

여유 자유도 로봇과 비 여유 자유도 로봇의 조작도 해석상의 차이점에 관한 연구

A Study on the Difference on the Manipulability for
Redundant and Nonredundant Robot Manipulators

이영일*, 이지홍

메카트로닉스 공학과, 충남대학교

e-mail: jhlee@meca.chungnam.ac.kr

Abstract Kinematically redundant manipulators have a number of potential advantages over nonredundant ones. Questions associated with manipulability measures for (non)redundant manipulators derived by minimum 2-norm solution and minimum infinity-norm solution in unit joint velocity are examined in detail.

Keywords: Manipulability, Redundant, Nonredundant, Minimum 2-norm solution, Minimum infinity-norm solution

1. 서론

로봇의 관절 속도가 제한되어 있을 때 허용 가능한 작업 속도 공간에 대한 분석은 중요하다. 이에 대한 잘 개발된 도구는 조작도 타원과 조작도 다면체이다. 조작도 타원은 단위 관절 속도 공간이 $\|\dot{q}\|_2 = \dot{q}^T \dot{q} \leq 1$ (L_2 영역)에 의해 기술되는 영역으로 부터 허용 가능한 작업 속도 공간의 영역이 유도되었으므로 작업 공간 속도의 허용 영역을 정확히 기술하지 못하나 전체적인 분석을 쉽게 할 수 있는 장점이 있다[1,2]. 반면 다면체의 경우에 있어 단위 관절 속도 공간 $|\dot{q}_i| \leq 1, i=1, \dots, n$ (L_∞ 영역)에 의해 기술되는 영역으로 허용 가능한 작업 속도 공간이 유도되었으므로 허용 가능한 작업 속도 공간을 정확히 기술하나 여유 자유도 로봇인 경우에 이를 기술하는 것은 복잡하다[9].

따라서, 본 논문에서는 여유 자유도 로봇인 경우 허용 가능한 작업 속도 공간 영역인 조작도 다면체와 단위 관절 속도 공간 사이에 관계를 비 여유 자유도 로봇의 경우와 비교하여 분석한다. 여유 자유도 로봇은 비 여유 자유도 로봇과 달리 임의의 작업 속도에 해당하는 관절 속도의 해는 무한히 많다. 이때, 단위 관절 속도 벡터의 2-norm을 최소화하는 해는 의사 역행렬을 이용하여 구하는데 이는 조작도 타원을 유도하는데 쓰인다. 또한, 이 단위 관절 속도 벡터 중에서 최대 단위 관절 속도를 크기를 조절하여 작업 속도 허용 범위를 구한다.

반면, 단위 관절 속도 벡터의 무한대 norm을 최소화하는 해는 단위 관절 속도와 작업 공간의 다면체 사이의 기하학적인 관계로 부터 구할 수 있으며, 이는 관절 속도가 제한되어 있을 때, 최대 작업 공간 속도를 낼 수 있는 단위 관절 속도임을 보였다. 또한 무한대 norm의 단위 관절 속도의 해를 실시간으로 구할하고 [7,8], 최대 관절 속도의 크기를 조절하여 최대 허용 작업 속도의 크기를 구하였다. 또한, 평면 3자유도 로봇에 적용하여 최소 2-norm 단위 관절 속도일 때 최대 허용 작업 속도와 최소 무한대 norm 단위 관절 속도 일때 최대 허용 작업 속도를 서로 비교하였다.

2. 조작도 도형

먼저, n 개의 회전 관절을 갖는 로봇이 m 차원의 작업 공간에서 작업을 하고 있을 때 이 로봇의 정기구학식을 다음과 같이 나타내기로 하자.

$$X = f(q) \tag{1}$$

여기서, X 는 m 차원의 작업 공간 벡터로서 작업기의 위치 및 회전량 정보를 갖고 있으며 $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 는 관절 각도 벡터이다.

(1)을 미분하면,

$$V = \dot{X} = J(q) \dot{q} \tag{2}$$

가 얻어지는데 V 와 $J(q)$ 를 각각 작업 공간 속도 벡터, Jacobian이라 부르기로 한다. 각 관절 최대 허용 속도는 서로 다르게 제한되어 있는 일반적인 경우, 각 관절 속도의 허용 범위를 수식으로 표현하면 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$|\dot{q}_i| \leq \dot{q}_{i,max}, \quad i=1, 2, \dots, n \tag{3}$$

이때, 단위 관절 속도를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{q} = [\dot{q}_1 / \dot{q}_{1,max}, \dot{q}_2 / \dot{q}_{2,max}, \dots, \dot{q}_n / \dot{q}_{n,max}]^T \tag{4}$$

