

## 유전알고리즘을 이용한 비선형시스템의 연속시간 퍼지모델링

### Continuous-time Fuzzy Modelling of Nonlinear Systems Using Genetic Algorithms

°이현식\*, 진강규\*\*

\*한국해양대학교 대학원 제어계측공학과

\*\*한국해양대학교 자동화·정보공학부(Tel : +82-51-410-4341; E-mail : ggjin@hanara.kmaritime.ac.kr)

**Abstract** This paper presents a scheme for continuous-time fuzzy modelling of nonlinear systems, based on the model adjustment technique and the genetic algorithm technique. The fuzzy model is characterized by fuzzy "If-then" rules which represent locally linear input-output relations whose consequence part is defined as subsystem of a nonlinear system. To compute the final output and deal with the initialization and unmeasurable signal problems in on-line estimation of the fuzzy model, a discrete-time model is obtained. Then the parameters of both the premise and consequence parts of the fuzzy model are adjusted on-line by a genetic algorithm. A simulation work is carried out to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords** Fuzzy modelling, Nonlinear systems, Genetic algorithms

#### 1. 서론

일반적으로 비선형 시스템은 복잡하고 불확실하여 시스템을 해석하고 제어하기가 대단히 어렵다. 현재까지 보편적으로 이용되고 있는 비선형 시스템의 제어는 동작점 부근에서 선형화 모델을 얻고 이로부터 선형 제어를 설계함으로써 달성된다. 그러나 이 방법은 시스템의 불확실성과 동작환경의 변화에 적절히 대처하기가 쉽지 않다. 이를 해결하기 위한 한 방법으로 퍼지모델링 및 퍼지제어 기법을 이용할 수 있다[1, 2]. 퍼지제어는 불확실한 정보를 다룰 수 있을 뿐만 아니라, 제어에 관한 전문가의 경험과 지식을 언어규칙으로 표현하여 사용하기 때문에 제어대상의 모델을 필요로 하지 않는다. 그러나 퍼지제어에 있어서 문제점은 전문가의 경험으로부터 만족스러운 퍼지규칙을 얻는 것이 결코 쉽지 않으며, 전체 퍼지시스템이 비선형이 되어 안정성을 증명하기가 대단히 어렵다는 것이다.

따라서 본 연구에서는 비선형 시스템을 부분적인 선형 서브시스템으로 모델링하고 이를 퍼지규칙으로 결합하여 퍼지모델을 얻는 한 기법을 제안한다. 퍼지모델의 서브시스템으로부터 출력을 구하고, 신호계측상의 제약과 온라인 퍼라미터 추정시 신호의 초기화 문제를 해결하기 위하여 각 서브시스템의 방정식을 쌍선형 변환하여 이산화 한다. 다음 유전알고리즘을 이용하여 퍼지모델의 전건부와 후건부의 퍼라미터를 동시에 추정한다. 제안된 방법으로 퍼지모델을 얻게 되면 선형 서브시스템에 대한 선형 제어기 설계가 가능하고, 이를 결합하여 전체 시스템에 대한 안정성이 확보되는 퍼지제어기를 설계할 수 있다. 제안된 방법은 모의실험을 통하여 그 유효성을 확인한다.

#### 2. 시스템의 표현

다음과 같이 표현되는 단일 입출력 비선형시스템을 생각하자.

$$\dot{x}_p = f(\varphi_p, x_p, u) \quad (1a)$$

$$y_p = g(\varphi_p, x_p, u) \quad (1b)$$

여기서  $x_p \in \mathcal{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{R}$ ,  $y_p \in \mathcal{R}$ 는 각각 시스템의 상태벡터, 입력과 출력이며,  $\varphi_p$ 는 퍼라미터 벡터이며,  $f(\cdot) \in \mathcal{R}^n$ 는 비선형 함수벡터,  $g(\cdot) \in \mathcal{R}$ 는 선형 또는 비선형 함수이다. 주어진 시스템은 동작점 부근에서 선형화하여 선형모델을 얻을 수 있는 것으로 간주한다.

#### 3. 퍼지모델링

여기서는 시스템의 입출력 데이터를 이용하여 퍼지모델을 얻도록 한다. 그림 1은 모델 조정기법으로 퍼지모델의 퍼라미터를 추정하기 위한 구성도이다.

