***** SHAFT RADIUS ( 8): INNER: .00 OUTER: 7.34
***** SHAFT RADIUS ( 9): INNER: .00 OUTER: 2.98
***** SHAFT RADIUS (10): INNER: .00 OUTER: 6.35
***** SHAFT RADIUS (11): INNER: .00 OUTER: 6.35
***** SHAFT RADIUS (12): INNER: .00 OUTER: 2.78
***** SHAFT RADIUS (13): INNER: .00 OUTER: 2.54
***** SHAFT RADIUS (14): INNER: .00 OUTER: 2.78
***** SHAFT RADIUS (15): INNER: .00 OUTER: 2.78
***** SHAFT RADIUS (16): INNER: .00 OUTER: 6.27
***** SHAFT RADIUS (17): INNER: .00 OUTER: 2.78
***** SHAFT RADIUS (18): INNER: .00 OUTER: 2.78
***** SHAFT RADIUS (19): INNER: .00 OUTER: 2.78
***** SHAFT RADIUS (20): INNER: .00 OUTER: 2.78

***** NODE NO. OF BRG. LOCATION: 2
***** BEARING STIFFNESS: .10000E+15

***** NODE NO. OF BRG. LOCATION: 20
***** BEARING STIFFNESS: .10000E+15
    
```

표2 회전수  $\Omega$ 에 따른 고유진동수 변화 ( $T=0$ )

spin (rpm)	Natural Frequencies (rpm)				
	1th	2th	3th	4th	5th
0	2184.084	10487.303	22285.099	35450.419	43544.918
1.000	2188.325	10489.599	22323.383	35474.033	43598.814
2.000	2192.571	10491.894	22361.711	35497.576	43652.893
3.000	2196.822	10494.190	22400.083	35521.048	43707.156
4.000	2201.079	10496.486	22438.496	35544.451	43761.602
5.000	2205.341	10498.783	22476.952	35567.783	43816.230
6.000	2209.608	10501.079	22515.450	35591.047	43871.038
7.000	2213.880	10503.376	22553.988	35614.243	43926.027
8.000	2218.185	10505.673	22592.567	35637.371	43981.196
9.000	2222.440	10507.970	22631.186	35660.432	44036.543
10.000	2226.728	10510.268	22669.845	35683.428	44092.068
11.000	2231.021	10512.560	22708.543	35706.357	44147.769
12.000	2235.319	10514.864	22747.280	35729.222	44203.647
13.000	2239.622	10517.162	22786.055	35752.022	44259.700
14.000	2243.930	10519.460	22824.867	35774.759	44315.928
15.000	2248.243	10521.759	22863.717	35797.433	44372.328
16.000	2252.561	10524.058	22902.603	35820.044	44428.902
17.000	2256.883	10526.357	22941.525	35842.594	44485.647
18.000	2261.211	10528.657	22980.483	35865.083	44542.563
19.000	2265.543	10530.956	23019.476	35887.511	44599.649
20.000	2269.881	10533.256	23058.504	35909.880	44656.905

표3 토오크에 따른 고유진동수 변화 ( $\Omega=0 rpm$ )

Torque (kg. cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	Natural Frequencies (rpm)				
	1th	2th	3th	4th	5th
0	2184.084	10487.303	22285.099	35450.419	43544.918
100	2184.048	10487.303	22285.099	35450.419	43544.918
10.000	2184.084	10487.303	22285.099	35450.419	43533.918
1.000.000	2184.085	10487.305	22285.087	35450.392	43544.904
100.000.000	2217.527	10571.934	21767.093	34331.369	43047.429

표4 토오크에 따른 고유진동수 변화 ( $\Omega=5,000 rpm$ )

Torque (kg. cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	Natural Frequencies (rpm)				
	1th	2th	3th	4th	5th
0	2205.341	10498.783	22476.952	35567.783	43816.230
100	2205.341	10498.783	22476.952	35567.783	43816.230
10.000	2205.341	10498.783	22476.952	35567.783	43816.230
1.000.000	2205.342	10498.784	22476.941	35567.756	43816.216
100.000.000	2238.501	10583.787	21952.424	34434.484	43342.314