먼저, 단위 관절 속도와 작업 공간 속도의 변환 관계를 유도하기 위해 위 식을 행렬식으로 표현하면,

$$\dot{q} = R^{-1} \dot{q} \tag{5}$$

$$R = \text{diag}(\dot{q}_{1,\max}, \dot{q}_{2,\max}, \dots, \dot{q}_{n,\max}) \quad (6)$$

가 되는데, 여기서 $\text{diag}()$ 는 대각선 행렬로서 괄호 안의 요소를 대각선 요소로 갖는 행렬이다. 그러면, (6)을 이용하여 (2)를 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$V = J\dot{q} = (JR)\dot{\tilde{q}} = \tilde{J}\dot{\tilde{q}} \quad (7)$$

위 식에서 단위 관절 속도와 작업 공간 속도의 변환 관계를 나타내는 수정된 자코비안 \tilde{J} 를 가중치 자코비안이라 부르기로 한다.

2.1 조작도 타원

일반적으로 관절 속도 공간과 작업 속도 공간이 같은 비여유 자유도 일 경우 역행렬에 의해 관절 속도를 구한다. 그러나 관절 속도 공간이 작업 속도 공간 보다 큰 여유 자유도 일 경우 영 공간 속도에 의해 작업 속도 공간에 해당하는 관절 속도 공간의 해는 무한개가 존재한다. 이때 작업 속도 공간의 조작도 타원을 유도하기 위해 (7)로부터 최소 2놈을 갖는 단위 관절 속도를 의사 역행렬 J^+ 을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$\dot{\tilde{q}}^+ = J^+ V \quad (8)$$

그러면, 타원의 식을 유도하기 위한 단위 관절 속도 공간의 영역은 다음과 정의된다.

$$\|\dot{\tilde{q}}^+\| \equiv \dot{\tilde{q}}^{+T} \dot{\tilde{q}}^+ \leq 1 \quad (9)$$

2.2 최소 2놈 단위 관절 속도 해에 의한 조작도 다면체

타원에 의한 방법은 단위 관절 속도 벡터의 2놈의 크기가 1보다 작은 영역에서 유도되었으므로 모든 방향에 있어 단위 각 관절 속도가 최대일 때 즉 단위 관절 속도가 한 개 이상이 최대인 경우에서 유도된 것이 아니다. 따라서 (8)에서 구한 단위 관절 속도 중에서 최대인 것을 다음과 같이 정의하면

$$\begin{aligned} \gamma &= \max(|\dot{\tilde{q}}_i / \dot{q}_{i,\max}|), \quad 1 \leq i \leq n \\ &= \max(|\dot{\tilde{q}}_i|) \end{aligned} \quad (10)$$

임의의 작업 속도 벡터 V 방향으로 최대 허용 속도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{X} = \gamma^{-1} V \quad (11)$$

(11)를 이용하여 작업 속도 공간의 모든 방향으로 최대 허용 영역을 구하면 다면체를 형성하게 된다.

2.3 최소 무한대 놈 단위 관절 속도의 의한 조작도

다면체

이 절에서는 허용 관절 속도 공간의 영역을 정확히 기술하고 이에 해당하는 작업 공간 속도의 영역을 구하므로 조작도를 결정하는 정확하고 실제적인 방법을 기술한다. 이를 위해 먼저, 단위 관절 속도와 작업 공간 속도의 변환 관계를 나타내는 (7)을

다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} V &= [J_1 \ J_2 \ \dots \ J_n] [\dot{\tilde{q}}_1 \ \dot{\tilde{q}}_2 \ \dots \ \dot{\tilde{q}}_n]^T \\ &= \dot{\tilde{q}}_1 J_1 + \dot{\tilde{q}}_2 J_2 + \dots + \dot{\tilde{q}}_n J_n \end{aligned} \quad (12)$$

위 식에서 J_i 는 J 의 i 번째 열 벡터이고, V 는 $|\dot{\tilde{q}}_i| \leq 1$ 에 의해 주어지는 계수를 갖는 J 의 열 벡터 선형 조합으로 해석할 수 있다. 그림 1은 단위 관절 속도 공간이 3이고 작업 속도 공간이 2일 때 다면체 형성의 예를 보여준다. 단위 관절 속도 공간의 모서리 부분 중에서 진하게 표시된 부분이 작업 속도 공간에서 경계 영역이 되며, 단위 관절 속도 공간의 어두운 부분은 최소 무한대 놈 단위 관절 속도 해를 만족하며 작업 속도 공간의 어두운 부분의 해이다. 또 작업 속도 공간의 다면체의 전 영역을 만족하면서 최소 무한대 놈의 해를 갖는 영역은 단위 관절 공간의 어두운 부분처럼 원점과 진하게 표시된 각 모서리로 이루어지는 영역들이다.

