

복수 입력 시간지연 시스템의 한켈 근사화

Hankel Approximation of Commensurate Input Delay Systems

* 황이철*, 太田快人**

* 부산대학교 기계공학부(Tel : +82-51-510-2472)

** 오사카대학 전자제어기계공학과(Tel : +81-6-879-7336)

Abstracts This paper studies the problem of approximating commensurate input delay systems by finite dimensional systems based on the Hankel singular values. It is shown that the Hankel singular values are solutions a transcendental equation and the Hankel singular vectors are obtained from the kernel of the matrix. The computation is carried out in state space framework. Once singular values and vectors are calculated, finite dimensional approximated systems are constructed using standard linear system computational tools. An example is included.

Keywords Commensurate Input Delay System, Hankel Approximation, Hankel Operator, Gramian.

1. 서론

모델 근사화는 시스템을 규정된 Mcmillan 차수를 가지는 저차원 모델로 근사화하는 것으로서 제어시스템의 설계와 구현에 있어 매우 중요하다. 한켈 근사화는 최소화하고자 하는 목적함수로서 한켈 작용소의 특이치를 이용하는 방법이며, 현재 가장 최적인 근사법으로 알려져 있다[2]. 그리고 한켈 작용소는 H^∞ 최적제어 있어서 제어시스템이 달성할 수 있는 성능의 하한치를 결정하며 실제 제어기를 구성하는데 있어 매우 중요한 역할을 한다[1].

본 연구에서는 입력에 복수의 시간지연을 가지는 시스템에 대한 한켈 근사화 문제를 다룬다. 입력 시간지연 시스템에 대한 한켈 근사화는 다수의 연구자들에 의해서 연구되어졌다 ([2], [5]). 문헌 [2]에서는 Laguerre 기저를 사용하여 한켈 작용소를 무한차원 행렬로 표현한 후, 이를 유한차원으로 절단해서 얻어진 한켈 작용소의 특이치와 특이벡터를 이용하는 근사법을 제안하고 있다. 그러나 초기단계에서 행렬을 절단함으로써 발생하는 오차가 근사화 정도에 미치는 영향을 정확히 평가하는 것이 필요하다. 문헌 [5]에서는 입력 시간지연 시스템의 한켈 특이치 및 특이벡터를 해석적으로 구하는 초월함수를 유도하고, 그들 값을 이용한 평형실현 근사법을 제안하였다. 그러나 한켈 특이치와 특이벡터를 계산하는데 있어 수치적분을 수행해야 하는 문제점을 지닌다.

본 연구의 목적은 문헌 [5]에서 제안한 한켈 특이치와 특이벡터의 계산법에 대하여 수치적분을 포함하지 않는 형태의 새로운 계산법을 도출하는 것이다. 이는 입력 시간지연 시스템의 그라미안이 가지는 준-분리 구조를 새로운 방법으로 기술함으로써 얻어진다. 아울러 그 값들은 선형시스템에 사용되는 범용적인 소프트웨어로서 용이하게 계산될 수 있음을 보인다. 끝으로 간단한 예제에 대한 한켈 근사화를 통하여 본 연구의 결과를 확인한다.

2. 한켈 작용소 및 그라미안

입력에 유리비를 가지는 복수의 시간지연 시스템을 다음과 같이 고려한다.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Ax + \sum_{j=0}^q B_j u(t - jL) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 의 모든 고유치 실수부는 음수로서, 즉 (1)은 안정한 시스템이라 가정한다. (1)은 무한차원 시스템으로서 한켈 근사화를 사용하여 저차원 근사 모델을 얻기 위해서는 먼저 한켈 특이치 및 특이벡터를 계산해야 한다. 여기서는 유한차원 시스템에 있어 한켈 특이치가 가제어 및 가관측 그라미안들의 곱으로 정의되는 행렬의 고유치로부터 계산된다는 결과를 이용한다.

