

## 금형의 열탄성변형 해석과 취성결함에 관한 연구

여은구\*, 이용신\*\*, 김엽래\*\*\*

\*국민대학교 기계설계과 대학원

\*\*국민대학교 기계공학과

\*\*\*경민전문대

### The Thermal-Elastic Analysis of Die Deformation for Forging Processes and Study of Brittle Damage

E.G. Yoh, Y.S. Lee, Y.R. Kim

#### I. 서 론

금형의 탄성변형은 최종 제품의 치수에 영향을 미치므로 금형 설계에 있어서 중요한 고려사항이 된다. 또한 금형의 마멸과 응력집중 등이 국부적으로 생기기 쉽고 금형에 탄성변형이 생겨 정밀제품을 생산하기 어려운 경우도 발생할 수 있다. 그러므로 금형의 응력집중을 예측하고 금형의 탄성변형을 적게 하도록 하는 것이 정밀도를 유지하고 금형의 수명을 연장하는데 중요한 고려사항이 되는 것이다.

금형의 수명은 마멸과 파괴에 의해 크게 제한을 받는다. 즉 응력집중(stress concentration)으로 인한 금형마모로 금형의 치수오차가 생겨 수명을 다하는 경우와 피로균열의 성장으로 발생하는 피로파괴로 구분할 수 있다. 따라서 단조공정의 개선 및 소재의 결함 방지 등을 위해서는 금형의 설계 및 가공에 대한 연구가 필수적이며, 시험가공 이전에 컴퓨터를 이용한 모델링을 사용하여 신속히 금형을 평가하고 최적화하는 것이 필요하다. 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하는데 현재까지 가장 널리 사용되고 있는 방법 중의 하나가 유한요소법(F.E.M)이다. 본 연구에서는 열탄성 유한요소법을 사용하여 일체형 단조금형의 탄성변형해석을 하고, 이를 통하여 온도분포, 변형률분포, 응력분포를 시뮬레이션한다. 금형변형해석을 위해서는 필연적으로 소재변형해석이 선행되

어야 하며 그 결과를 통해서 소재와 금형과의 접촉면으로 부터 경계조건을 설정할 수 있다. Mori<sup>[1]</sup>와 Rystad<sup>[2]</sup>는 소재와 금형의 접촉면에 각 절점을 맞추어주기 위해서 격자 재생성을 하였고 Yoon<sup>[3]</sup>은 접촉면에 표면력을 넘겨주는 방법을 제안하였다. 추가로 본 연구에서는 시뮬레이션 프로그램이 생산 현장에서 쓰여질 수 있는 현실적인 도구가 되기 위해서 손쉬운 입력장치와 출력장치가 필수불가결하기때문에 간단한 형태의 사용자 편의 위주 알고리즘을 이용하여 개인용 컴퓨터(PC)에서 작동할 수 있는 프로그램을 제안하고자 한다. 또한 금형의 탄성변형중에 발생하는 결함해석을 위한 기초연구로 Krajcinovic<sup>[4]</sup>가 제안한 취성결함모델을 가지고 가상일의 원리를 이용한 유한요소정식을 유도하였다.

#### II. 유한요소 열·탄성 응력해석

##### 2-1 유한요소 정식화

###### (1) 열전도 해석

에너지보전으로 부터 등방성 재료의 열전도 지배 방정식은

$$\rho \dot{e} + \nabla \cdot \mathbf{q} = \dot{Q} \quad (1)$$

재료가 정상 상태이고 내부 열원이 없는 경우

지배 방정식은

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2)$$

$$\int_V N_i \mathbf{k} \nabla^2 \theta \, dv = 0 \quad (3)$$

(3)식은  $\theta$ 의 2차 미분을 포함하므로 이를 근사화할 경우 형상함수는 적어도 2차함수 이상이어야 한다. 이와 같은 제한 조건을 완화하기 위하여 (3)식은 부분적분법과 Gauss정리를 이용하여 weak form을 만든다. 결국 형상함수는 1차 미분만을 가지므로 1차함수를 가져도 되는 조건으로 된다.