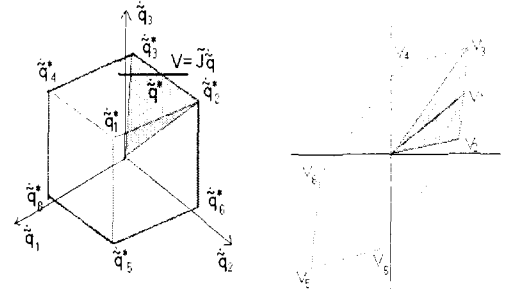


그림 1 단위 관절 속도 공간과 작업 속도 공간에서의 다면체의 형성.

작업 속도 공간에서 하부평면(bottom plane) 또는 모서리로 이루어지는 경계는 다음과 같이 표현되며,

$$V = \sum_{k=1}^m \lambda_k V_{k*} \quad (13)$$

매개 변수 λ_k 는 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1 \quad (14)$$

이때 작업 속도 (V)를 만족하는 단위 관절 속도는 다음과 같이 쓸 수 있으며,

$$\dot{\tilde{q}}^* = \sum_{k=1}^m \lambda_k \dot{\tilde{q}}_{k*} \quad (15)$$

이 해는 단위 관절 속도의 최소 무한대 놈 (L_∞)을 만족하는 해이며 이는 무한대 놈의 정의인 다음 식을 최소화한다.

$$\|\dot{\tilde{q}}^*\|_{\infty} = \max\{|\dot{\tilde{q}}_i^*|\}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (16)$$

3. 여유 자유도와 비 여유 자유도 로봇의 조작도 도형의 비교

3.1 조작 도형들의 해석상 차이점

본 절에서는 앞 장에서 구한 단위 관절 속도의 최소 2놈의 해로부터 구한 조작도 다면체와 최소 무한대 놈의 해로부터 구한 조작도 다면체의 관계를 알아본다.

정리 1: 최소 2놈 단위 관절 속도의 해로부터 구한 조작도 다면체는 최소 무한대 놈 단위 관절 속도 해로부터 구한 조작도 다면체의 내부에 존재하게 된다.

[증명] 임의의 작업 속도 V 가 주어질 때 (8)에 의한 최소 2놈 단위 관절 속도 해가 $\hat{q}^+ = [\hat{q}_1^+, \hat{q}_2^+, \dots, \hat{q}_n^+]^T$ 이고 (15)에 의한 최소 무한대 놈 단위 관절 속도 해가 $\hat{q}^* = [\hat{q}_1^*, \hat{q}_2^*, \dots, \hat{q}_n^*]^T$ 라 하면 단위 관절 속도로 부터 작업 속도 V 방향으로의 허용 가능한 최대 속도를 구하기 위해 (10)과 같이 관절 속도 벡터 중에서 최대 관절 속도를 가지고 다음과 같이 각 각 정의하고,

$$\gamma_2 = \max(|\hat{q}_i^+|), \quad 1 \leq i \leq n \quad (17)$$

$$\gamma_\infty = \max(|\hat{q}_i^*|), \quad 1 \leq i \leq n \quad (18)$$

이를 (11)에 대입하면, 작업 속도 V 방향으로의 허용 가능한 최대 속도는 각 각 다음과 같다.

$$\dot{X}_2 = \gamma_2^{-1} V \quad (19)$$

$$\dot{X}_\infty = \gamma_\infty^{-1} V \quad (20)$$

위에서 정의한 γ_2 와 γ_∞ 는 (16)의 무한대 놈의 정의와 동일하다. 따라서 최소 무한대 놈의 해로부터 정의된 γ_∞ 는 무한개의 단위 관절 속도 벡터 해 중에서 무한대 놈이 최소이다. 따라서 (17)과 (18)사이엔 다음과 같은 식이 성립하므로

$$\gamma_\infty \leq \gamma_2 \quad (21)$$

작업 속도 V 방향으로의 최대 허용 속도의 크기는 다음과 같은 관계가 성립을 한다.

$$\|\dot{X}_2\| = \gamma_2^{-1} \|V\| \leq \|\dot{X}_\infty\| = \gamma_\infty^{-1} \|V\| \quad (22)$$

또, 비 여유 자유도 로봇인 경우 관절 속도의 해는 유일하게 정해지므로 식 (19)와 (20)은 같아진다. 따라서, 최소 2놈의 해와 최소 무한대 놈의 조작도 다면체는 동일한 도형이 된다.