##### 3.1 서브시스템의 모델링

식 (1)의 국부적 입출력 관계를 나타내는 선형 서브시스템을 퍼지 규칙으로 결합한 Sugeno-Tagaki 형태의 퍼지모델[1]은 다음과 같이 표시된다.

$$L^i: \text{If } x_{p1} \text{ is } F_1^i \text{ and } x_{p2} \text{ is } F_2^i \text{ and } \dots \text{ and } x_{pn} \text{ is } F_n^i,$$

$$\text{then } A^i(p)y(t) = B^i(p)u(t) \quad (1 \leq i \leq \ell) \quad (2)$$

$$\text{단, } A^i(p) = \sum_{j=0}^n a_j^i p^j \quad (a_0^i = 1) \quad (3a)$$

$$B^i(p) = \sum_{j=0}^m b_j^i p^j \quad (3b)$$

여기서  $L^i$ 는  $i$  번째의 규칙,  $x_{p\ell}$  ( $1 \leq \ell \leq n$ )는 시스템의 상태변수,  $F_j^i$  ( $1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq n$ )는 퍼지집합,  $\ell$ 은 퍼지규칙의 수이다. 한편 후건부의 방정식에서  $p = d/dt$ 는 미분연산자,  $A^i(p)$ 와  $B^i(p)$ 는  $i$  번째 규칙의 서로소인 다항식,  $a_j^i$  ( $1 \leq j \leq n$ )와  $b_j^i$  ( $0 \leq j \leq m$ )는 미지의 퍼래미터이며,  $n$ 과  $m$  ( $n > m$ )은 각각  $A^i(p)$ 와  $B^i(p)$ 의 차수이다. 이때 후건부 방정식의 구조와 차수는 원래의 시스템으로부터 사전에 알 수 있는 것으로 간주한다.

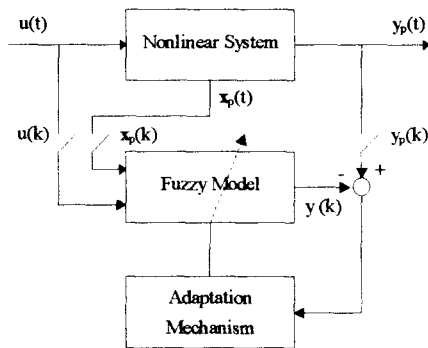


그림 1 비선형 시스템의 퍼지모델을 얻기 위한 구성도

Fig. 1 Schematic diagram for on-line fuzzy modelling of nonlinear systems

적용자로 유전알고리즘과 같은 진화알고리즘을 이용하면 모델의 퍼래미터 사이에는 선형관계가 요구되지 않으므로, 다항식 (3)은 (4)와 같이 변형하여 사용할 수 있다.

$$A^i(p) = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k^i p + \beta_k^i p^2) \quad (4a)$$

$$B^i(p) = b_0^i \prod_{k=1}^m (1 + \gamma_k^i p + \delta_k^i p^2) \quad (4b)$$

여기서  $n$ 이 짝수이면  $n' = n/2$  이고, 홀수이면  $n' = (n+1)/2$  이며 마찬가지로  $m$ 이 짝수이면  $m' = m/2$  이고, 홀수이면  $m' = (m+1)/2$  이 된다. 또한  $n$ 과  $m$ 이 홀수이면  $\beta_{n'}^i = \delta_{m'}^i = 0$  이고  $m = 0$  이면  $\gamma_m^i = \delta_m^i = 0$  이 된다. 식 (3)에서  $a_j^i, b_j^i$ 는 식 (4)의  $\alpha_k^i, \beta_k^i, \gamma_k^i, \delta_k^i$ 로부터 쉽게 얻을 수 있고 이들간의 관계식은  $\theta_j^i: \{\alpha_k^i, \beta_k^i\} \rightarrow \{a_j^i\}$  ( $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n'$ ),  $\sigma_j^i: \{\beta_k^i, \gamma_k^i, \delta_k^i\} \rightarrow \{b_j^i\}$  ( $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m'$ )로 정의된다.