경계에서의 열전도는

$$q_n = -k \frac{\partial \theta}{\partial n} \quad (4)$$

경계에서의 열대류는

$$q_n = hA(\theta - \theta_\infty) \quad (5)$$

여기서

$h$  : convective heat transfer coefficient

$\theta$  : the temperature of the boundary surface

$\theta_\infty$  : the temperature of the surrounding fluid

위식들을 정리하여 유한요소정식으로 나타내면

$$[K_T] \{ \theta \} = \{ F_\theta \} \quad (6)$$

여기서

$$[K_T] = [K_{cd}] + [K_{cv}] \quad (7)$$

$$\{ F_\theta \} = \{ F_{se} \} + \{ F_{se} \} \quad (8)$$

(8)식의 우측항은 다음과 같이 두항의 합으로 나타난다.

$$\{ F_{se} \} = h \int_{se} [N_i]^T \theta_\infty \, ds \quad (9)$$

$$\{ F_{se} \} = k \int_{se} [N_i]^T \frac{\partial \theta}{\partial n} \, ds \quad (10)$$

(2) 열응력 해석

열탄성 구성 방정식은

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (11)$$

여기서,  $\lambda, \mu$ 는 Lamé 상수

$\alpha$ 는 선형 열팽창 계수

$\Delta T$ 는 기준온도에 대한 온도 상승량

식 (11)에서 우변 첫째항과 둘째항은 외부 하중이 주어지는 경우와 동일한 Hook 법칙이고 세번째는 온도 상승으로 인한 변형에 관련된 식이다. 위식을 축대칭 해석의 경우에 관한 행렬식으로 쓰면

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} - \frac{E \alpha \Delta T}{1-2\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

혹은,

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \} - \{ \sigma_0 \} \quad (13)$$

선형탄성체에 대한 변위-변형을 관계는 다음식으로 표시할 수 있다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (14)$$

최소 포텐셜에너지 법칙을 이용하기 위하여 구하는 총 변형을 에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_V ( \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_T + \boldsymbol{\epsilon}_T^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{d} + \boldsymbol{\epsilon}_T^T \mathbf{B} \boldsymbol{\epsilon}_T ) \, dv \quad (15)$$

(15)식의 우변 첫째항은 기계적 하중에 대한 변형에너지이고, 둘째와 셋째는 열변형에너지이며, 넷째항은 상수이다. 최소 포텐셜 에너지법에 의해서 (6)식의 형태로 만들면

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dv \, \mathbf{d} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_T \, dv \quad (16)$$

간략히 행렬식으로 표현하면

$$[K] \{ \mathbf{d} \} = \{ \mathbf{F}_T \} \quad (17)$$

위식과 같은 유한요소정식을 얻을 수 있다.

위식에서

$$[K] = 2\pi \int_V [B]^T [D] [B] r \, dr \, dz \quad (18)$$

$$\{ \mathbf{F}_T \} = 2\pi \int_V [B]^T [D] \{ \boldsymbol{\epsilon}_T \} r \, dr \, dz \quad (19)$$

본장에서 전개한 축대칭 열탄성해석은 급형의 열전달을 고려하였고 이에따라 유한요소해석 프로그램은 열전달과 열탄성해석을 병합하여 개발되었다.

## 2-2 소재변형과의 연계해석, 경계조건

금형에 주어지는 응력과 온도 등의 경계조건을 알기 위해서는 소재변형의 유한요소해석이 우선 되어져야 한다. 이와같은 금형과 소재의 접촉면에 위치한 각 절점들에 대한 응력 성분들이 계산되어지면 보간함수를 통하여 소재면에서의 표면력을 계산할 수 있다. Table.1 에서는 단조성형 중인 소재의 소성변형해석과 금형의 탄성변형과의 연계해석시에 수행되어야 할 알고리즘을 보여주고 있다. 소재면의 절점 표면력을 금형면의 절점 표면력으로 보간하는 알고리즘은 다음과 같다.