3.2 비 여유 자유도와 여유 자유도 로봇의 조작 도형의 예

본 절에서는 2차원 상에서 작업하는 평면 3 자유도 로봇에 있어 각 조작도 도형을 서로 비교하여 본다. 로봇의 첫 번째와 두

번째 관절의 길이가 1m, 세 번째 관절의 길이가 0.5m이고 로봇의 자세가 $q = [60^\circ, -45^\circ, -90^\circ]$ 이고 최대 관절 속도의 크기가 $\dot{q}_{\max} = [1, 1, 1] \text{ rad/s}$ 일 때 작업 속도 공간에서 회전 속도를 제외한 직선 운동일 때 즉 여유 자유도 일 때와 조작도 도형과 회전 속도를 포함할 때 즉 비 여유 자유도 일 때의 조작도 도형을 그림 3에 표시하였다.

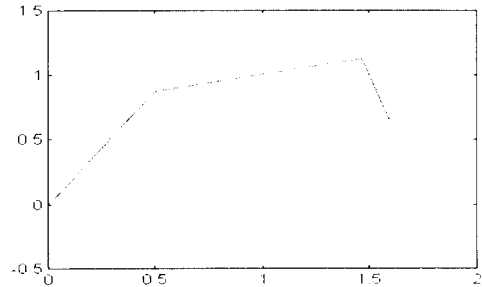


그림 2. 평면 3 자유도 로봇의 자세

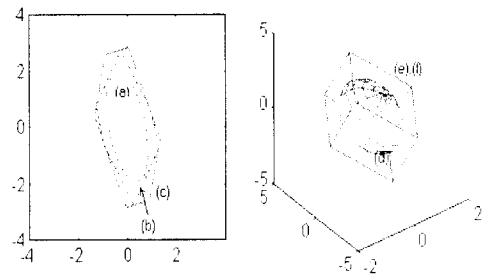


그림 3. 2차원 작업 공간상의 조작도 도형들, (a) 조작도 타원, (b) 최소 2놈 해로부터의 조작도 다면체, (c) 최소 무한대 놈 해로부터의 조작도 다면체
3차원 작업 공간상의 조작도 도형들, (d) 조작도 타원, (e) 최소 2놈 해로부터의 조작도 다면체, (f) 최소 무한대 놈 해로부터의 조작도 다면체

위 그림에서 보면 여유 자유도 일 경우 최소 2놈의 단위 관절 속도 해로부터 유도된 다면체는 최소 무한대 놈의 해로부터 유도된 다면체의 내부에 있게 된다. 이는 각 관절 속도가 제한되어 있을 경우, 최소 무한대 놈의 단위 관절 속도를 구하면 작업 공간의 모든 방향에 있어 가장 큰 속도의 크기를 가질 수 있다는 것을 말해 준다. 반면, 비 여유 자유도 일 경우 최소 2놈의 단위 관절 속도 해와 최소 무한대 놈의 해로부터 유도된 다면체는 동일한 도형이고 단위 관절 속도 공간의 해와 작업 속도 공간의 해 사이에는 1대1 관계를 가지므로 단위 관절 속도 벡터에서 한 단위 관절 속도가 1이고 나머지 단위 관절 속도가 모두 0인 방향에서 단위 구와 단위 다면체가 집합 부분이 작업 속도 공간에 있어서 다면체와 타원이 집합한다.

4. 최소 2축과 최소 무한대 축의 단위 관절 속도에 의한 최대 작업 속도의 비교

앞 장에서는 여유 자유도 로봇에서 최대 관절 속도가 제한되어 있을 때, 최소 무한대 축의 관절 속도의 해는 최소 2축의 관절 속도의 해 보다 작업 속도 공간에서 최대 속도가 큰 것을 조작도 유형의 비교를 통하여 알아보았다. 기하학적인 방법에 의해 최대 속도의 크기를 구하는 방법이 제안되어 있으나, 이는 (14)와 같이 매개 변수 λ_k 가 모두 0이상이면 집합을 찾아야 하므로 계산량이 많다.