적용자로서의 유전알고리즘과 함께 퍼지모델로 식 (2)와 (4)를 이용하면 모델이 항상 안정하도록 퍼래미터의 탐색범위를 정하기가 쉽고, 또한 다항식이 추정되면 이로부터 극과 영점을 손쉽게 얻을 수 있어서 제어기 설계에 직접 이용할 수 있다.

### 3.2 서브시스템의 이산화

시스템의 입출력 데이터로부터 퍼지모델의 퍼래미터들을 추정하기 위해서는 매 샘플링 마다 모델의 전체 출력이 계산되어

저야 한다. 퍼지모델의 출력은 각 서브시스템의 출력과 퍼지추론으로부터 얻게 되는데 서브시스템의 출력은 수치적분법 (Runge-Kutta 법 등) 또는 연속 방정식을 이산화하여 구할 수 있다. 일반적으로 수치적분법은 미분방정식 형태로 기술되는 서브시스템의 입출력과 그들 도함수(또는 상태변수)의 초기치를 요구한다. 이들을 모두 직접 계속하는 것은 현실적으로 매우 어려울 뿐만 아니라, 계속시 잡음의 영향을 많이 받게 된다. 따라서 본 연구에서는 연속 방정식을 이산화하여 이용한다. 식 (3)은 식 (4)로부터 쉽게 얻을 수 있으므로 이를 쌍선형 변환하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=0}^n a_j^i \left( \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^j y(k) = \sum_{j=0}^m b_j^i \left( \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^j u(k) \quad (5)$$

여기서  $T$ 는 샘플링 시간이고  $z^{-1}$ 는 후향추이 연산자이다. 식 (5)의 양변에  $\left( \frac{T}{2} \cdot (1+z^{-1}) \right)^n$ 를 곱하고 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$C^i(z^{-1})y(k) = D^i(z^{-1})u(k) \quad (6)$$

여기서

$$C^i(z^{-1}) = \sum_{j=0}^n c_j^i z^{-j} \quad (c_0^i = 1) \quad (7a)$$

$$= \sum_{j=0}^n a_j^i \left( \frac{T}{2} \right)^{n-j} (1+z^{-1})^{n-j} (1-z^{-1})^j / \sum_{j=0}^n a_j^i \left( \frac{T}{2} \right)^{n-j} \quad (7b)$$

$$D^i(z^{-1}) = \sum_{j=0}^m d_j^i z^{-j} \quad (7c)$$

$$= \sum_{j=0}^m b_j^i \left( \frac{T}{2} \right)^{n-j} (1+z^{-1})^{n-j} (1-z^{-1})^j / \sum_{j=0}^m b_j^i \left( \frac{T}{2} \right)^{n-j} \quad (7d)$$

식 (7)에서  $c_j^i, d_j^i$ 는  $a_j^i, b_j^i$ 로부터 쉽게 구할 수 있고 그 관계식은  $\theta_j^i: \{a_j^i\} \rightarrow \{c_j^i\}$  ( $0 \leq j \leq n$ )과  $\Sigma_j^i: \{a_j^i, b_k^i\} \rightarrow \{d_j^i\}$  ( $0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq m$ )로 정의한다.

식 (6)-(7)를 이용하여 식 (2)의 퍼지 규칙을 다시 쓰면 다음과 같다.

$L^i$ : If  $x_{p1}$  is  $F_1^i$  and  $x_{p2}$  is  $F_2^i$  and ... and  $x_{pn}$  is  $F_n^i$ ,

$$\text{then } y^i(k) = - \sum_{j=1}^n c_j^i z^{-j} y(k) + \sum_{j=0}^m d_j^i z^{-j} u(k) \quad (1 \leq i \leq \ell) \quad (8)$$

여기서  $y^i$ 는  $i$  번째 서브시스템의 출력이다. 한가지 기억해야 할 사실은 유전알고리즘은 식 (4)의 연속형 방정식의 계수를 직접 조정하게 되고, 이로 인해 식 (8)의 이산형 방정식의 계수가 변경된다는 것이다.

### 3.3 퍼지 규칙의 추론

식 (8)에서 시스템의 상태변수 값  $\{x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn}\}$  에 대한  $i$  번째 규칙의 조건부 적합도  $\rho_i$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\rho_i = \prod_{j=1}^n F_j^i(x_{pj}) \quad (1 \leq i \leq \ell) \quad (9)$$

여기서  $F_j^i(x_{pj})$ 는  $x_{pj}$ 에 대한 퍼지집합  $F_j^i$ 의 소속정도이다.