- 1단계 : 접촉된 소재요소내에 존재하고 있는 금형의 노드점을 찾는다.
- 2단계 : 접촉된 소재요소의 절점 표면력(traction)값에 대한 선형화를 통해서 1단계에서 찾은 절점 표면력값을 계산한다.
- 3단계 : 금형요소의 절점 표면력값을 절점력 벡터값으로 변환한다.

## III. 탄성결합

미시적으로 재질의 내부를 검사해 보면 미세결합들이 불균일하게 존재하고 있음을 알 수 있지만, 이들을 거시적으로 생각하여 대략적으로 결합들이 균일하게 분포되어 있다고 가정하는 것이 연속체결합역학의 기본 출발점이다.

즉, 미세결합들의 효과를 거시적으로 반영하는 내부상태변수로 표시함으로써 결합을 해석하고자 하는 것이다. 본 연구에서는 취성재료의 탄성결합에 관하여 Krajcinovic와 Fonseka가 제안한 결합모델을 가지고 유한요소정식을 유도한다.

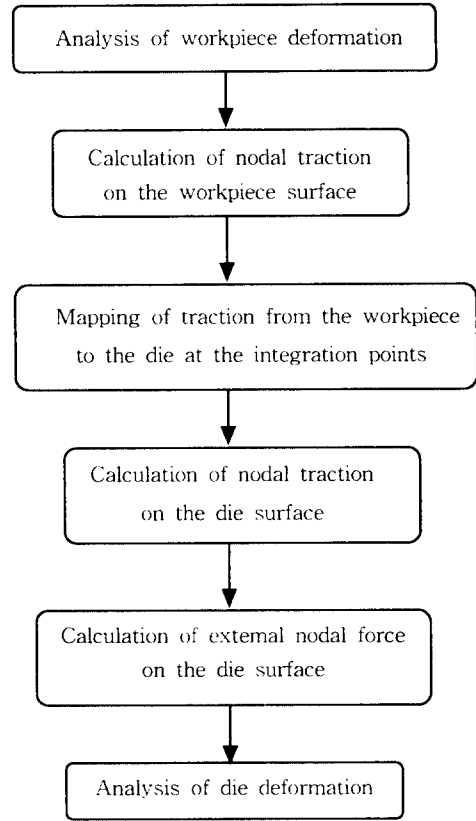


Table. 1 Flow chart for transfer of traction from the workpiece to the die.

## 3-1 해석모델

결합변수로는 재질내에 평면 동전모양의 미소결합이 존재하고 있다고 가정하였고 이러한 결합의 기하학적정의를 벡터  $\mathbf{D}(\mathbf{X}, \theta)$ 로 표시한다. 취성재료의 미소변형에 대한 Helmholtz 자유에너지는 결합벡터  $\mathbf{D}$ 와 탄성변형텐서  $\boldsymbol{\varepsilon}$ 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\varepsilon}_{KK}\boldsymbol{\varepsilon}_{LL} - \mu(\boldsymbol{\varepsilon}_{KK}\boldsymbol{\varepsilon}_{LL} - \boldsymbol{\varepsilon}_{KL}\boldsymbol{\varepsilon}_{LK}) + \bar{C}_1 D_K^{(\alpha)} \boldsymbol{\varepsilon}_{KL} D_L^{(\beta)} \boldsymbol{\varepsilon}_{MM} + \bar{C}_2 D_K^{(\alpha)} \boldsymbol{\varepsilon}_{KL} \boldsymbol{\varepsilon}_{LM} D_M^{(\beta)} \quad (20)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots)$$

여기서  $\bar{C}_i = C_i(\mathbf{X}_1, D_K D_K, t)$ 는 스칼라값의 재료 매개변수이고  $\rho$ 는 질량밀도이다. Lamé 상수  $\lambda$ 와  $\mu$ 는 온도  $t$ 와 결합벡터  $D_K$ 에 의존

하고 있다. 등은과정에서 응력식은

$$\sigma_{IJ} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{IJ}} \quad (21)$$