2.1 한켈 작용소 및 그라미안 기술

먼저 (1)의 가제어 및 가관측 그라미안을 각각 아래와 같이 정의한다. 상태공간을 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_2(-L, 0)^q$, 과거 입력공간을 $\mathcal{U} = \mathcal{L}_2(-\infty, -qL) \times \mathcal{L}_2(-L, 0)^q$, 그리고 미래 출력공간을 $\mathcal{Y} = \mathcal{L}_2(-L, 0)^q \times \mathcal{L}_2(qL, \infty)$ 로 한다. 여기서 구간 $(-qL, 0)$ 에서 정의되는 신호들의 단편으로 \mathcal{U} 가 구성되며, 시간구간 $(0, qL)$ 에서 정의되는 신호들의 단편으로 \mathcal{Y} 가 구성됨을 의미한다. 그리고 $f \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0)$ 에 대하여 $\tilde{f} \in \mathcal{U}$ 를 아래와 같이 정의하며,

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{21} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{2q} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{f}_1(t) = f(t), \quad t < -qL$$

$$\tilde{f}_{2k}(t) = f(-(q-k)L + t), \quad -L < t < 0,$$

그리고 $g \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$ 에 대하여 $\tilde{g} \in \mathcal{Y}$ 를 정의한다.

$$\tilde{g} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_2 \end{bmatrix}, \tilde{g}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{1q} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{g}_{1k}(t) = g(kL + t), -L < t < 0$$

$$\tilde{g}_2(t) = g(t), t > qL$$

천이행렬 S 및 크기가 q인 단위행렬 e_1, e_q 를 정의하고,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_q = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{A} = I_q \otimes A, \tilde{S} = S \otimes I_n, \tilde{C} = I_q \otimes C, \tilde{B}_j = I_q \otimes B_j, \tilde{e}_1 = e_1 \otimes I_n, \tilde{e}_q = e_q \otimes I_n$ 로 둔다. 단 \otimes 는 Kronecker product를 의미한다.

$$\tilde{B} = \sum_{j=0}^{q-1} \tilde{S}^j \tilde{B}_j = \begin{bmatrix} B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_1 & B_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q-1} & \cdots & B_1 & B_0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \sum_{j=1}^q \tilde{S}^{*(q-j)} \tilde{B}_j = \begin{bmatrix} B_q & B_{q-1} & \cdots & B_1 \\ 0 & B_q & \ddots & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_q \end{bmatrix}$$

$$\tilde{E} = \sum_{j=0}^{q-1} \tilde{S}^j e^{jAL} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ e^{AL} & I_n & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{(q-1)AL} & \cdots & e^{AL} & I_n \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \tilde{e}_q \tilde{E}$$

여기서 $\tilde{A}, \tilde{S}, \tilde{E}$ 가 교환가능하며 $\tilde{S}^q = 0$ 임에 주의하자.

(1)에 대한 입력사상 $\Psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ 및 출력사상 $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 는 다음을 의미한다. Ψ 는 두 작용소의 곱으로 주어지는데, 하나는 과거입력에서 (1)의 집중 파라미터 시스템의 상태변수로의 사상이고, 다른 하나는 과거입력을 최대 시간지연 간격에 압축시켜 저장하는 사상이다. Φ 는 집중 파라미터 시스템의 상태변수와 최대 지연시간 간격에 압축되어 저장된 과거입력에서 미래출력으로서의 사상을 나타낸다. 여기서 집중 파라미터 시스템의 상태변수에 이미 영향을 준 과거입력 부분은 제외된다.

$$\tilde{\Psi} \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1 \tilde{f} \\ \tilde{\Psi}_2 \tilde{f} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\tilde{\Psi}_1 \tilde{f} = \sum_{j=0}^{q-1} \exp(-jAL) \int_{-\infty}^{-qL} \exp(-As) B_j \tilde{f}_1(s) ds$$

$$+ M_3 \int_{-L}^0 \exp(-\tilde{A}s) \tilde{B} \tilde{f}_2(s) ds$$

$$\tilde{\Psi}_2 \tilde{f} = \tilde{f}_2$$

$$\tilde{\Phi} \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11} x + \tilde{\Phi}_{12} f \\ \tilde{\Phi}_{21} x + \tilde{\Phi}_{22} f \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$(\tilde{\Phi}_{11} x)(t) = \tilde{C} \tilde{E} \tilde{e}_1 \exp(A(t+L))x, -L < t < 0$$