이것을 이용하여 전체 규칙의 추론결과 퍼지모델의 출력  $y$ 는 다음과 같게 된다.

$$y(k) = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \rho_i y^i(k)}{\sum_{i=1}^{\ell} \rho_i} \quad (10)$$

단,  $\sum_{i=1}^{\ell} \rho_i > 0$ 으로 간주한다.

### 3.4 유전알고리즘을 이용한 온라인 퍼라미터 추정

일단 비선형 시스템을 기술하는 퍼지모델이 얻어지면 모델의 동특성이 시스템의 그것에 가깝도록 전건부 입력변수들의 공간을 적절히 퍼지 분할하고, 후건부 방정식의 계수를 최적 조정하게 되는데 이는 비선형 최적화 문제가 된다. 퍼지 분할에 이용되는 퍼지집합은 그림 2와 같이 “내부” 퍼지집합 또는 “외부” 퍼지집합 중 하나로 정의되며 각각의 소속함수 중심은 고정되나 폭은 가변된다. 한편 “내부” 퍼지집합의 소속함수는 중심을 기준으로 대칭인 것으로 간주한다. 그림에서 폭  $w_j^1, w_j^2, w_j^3$ 이 전건부의 퍼라미터가 된다. 특히 유전알고리즘을 이용하여 최적 폭을 탐색하도록 퍼라미터들의 탐색구간을 정할 때 퍼지 집합간에 항상 포갠(overlap)이 유지되도록 한다.

비선형 최적화 문제를 해결하기 위하여 본 연구에서는 소집단을 효율적으로 다룰 수 있는 하이브리드 유전알고리즘(Hybrid Genetic Algorithm: HGA)[4]을 사용한다. 적응 메커니즘으로서 HGA는 퍼지모델이 시스템의 동적특성에 가까워지도록 계속적으로 전건부 퍼지집합의 폭과 후건부 퍼라미터들을 동시에 조정하게 된다.

집단이 진화해 가는 동안 HGA는 개체간의 우열을 가리기 위하여 적합도 함수를 필요로 하는데, 이는 다음의 목적함수로부터 계산되어 진다. 특히 온라인 추정치를 얻기 위하여 목적함수는 유한 시간 동안만 계산된다.

$$J(\varphi) = \sum_{j=k-W+1}^k |y_p(j) - y(j)| \quad (11)$$

여기서  $\varphi$ 는 퍼지모델의 퍼라미터 벡터이고  $W$ 는 데이터 윈도우의 크기이다.  $W$ 의 크기는 퍼지모델의 정확도와 계산시간 사

이에서 적절이 타협된다. 온라인 추정치를 얻기 위해 목적함수가 유한 시간 범위에서 계산되면, 모델을 초기화하기 위한  $n$ 개의 입력력 데이터 쌍과 모델을 구동하기 위한  $W$ 개의 출력력 데이터 쌍이 버퍼에 저장되어야 한다. 새로운 데이터 쌍  $\{u(k), y_p(k)\}$ 이 얻어질 때마다 버퍼의 내용은 쉬프트되고 갱신된다[3].

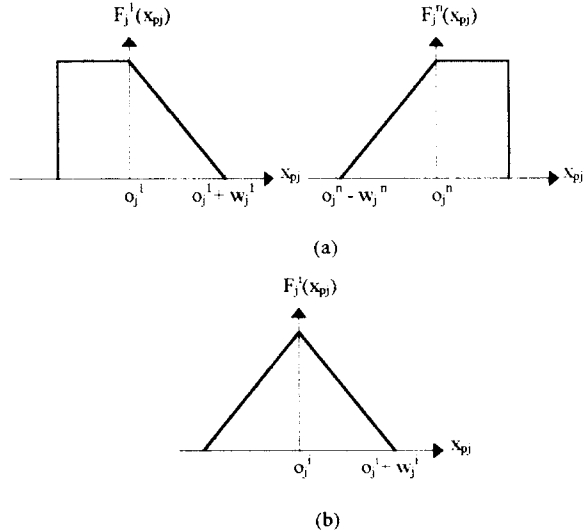


그림 2 “외부” 퍼지집합과 “내부” 퍼지집합의 소속함수

Fig. 2 Membership functions of (a) exterior fuzzy sets and (b) interior fuzzy sets