(20)식과 (21)식으로 부터

$$\sigma_{IJ} = K_{IJKL} \varepsilon_{KL} \quad (22)$$

여기서 단순 결함장 ( $\alpha = \beta = 1$ )일 경우

$$\begin{aligned} K_{IJKL} = & \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} + 2\mu \delta_{IK} \delta_{JL} \\ & + \bar{C}_1 (\delta_{IJ} D_K D_L + \delta_{KL} D_I D_J) \\ & + \bar{C}_2 (\delta_{JK} D_I D_L + \delta_{IL} D_J D_K) \end{aligned} \quad (23)$$

이러므로 (23)식의 응력은 D의 2차함수이다.

재료결함벡터 D를 N방향에서의 기공률  $\omega_N$ 으로 표시하고 Kachanov의 모델과 같이 응력과 기공률의 관계가 선형이라하면 재료결함 D는 다음과 같다.

$$D = D_N N = \omega_N^{1/2} N \quad (24)$$

(23)식에 (24)식을 대입하면

$$\begin{aligned} K_{IJKL} = & \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} + 2\mu \delta_{IK} \delta_{JL} \\ & + C_1 (\delta_{IJ} \omega_K \omega_L + \delta_{KL} \omega_I \omega_J) \\ & + C_2 (\delta_{JK} \omega_I \omega_L + \delta_{IL} \omega_J \omega_K) \end{aligned} \quad (25)$$

여기서  $C_i(\omega_N, t) = \frac{\bar{C}_i(t)}{\sqrt{\omega_P \omega_P}}$  이고,  $\bar{C}_i(t)$ 는

재료상수이다. 응력변형률관계식의 증분형은 (2)식을 미분함으로 구할 수 있다.

$$d\sigma_{IJ} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{IJ} \partial \varepsilon_{KL}} d\varepsilon_{KL} + \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{IJ} \partial D_M} dD_M \quad (26)$$

(26)식을 정리하면

$$d\sigma_{IJ} = K_{IJKL} d\varepsilon_{KL} + \bar{K}_{IJM} d\omega_M \quad (27)$$

### 3-2 유한요소법

선형운동량 보존식으로부터 구해진 가상일률범함수는 다음과 같다.

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv - \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0 \quad (28)$$

여기서 (22)식을 구성방정식으로 하여 유한요소 정식화 과정을 거쳐 위의 식으로 부터 아래와

같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[D] \{u\} = \{F\} \quad (29)$$

여기서,

$$[D] = \int_V [N']^T [K] [N'] dV \quad (30)$$

$$\{F\} = \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (31)$$

윗식에서 [N]는 형상함수의 행렬이고, [K]는 결함함수가 포함된 구성행렬로서 변형률에 따라 결함함수가 변함으로 비선형을 일으킨다. 따라서 (29)식의 근사해는 Newton-Raphon법을 사용하여 구한다.

## IV. 응용

### 4-1 일체형 단조금형해석

본 연구에서 사용된 일체형 단조금형은 축대칭 형상이므로 전체 모델중의 1/2 단면만 해석하였다. 단조금형에 작용하는 분포하중은 소재에 대한 유한요소해석을 통하여 얻은 절점력으로부터 얻을 수 있는데, 소재의 유한요소 격자와 금형의 격자가 경계면에서 일치하지 않기 때문에 절점력을 금형 격자에 보간함으로써 금형에 작용하는 표면력을 얻을 수 있다. 본 연구에서는 소재와 접촉되는 부위의 접촉력은 일정한 것으로 가정하였다.

본 연구에 사용된 단조금형의 재료는 열간해석 시에는 STD6을 사용했고, 냉간시에는 STD11을 사용하였다. 각 소재의 물성치는 Table 2에 주어졌다. 열간단조의 경우 접촉부위의 열유속값은  $1000 \text{ w/m}^2$  이 일정하게 작용한다고 가정하였다. 금형의 열탄성해석을 위하여 소재의 변형정도를 3단계로 나누어 각 단계들을 정상 상태로 가정하고 차례로 해석하였다. Fig. 3-4에서는 단조공정이 시작될때에 금형에 발생하는 변위와 각 변형률성분들( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ )과 유효변형률, 유효응력의 분포를 보여주고 있다.