$$(\tilde{\Phi}_{21} x)(t) = C \exp(At)x, t > qL$$

$$\tilde{\Phi}_{12} = \tilde{\Phi}_{121} + \tilde{\Phi}_{122}$$

$$(\tilde{\Phi}_{121} f)(t) = \tilde{C} \exp(\tilde{A}t) \tilde{E} \tilde{S} \cdot \int_{-L}^0 \exp(-\tilde{A}s) \tilde{B} f(s) ds, -L < t < 0$$

$$(\tilde{\Phi}_{122} f)(t) = \tilde{C} \exp(\tilde{A}t) \int_{-L}^t \exp(\tilde{A}s) \tilde{B} f(s) ds, -L < t < 0$$

$$(\tilde{\Phi}_{22} f)(t) = C \exp(A(t-qL)) M_3 \cdot \int_{-L}^t \exp(-\tilde{A}s) \tilde{B} f(s) ds, t > qL$$

상기 식에서 상태변수 x 는 유일하게 결정되지 않지만, 간단한 계산으로부터 $\Gamma = \Phi \Psi$ 가 (1)의 한켠 작용소임을 확인할 수 있다. 따라서 가제어 및 가관측 그라미안 \mathcal{P}, \mathcal{Q} 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{P} = \Psi \Psi^*, \mathcal{Q} = \Phi^* \Phi$$

문헌 [5]에서는 \mathcal{P} 가 유계이며, \mathcal{Q} 가 컴팩트라는 사실과 Γ 의 특이치는 $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ 고유치의 제곱근으로부터 계산하고 있다.

2.2 그라미안의 준-분리성 구조

이 절에서는 \mathcal{P} 와 \mathcal{Q} 의 계산 및 $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ 가 준-분리 가능한 핵(kernel)을 가지는 적분 작용소임을 보인다. 이러한 준-분리성은 $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ 의 고유치를 계산하는데 있어 이용된다. 먼저 \mathcal{P} 와 \mathcal{Q} 를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e^{A(k-j)L} P_{jk} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} P_{jk} e^{A^{*}(j-k)L}$$

$$AP_{jk} + P_{jk}A^{*} + B_j B_k^{*} = 0$$

$$\mathcal{Q} : QA + A^{*}Q + C^{*}C = 0$$

여기서 \mathcal{Q} 는 (1)에서 집중 파라미터 시스템에 대한 가관측 그라미안이며, 이를 이용하여 $\tilde{\mathcal{Q}} = I_q \otimes \mathcal{Q}$ 를 정의한다.

정리 1 : 입출력사상 Ψ, Φ 를 각각 (2)와 (3)에서 정의된 것으로 하며, 다음의 각 작용소들을 정의한다.

$$Vf(t) = \int_{-L}^t F_1^{*}(t) F_2^{*}(s) f(s) ds$$

$$W_j f = \int_{-L}^0 F_j(s) f(s) ds, j = 1, 2, 3$$

$$F_1(t) = \begin{bmatrix} \exp(\tilde{A}^{*}t) \tilde{\mathcal{Q}} \tilde{B} \\ \exp(-\tilde{A}t) \tilde{B} \end{bmatrix}, F_2(t) = \begin{bmatrix} \exp(-\tilde{A}t) \tilde{B} \\ -\exp(\tilde{A}^{*}t) \tilde{\mathcal{Q}} \tilde{B} \end{bmatrix}$$

$$F_3(t) = \exp(-\tilde{A}t) \tilde{B}$$

이때 그라미안 \mathcal{P}, \mathcal{Q} 는 각각 다음과 같이 주어지며, \mathcal{Q} 의 (2, 2) 요소는 준-분리 가능한 핵을 가지는 작용소이다.