## 4. 모의 실험

본 방법의 유효성을 검증하기 위하여 비선형 진자시스템의 퍼지모델을 얻는 모의 실험을 수행하였다.

$$MR \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + k \frac{d\theta(t)}{dt} + Mg \sin\theta(t) = u(t) \quad (12)$$

$$(M=0.5\text{kg}, R=1\text{m}, k=0.3\text{kg}\cdot\text{m}/\text{rad}\cdot\text{sec}, g=9.8\text{kg}\cdot\text{sec}^{-2})$$

여기서  $M$ 은 질량,  $R$ 은 진자의 길이,  $\theta$  ( $=x_{p1}=y_p$ )는 진자의 각도,  $k$ 는 마찰계수,  $g$ 는 중력가속도이다.

다음과 같은 퍼지모델을 선정하였다.

$$L^1: \text{If } x_{p1} \text{ is NB, then } (1 - \alpha_1^1 p + \beta_1^1 p^2)y = b_0^1 u \quad (13a)$$

$$L^2: \text{If } x_{p1} \text{ is ZO, then } (1 - \alpha_1^2 p + \beta_1^2 p^2)y = b_0^2 u \quad (13b)$$

$$L^3: \text{If } x_{p1} \text{ is PB, then } (1 - \alpha_1^3 p + \beta_1^3 p^2)y = b_0^3 u \quad (13c)$$

입력변수  $x_{p1}$  상에 정의된 퍼지집합과 이들 소속함수의 중심값은 그림 3과 같다.

전건부 퍼라미터는 각각 6비트 길이의 이진 스트링으로 부호화하였고 탐색구간은  $w_1^1 \in [-0.2\pi, 0.0]$ ,  $w_1^2 \in [0.25\pi, 0.4\pi]$ ,  $w_1^3 \in [0.0, 0.2\pi]$ 로 설정하였으며, 후건부의 퍼라미터  $\alpha_1^1, \beta_1^1, b_0^1$

( $1 \leq i \leq 3$ )는 각각 10 비트 이진 스트링으로 부호화하였고 탐색 구간은  $0.0 \leq \alpha_i, \beta_i, b_i \leq 10.23$  으로 설정하였다. 또한 데이터 윈도우  $W=1000$ , 샘플링 주기  $T=0.02$  초로 선정하였고 입력신호는 다양한 주파수 성분을 가지도록 조합된 정현파신호를 사용하였다. 한편 HGA의 제어퍼매미터로 집단크기  $N=6$ , 재생산 계수  $\eta_i=1.7$  ( $1 \leq i \leq N$ ), 교배 확률  $P_c=1$ , 돌연변이 확률  $P_m=0.005$  를 선택하였다.

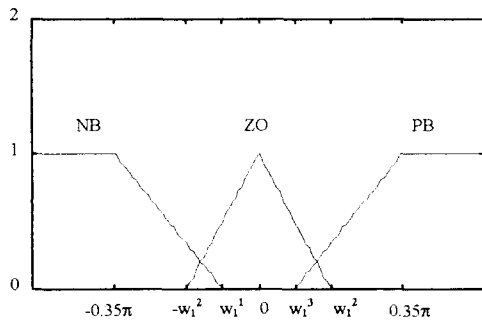


그림 3 퍼지집합과 소속함수의 중심값

Fig. 3 Fuzzy sets and the center values of their membership functions

2000 세대 동안 진화한 추정 결과 식 (14)와 같은 퍼지모델을 얻었고 이 때의 퍼지집합은 그림 4 와 같다.