Table 2. Mechanical Properties of Die

KS (JIS,ASTM)	STD6 (SKD6,H11)	STD11 (SKD11,D2)
Modulus of Elasticity(GPa)	210	207
Poisson's ratio	0.3	0.3
Thermal Expansion ( $\mu\text{m}/\text{m} \cdot \text{K}$ )	13.5	10.5
Thermal Conductivity ( $\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ )	24.7	

일반적으로 소재와의 접촉부 근처에서 z방향은 압축을, r방향은 그에대한 보상으로 인장을 나타내고 있다. 초기에는  $\theta$  방향은 상대적으로 변형률이 작으나 성형이 진행되어감에 따라 커지는 것을 볼 수 있었다. 상당변형률과 상당응력의 분포는 예상되는 바와같이 거의 같고 접촉부경계와 코너지점에서 크게 나타나는 것을 보여주고 있다. 변위분포가 전반적인 z방향의 압축성형에도 불구하고 소재를 파고드는 변위를 보여주는 것은 온도에 의한 영향으로 냉간단조성형과는 다르게 나타나고 있다. 온도분포는 축대칭 중심부에서 바깥쪽으로, 소재와의 접촉부에서부터 먼곳으로 온도가 낮아지는 경향을 보여주고 있으며, 이와같은 현상은 유사단조공정에서 일반적으로 관측되고있는 타연구에서 예측되는 온도특성과 같다.

같은 공정을 상온에서 시행했을 때 마지막 단계에서의 시뮬레이션 결과를 보면 온도의 영향이 없는 관계로 소재와 접촉부에서 축방향으로 양의 변위가 없으며 또한  $\epsilon_2$ 는 전체적으로 음의 값을 갖는 것을 보여주고 있다.

#### 4-2 전방압출 금형해석

본 연구의 두 번째 예제인 전방압출공정 또한 축대칭 형상이므로 전체 모델중의 1/2 단면만 해석하였다. 경계조건에 대한 가정은 첫 번째와

같고, 냉간성형에서의 소재가 최종의형상을 갖는 순간에서 금형의 탄성변형을 해석하였다.

전방압출금형의 재료는 STD11을 사용하였고 소재의 물성치는 Table 2에 주어졌다.

Fig. 5에서는 축대칭 전방압출 금형의 유한요소격자와 소재가 금형을 벗어나 정상상태에 이르렀을 때 변위분포, 변형률 성분들( $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_z$ ,  $\epsilon_\theta$ )의 분포, 상당변형률 및 상당응력의 분포를 보여주고 있다. 컨테이너 압출의 경우에는 소재가 금형의 변형지역에 들어가기 이전에 이미 반경방향의 압축변형을 받고 변형지역에서 모든 형상변화를 이루게 된다. 이에따라 금형의 변형도 컨테이너로부터 변형지역에 이르기 까지 출구이전에서 보다 크게 나타나는 것을 보여주고 있다. 금형의 변형이 가장크게 나타나는 부분은 금형의 입구 즉 변형지역이 시작되는 곳이며, 이 근처에 응력집중현상이 있게될 것을 예상할 수 있다. 이와같은 현상은 이미 문헌에 보고되고있는 변형특성과도 일치한다.

## V. 결론

단조금형의 자동설계 기술개발의 일환으로 금형설계 자동화의 주요역할을 하는 금형의 탄성변형 해석 프로그램을 개발하였다. 본 연구로 개발된 프로그램은 금형의 열전달해석과 열·탄성변형해석기능을 갖추었고, 공정해석과의 연계해석을 위한 준비단계로 접촉부의 표면력을 보간을 통해 질점력으로 전환하는 기능을 갖추었다. 전후처리과정과의 통합을 위한 준비 단계로 간단한 전후처리과정을 금형 변형 해석과 더불어 Windows 상에서 수행할 수 있는 체제를 갖추었다. 개발된 프로그램을 통상의 축대칭 열간 및 냉간단조, 냉간전방압출 등의 금형 변형 해석에 응용하

여 변형률분포, 응력분포 및 온도분포를 구하였다. 예측된 변형특성의 타당성으로 개발된 프로그램의 신뢰성을 검증할 수 있었다. 또한 취성 결함모델을 이용하여 비선형탄성결함해석을 하기 위한 유한요소법 프로그램을 개발하였다.