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P & M_3 W_3 \\ W_3^{*} M_3^{*} & I \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_1^{*} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} Q & 0 & -\tilde{e}_1 \tilde{E}^{*} \exp(\tilde{A}^{*}L) \\ \exp(\tilde{A}L) \tilde{E} \tilde{e}_1 & \tilde{S} \exp(\tilde{A}L) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{E}^{*} \end{bmatrix} \quad (4)$$

증명 : 입력 및 출력사상의 여인자를 계산하여, 그라미안에 대입하면 된다. 상세한 내용은 생략한다. Q.E.D

주의 1 : 적분작용소 $K: \mathcal{L}_2(-L, 0) \rightarrow \mathcal{L}_2(-L, 0)$

$$Kf(t) = \int_{-L}^0 k(t, s) f(s) ds$$

에서 그 핵이 2승 적분가능하고, 각 집합 $\{(t, s) : -L < t < s < 0\}$ 과 $\{(t, s) : -L < s < t < 0\}$ 에서 정의되는 핵이 각각 t 및 s 에 대하여 분리 가능할 때, 준-분리 가능한 핵을 가진다고 한다. 이때 적분 작용소는 Volterra 및 유한랭크를 가

지는 작용소의 합으로 표현된다[5].

3. 한켈 특이치 및 특이벡터

이 장에서는 그라미안의 고유치 문제를 통하여 시스템 (1)의 한켈특이치 계산법을 도출한다. 도출된 결과는 문헌 [5]의 결과와 다르며 수치적분이 나타나지 않는다. 그리고 수치 계산은 선형 시스템에 이용되는 계산 소프트웨어로 실행됨을 보인다. 먼저 (4)에서 주어진 행렬 M을 다음과 같이 분해한다.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11}^* & \\ & M_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$M_{11}^* = [0 \quad \mu^{-1/2} \widehat{e}_1^*]$$

$$M_{12}^* = \begin{bmatrix} \exp(\bar{\Lambda}L) & 0 \\ -\exp(-\bar{\Lambda}^*L)\bar{Q} & \mu^{-1/2}\exp(-\bar{\Lambda}^*L) \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \bar{E} \widehat{e}_1 \\ \mu^{1/2} \bar{Q} \bar{E} \widehat{e}_1 \end{bmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} \bar{E} \bar{S} & 0 \\ \mu^{1/2} \bar{Q} \bar{E} \bar{S} & -\mu^{1/2} \bar{E}^* \exp(\bar{\Lambda}^*L) \end{bmatrix}$$

이때 한켈 특이치는 다음 정리로부터 주어진다.

정리 2 : 아래의 H를 정의하면

$$H = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda} & 0 & \mu^{1/2} \bar{B} \bar{B}^* & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda} & \mu^{1/2} \bar{B} \bar{B}^* & \mu^{1/2} \bar{B} \bar{B}^* \\ 0 & -\mu^{1/2} \bar{C} \bar{C}^* & -\bar{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{A}^* \end{bmatrix} \quad (5)$$

다음 식을 만족하는 $\sigma = \mu^{-1/2} (\neq 0)$ 는 (1)의 한켈특이치이다.

$$\det(N_1 - N_2 e^{HL} N_3) = 0 \quad (6)$$

여기서 N_1, N_2, N_3 는 각각 아래와 같이 주어진다.

$$N_1 = \begin{bmatrix} I_m - \mu \widehat{e}_1 P \bar{Q} \widehat{e}_1^* + \bar{S} e^{AL} \bar{E} & \mu \widehat{e}_1 P \bar{e}_1^* \bar{E}^* e^{A^*L} \\ 0 & -\bar{S}^* e^{A^*L} \bar{E}^* \end{bmatrix}$$

$$N_2 = [N_{21} \quad N_{22}]$$

$$N_{21} = \begin{bmatrix} \bar{E} \widehat{e}_1 \bar{e}_q^* \bar{E} & \bar{E} \bar{S} \\ \mu^{1/2} \bar{Q} \bar{E} \widehat{e}_1 \bar{e}_q^* \bar{E} & \mu^{1/2} \{ \bar{Q} \bar{E} \bar{S} + \bar{E}^* \exp(\bar{\Lambda}L) \bar{Q} \} \end{bmatrix}$$

$$N_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{E} \exp(\bar{\Lambda}^*L) & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & \exp(\bar{\Lambda}^*L) \bar{E}^* \widehat{e}_q \widehat{e}_1^* \end{bmatrix}$$

증명 : 증명은 생략하기로 한다(문헌 [3] 참조). Q.E.D

정리 2로부터 계산된 한켈 특이치는 (6)에서 주어지는 행렬을 특이행렬로 만든다. 그 행렬의 null 공간에는 0이 아닌 벡

터가 존재하게 된다. 이 벡터를 이용하면 한켈 특이벡터는 다음 정리와 같이 구조화된다.