그런데, Cadow는 이를 Primal과 Dual의 해 사이의 일치성 문제로써 최소 무한대 축의 해를 구하는데 계산량을 줄이는 반복적이며 조직적인 방법을 다루었다[7,8]. 따라서, 본 논문에서는 이를 적용하여 단위 관절 속도를 구한 후 (20)을 써서 작업 공간에서 최대 허용 속도를 쉽게 구하였다. 이제 이를 앞에서 언급한 평면의 3 자유도 로봇에 적용하여 보자. 초기 자세는 $q = [30^\circ, -50^\circ, -45^\circ]$ 이며, 최대 관절 속도의 크기가 $\dot{q}_{max} = [1, 2, 3] rad/s$ 이고 작업기가 초기 작업 위치에서 x 축의 음의 방향으로 1m 이동 시 최소 2축의 단위 관절 속도와 최소 무한대 축 단위 관절 속도 각각 작업을 할 때 작업 공간에서 최대 속도는 그림 4 와 같고 이때 로봇의 자세들은 그림 5 에 나타내었다. 시뮬레이션 결과 무한대 축에 의한 관절 속도의 해를 구하면 최대 작업 속도가 15 % 이상 향상된다는 사실을 알 수 있다.

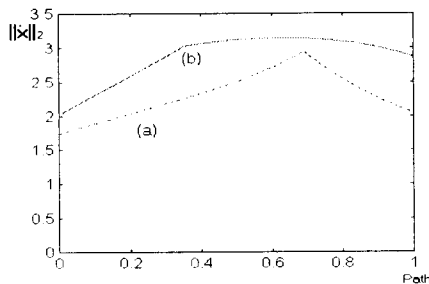


그림 4. 최대 작업 속도의 비교
(a) 최소 2축 단위 관절 속도
(b) 최소 무한대 단위 관절 속도

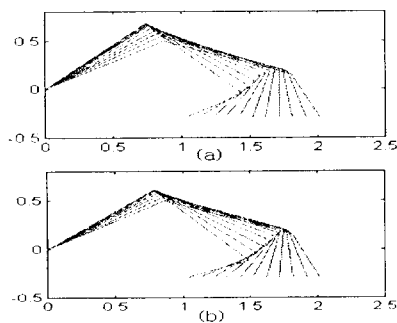


그림 5. (a) 최소 무한대 축 단위 관절 속도에 의한 로봇의 자세들
(b) 최소 2 축 단위 관절 속도에 의한 로봇의 자세들

5. 결론

본 논문에서는 관절 속도가 제한되어 있는 경우, 최소 2축 관절 속도의 해와 최소 무한대 축의 관절 속도의 해로 구할 수 허용 가능한 작업 속도의 크기를 구하는 방법을 기하학적인 의미에서 살펴보았다. 또한, 최소 무한대 축 단위 관절 속도를 실시간으로 구할 수 있는 방법을 도입하여 최대 작업 속도를 구하는 방법을 제시하였다. 끝으로, 평면 3자유도 로봇에 적용하여 최소 무한대 축에 의한 단위 관절 속도의 해가 최소 2축에 의한 관절 속도의 해 보다 더 큰 작업 허용 속도를 가짐을 보였다.

추후 연구 과제로 로봇의 동역학 조작도를 포함하여 로봇 관절의 허용 한계(관절 속도, 토오크, 가속도 등)를 넘지 않는 운동에 관하여 연구할 계획이다.

참고 문헌

- [1] T.Yoshikawa, "Analysis and control of robot manipulators with redundancy," *Robotics Research, The First International Symposium*, The MIT Press, pp.735-747, 1984.
- [2] Y. Nakamura, *Advanced Robotics, Redundancy and Optimization*, Addison Wesley, 1991.
- [3] D. R. Chand and S. S. Kapur, "An algorithm for convex polytopes," *Journal of Association for Computing Machinery*, vol.17, no. 1, pp. 78-86, 1970.
- [4] J. Lee, "Optimal configuration control for redundant robot manipulators," *Proc. of Int'l Conf. on Automation, Robotics, Control, and Vision*, Singapore, Dec. 1996.
- [5] R. V. Benson, *Euclidean geometry and convexity*, McGraw-Hill Book Company, pp.188-192, 1966.
- [6] S. L. Chiu, "Task compatibility of manipulator postures," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 7, no. 5, pp. 13-21, 1988.
- [7] A.S. Deo and I.D Walker, "Minimum infinity norm inverse kinematic solution for redundant manipulators," in *Proc. 1993 IEEE conf. Robotics Automat.*, 1993, pp. 388-394.
- [8] J.A. Cadow, "A finite algorithm for the minimum l_{∞} solution to a system of consistent linear equations," *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 10, no. 4, 1993, pp. 607-617.
- [9] 이 영일, 이 지홍, "로봇의 조작도 다면체 알고리즘", *제어계측·자동화·로보틱스연구회 합동 학술 발표회 논문집*, 1997. pp. 233 - 236.