참 고 문 헌

1. K.Mori, K.Nakadoi and M.Fukuda, Coupled analysis of steady state forming process with elastic tools. Proc. NUMIFORM '86 Conf., Gothenburg, pp.237-242(1986)
2. H.Rystad and C.R.Boer, Forging of an axisymmetrical shape-Modelling of material flow, die loads and die stresses using FEM. Proc. NUMIFORM '86 Conf., Gothenburg, pp.283-286(1986)
3. J.H.Yoon, N.K.Lee, D.Y.Yang, Treatment of contact traction at the die-workpiece interface for the elastic analysis of die deformation, Int. J. Mech. Sci. Vol.34, No 9, pp 689-702(1992)
4. D.Krajcinovic, G.U.Fonseka, The Continuous Damage Theory of Brittle Materials-Part 1,2, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.48, pp.809-815 and pp.816-824(1981)
5. Daryl L. Logan, A First Course in the Finite Element Method, PWS Publishing Company, pp 362-381(1993)
6. Fortran 90, User's Guide, Lahey Computer system Inc.(1996)

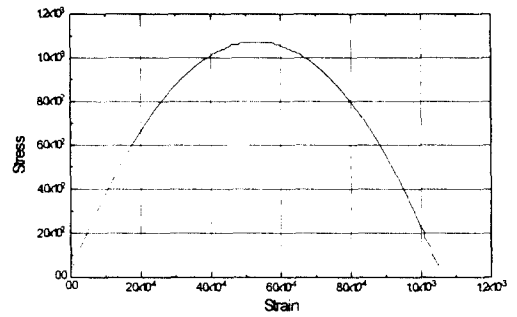


Fig. 2 Stress-strain curves uniaxial tension

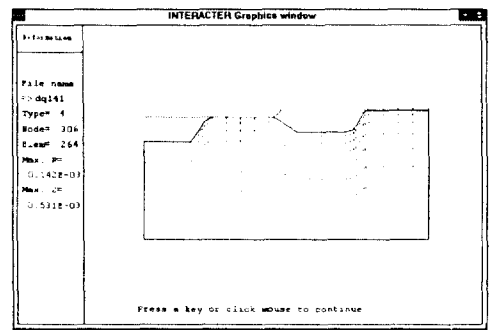


Fig. 3 Distribution of displacement

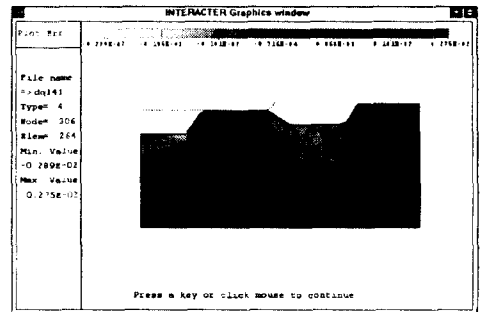


Fig. 4 Strain(ε) distribution

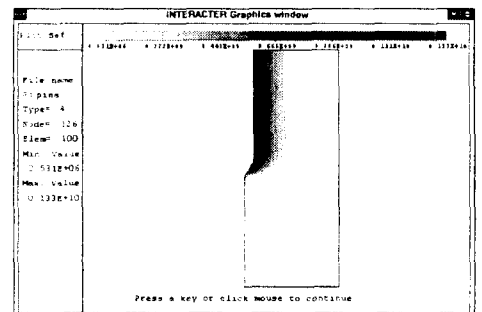


Fig. 5 Effective stress(σ) distribution