정리 3 : $\sigma = \mu^{-1/2}$ 는 시스템 (1)의 한켈 특이치이며, 벡터 $\xi \in \mathbb{R}^{2m}$ ($\xi \neq 0$)는 다음 식을 만족한다고 하자.

$$(N_1 - N_2 e^{HL} N_3) \xi = 0 \quad (7)$$

이때 σ 에 상응하는 한켈 특이벡터 $\tilde{f} \in \mathcal{L}_2(-\infty, -qL) \times \mathcal{L}_2(-L, 0)^q$, $\tilde{g} \in \mathcal{L}_2(-L, 0)^q \times \mathcal{L}_2(qL, \infty)$ 는 아래와 같다.

$$\Gamma \tilde{f} = \sigma \tilde{g}, \Gamma^* \tilde{g} = \sigma \tilde{f},$$

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}, \tilde{g} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{f}_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j^* e^{-\Lambda^*(j+1)L} e^{-\Lambda^*t} [0 \ 0 \ 0 \ I] N_3 \xi,$$

$$\tilde{f}_2(t) = [0 \ 0 \ \bar{B}^* \ \bar{B}^*] e^{H(t+L)} N_3 \xi,$$

$$\tilde{g}_1(t) = [0 \ \bar{C} \ 0 \ 0] e^{H(t+L)} N_3 \xi,$$

$$\tilde{g}_2(t) = C e^{A(t-qL)} [0 \ \bar{e}_q^* \ 0 \ 0] e^{HL} N_3 \xi.$$

증명 : \tilde{f} 와 \tilde{g} 가 임의의 특이값 $\sigma \neq 0$ 에 상응하는 특이벡터로 둔다.

$$\Gamma \tilde{f} = \sigma \tilde{g}, \Gamma^* \tilde{g} = \sigma \tilde{f}$$

이들은 PQ의 고유치 $\sigma^2 = \mu^{-1}$ 에 대한 고유벡터 z와는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sigma} \tilde{f}^* \tilde{z}^* \tilde{z} = \frac{1}{\sigma} \tilde{f}^* Q z, \tilde{g} = \tilde{z} z$$

그리고 고유벡터 z와 벡터 ξ 와의 관계는 다음과 같다.

$$z = (I - \mu P V)^{-1} P \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}^* \\ M_{12}^* \end{bmatrix} \xi$$

상기의 식들에 각 작용소를 대입하면 정리가 얻어진다. Q.E.D

주의 3 : 한켈 특이벡터는 $t > qL$ 구간에서는 전방 방정식의 초기치 응답이고, $t < -qL$ 구간에서는 후방 방정식의 초기치 응답이다. 이때 각 구간 $-qL < t < 0$ 와 $0 < t < qL$ 에서 정의되는 Hamiltonian이 이용된다. 여기서 초기조건은 (7)을 참조하라.

4. 수치예제

2차 집중 파라미터 시스템의 입력에 서로 다른 시간지연을 가지는 시스템을 아래와 같이 고려한다.

$$G(s) = (e^{-2s} + e^{-4s}) / (1 + 1.2s + 4s^2).$$

정리 2를 이용하여 이분법으로 한켈 특이치가 계산되며, 이때 μ 의 초기치는 시스템의 H^∞ 노음으로부터 주어진다. 그리고 각 특이치에 상응하는 특이벡터는 정리 3로부터 구한다.