$$L^1: \text{If } y \text{ is NB, then } (1+8.87p+1.14p^2)y=0.02u \quad (14a)$$

$$L^2: \text{If } y \text{ is ZO, then } (1+0.08p+0.0p^2)y=0.32u \quad (14b)$$

$$L^3: \text{If } y \text{ is PB, then } (1+9.74p+0.95p^2)y=0.05u \quad (14c)$$

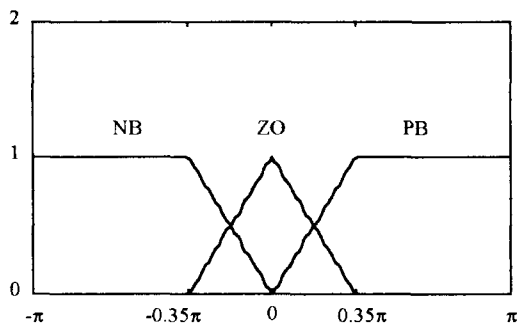


그림 4 추정된 퍼지집합의 소속함수

Fig. 4 Membership functions of the estimated fuzzy sets

그림 5 는 다른 정현파신호에 대한 시스템,  $\sin\theta \approx \theta$  로 선형화한 모델과 퍼지모델의 응답을 보여주고 있으며, 그림 6 은 시스템과 각 모델 사이의 오차를 나타내고 있다.

## 5. 결론

본 연구에서는 모델 조정기법과 유전알고리즘을 이용하여 비선형시스템을 연속시간 퍼지모델링하는 기법을 제안하였다. 먼저 각 동작점에서 비선형시스템을 기술하는 선형 서브시스템을 얻고 이를 퍼지 규칙으로 결합하여 퍼지모델을 얻었다. 다음

각 서브시스템의 출력을 계산하고, 신호계측상의 제약과 온라인 퍼매미터 추정시 신호의 초기화 문제를 해결하기 위하여 각 서브시스템의 방정식을 이산화하였다. 마지막으로 유전알고리즘을 이용하여 퍼지모델의 전건부와 후건부의 퍼매미터를 동시에 추정하였다. 제안된 방법은 모의실험을 통하여 그 유효성을 확인하였다.

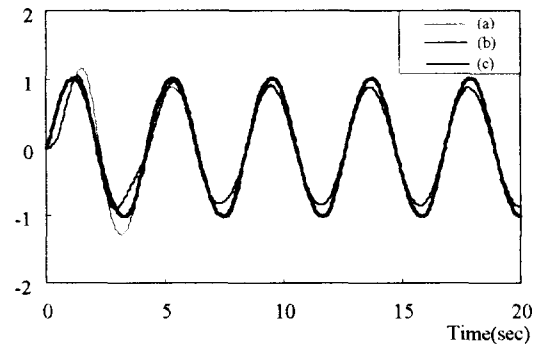


그림 5 (a) 시스템, (b) 선형모델과 (c) 퍼지모델의 정현파 응답

Fig. 5 Sinusoidal responses of

(a) system, (b) linearized model and (c) fuzzy model

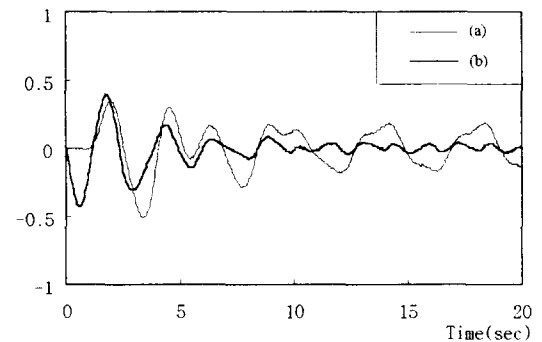


그림 6 (a)시스템과 선형모델간의 오차

(b)시스템과 퍼지모델간의 오차

Fig. 6 Error between

(a) system and linearized model (b) system and fuzzy model

## 참고문헌

- [1] T. Tagaki and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Application to Modeling and Control", *IEEE Trans. on SMC*, Vol. SMC-15, No. 1, pp. 116-132, 1985
- [2] K. Tanaka, "Design of Model-based Fuzzy Controller Using Lyapunov's Stability Approach and Its Application to Trajectory Stabilization of a Model Car", *Theoretical Aspects of Fuzzy Control*, John Wiley & Sons, Inc., 1995
- [3] 이현식, 진강규, "유전알고리즘을 이용한 연속시스템의 퍼매미터 추정", 제5회 인공지능, 신경망 및 퍼지시스템 종합학술대회, pp. 135-138, 1996
- [4] D. T. Pham and G. Jin, "A Hybrid Genetic Algorithm", *Proc. 3rd World Cong. on Expert Systems*, Seoul, Korea, Vol. 2, pp. 748-757, 1996