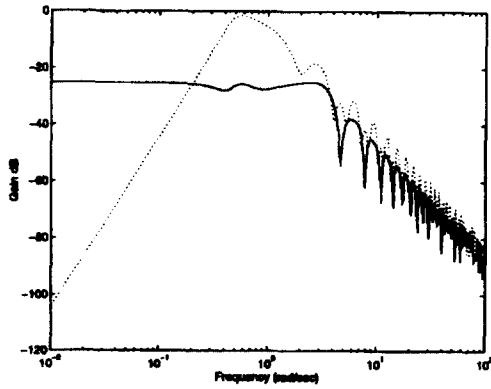


Figure 1: Errors

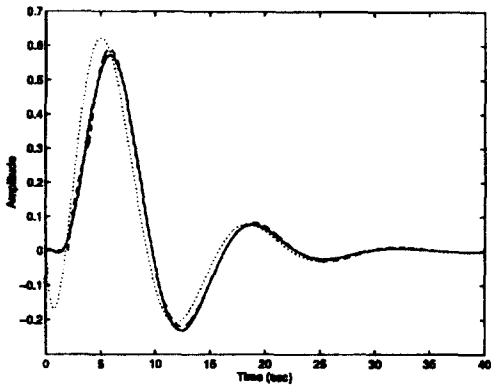


Figure 2: Impulse responses (a)

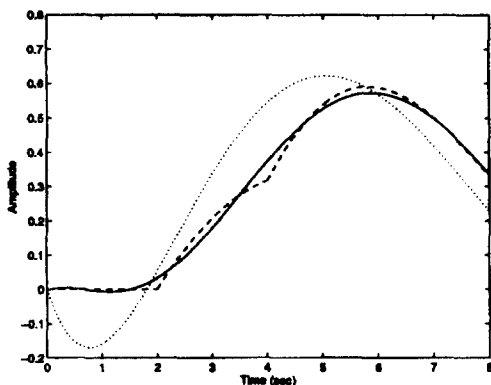


Figure 3: Impulse responses (b)

문헌 [5]의 결과를 이용하여 시스템을 4차 시스템으로 한 켈 근사하였다. 이에 대한 결과를 고찰하기 위하여 e^{-2s} 와 e^{-4s} 를 각각 (1,1) Padé 함수로 근사화하여 동일 차수의 Padé 근사 모델과 비교하였다.

Fig. 1은 주파수응답에서의 계인오차를 나타낸다. 굵은 실선이 한 켈 근사모델을 나타내고, 점선은 동일 차수의 Padé 근사모델을 나타내고 있다. 결과적으로 Padé 근사화가 저주파역에서는 양호하지만, 중간 및 고주파역에서는 매우 큰 오차를 가짐을 알 수 있다. 그리고 주파수 증가에 따라 원래의 시스템 위상지연이 점점 커지면 한 켈 및 Padé 근사화는 모두 점점 큰 위상오차를 수반한다. 이 점에서 Padé 근사화는 큰 오차를 유발하는 계인특성을 가짐을 알 수 있다.

Fig. 2는 임펄스 응답을 보여주고 있다. Fig. 3은 이 결과를 명확히 보기 위하여 시간 간격을 줄여 확대한 그림이다. 점선은 원래의 시스템이며, 굵은 점선과 얇은 점선은 각각 한 켈 및 Padé 근사화 결과를 나타낸다. 한 켈 근사화가 Padé보다 시간지연의 특성을 양호하게 유지함을 보인다.

5. 결론

복수 입력 시간지연 시스템의 한 켈 특이치 및 특이벡터에 대한 새로운 계산법을 제안하였으며, 즉 기존의 결과에 포함된 수치적분가 제거된 형태의 결과를 도출하였다. 또한 본 연구의 결과를 이용하여 입력 시간지연 시스템의 한 켈 근사화를 수행할 경우 초기단계에서 한 켈 작용소를 근사화할 필요성이 없음을 알았다.

참고문헌

- [1] D. S. Flamm and S. K. Mitter, " H^∞ sensitivity minimization for delay system," *System & Control Letter*, vol.9, pp. 17-24, 1987.
- [2] C. Glader, G. Högnäs, P. M. Mäkilä and H. T. Toivonen, "Approximation of delay systems", *Int. J. Control*, vol. 53, no.2, pp. 363-390, 1991.
- [3] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds", *Int. J. Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, 1984.
- [4] K. Glover, R. F. Curtain and J. R. Partington, "Realisation and approximation of linear infinite dimensional systems with error bounds", *SIAM J. on Control and Optimization*, vol. 26, no. 4, pp. 863-898, 1988.
- [5] 황이철, 박경택, "복수입력 시간지연 시스템의 유리근사화", 한국정밀공학회 논문집, 제 14권, 제 1호, 1997.