

이산시간 H^∞ 제어기의 설계방법

A Design Method for a discrete-time H^∞ Controller

최연욱*

부경대학교 제어계측공학과 (Tel:+82-51-620-1633; Fax:+82-51-623-4227; E-mail: wook@dolphine.pknu.ac.kr)

Abstract: In this paper, the problem of designing a H^∞ controller is considered, where the controller is realized through digital equipment. We show that the existing discrete-time controller design method can be improved by using the inverse bilinear transformation. The usefulness of the given method is confirmed by simulation.

Keywords: Discrete-time System, H^∞ Control, Bilinear Transformation

1. 서론

80년대 초반 Zames에 의해 제창된 H^∞ 는, Robust안정화 등 제어시스템 설계 전반에 있어서 중요한 문제를 포함하는 일반적인 문제설정이라는 사실과 함께, 상태공간표현에 의한 해법이 주어짐으로써 현재 제어기술자의 주목을 받음과 동시에 이것에 의한 많은 성공적인 적용사례가 발표되고 있다.

한편, 계산기 기술의 급속한 발달에 의해, 제어시스템의 실현에 있어서 μ -processor 등의 Digital 보상기가 폭 넓게 사용되고 있다. 이와 같이 연속시간 시스템인 제어대상을 digital 보상기로 제어하는 제어시스템은 sampled-data제어이론 혹은 digital제어이론으로 불려지고 있으며, 옛날부터 많은 연구가 되어왔다. 따라서, digital보상기의 설계에 필요한 정보(제어대상인 모델, 외란 입력의 특성이나 설계사양 등)가 전부 연속시간표현으로 주어져 있다고 한다면, digital 보상기의 설계과정은 일종의 A/D 변환과정으로 간주할 수가 있다. 이런 관점으로부터 digital 보상기의 설계법을 분류해보면, 아래와 같이 3개로 분류할 수가 있다¹⁾(그림 1참조).

등을 이용해서 이산시간보상기로 변환하는 방법(그림의 ①).

b) 제어대상 등 설계에 필요한 정보를 임의의 시각에서 sample한 점에서의 거동을 나타내는 이산시간모델로 표현하고, 순수한 이산시간시스템의 설계문제로서 취급하는 방법(그림의 ②)

c) 가장 최근의 이론으로서, 위의 두 가지 방법과 같이 근사를 이용하지 않고, 직접 digital보상기를 구하는 방법(그림의 ③).

b)의 방법은, 페루프시스템의 안정성이나 sample 점에서의 특성을 보증하기에는 충분하지만, sample 점들 사이의 정보까지 포함한 실제의 의미에 있어서 제어시스템의 성능평가를 할 수가 없다는 결점이 있다. 한편, a)의 방법은 sampling 주기가 짧은 경우에는 연속시간시스템의 응답에 가까운 응답을 얻을 수가 있어 유효하다. 그렇지만, sampling 주기와 달성 가능한 제어성능과의 관계가 명확하지 않기 때문에, sampling 주기가 어느 정도 길어지면 안정성까지도 보증할 수가 없게 되는 경우도 있다. 이들의 방법의 문제점을 해결하기 위해 등장한 것이, 연속시스템과 이산시스템이 혼재한 sampled-data시스템을 근사를 이용하지 않고 직접적으로 사용하는 것이 c)의 방법이다. 현재 여러 가지의 접근방법이 연구되고 있으나²⁾, 이를 이용하기에는 아직 상용 software 등의 준비가 부족한 것 같다.

현재 대부분의 실험에서는, 연속시간에서 설계한 제어기 $K(s)$ 를 DSP등과 같은 digital보상기로 실장할 경우에는 b)의 방법을 취하고 있다. 이 경우는 sampling 주기를 고려에 넣지 않고 기본적인 설계를 마쳤기 때문에, sampling 주기와 시스템과의 관계가 명확하지 못하다는 단점이 있다. 따라서, 본 연구에서는, 위의 b)방법을 개선한 설계방법을 제안하고 이를 simulation을 통해 그의 유효성을 확인한다. 이는 먼저 주어진 제어대상을 이산화한 다음, 이것을 inverse bilinear 변환을 이용한 가상의 연속시간영역에서 연속시간시스템의 제반 설계이론을 이용하여 제어기를 설계하는 것이다.

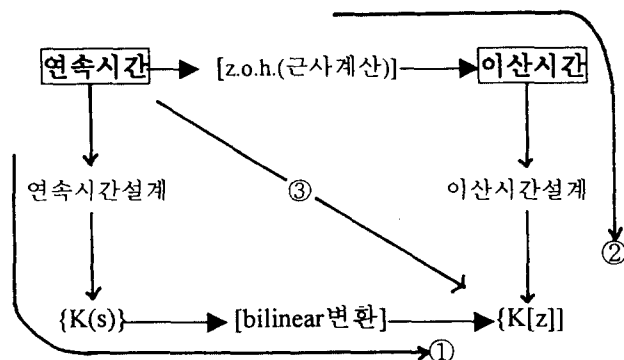


그림 1 Digital 제어기의 설계
Fig.1 Design of Digital Controllers

a) 먼저 연속시간시스템에서의 설계문제를 이용해서 연속시간 보상기를 설계하고, 이것을 bilinear 변환

2. Digital 제어기의 설계방법

아래의 그림 2는 일반적인 digital 제어시스템을 나타내고 있다. 먼저 위에서 언급한 3가지의 설계법에 공통되는, digital 제어기 $K_d[z]$ 에 의한 폐루프시스템의 내부안정성과 $K_d[z]$ 의 존재조건에 대해 생각해 본다.

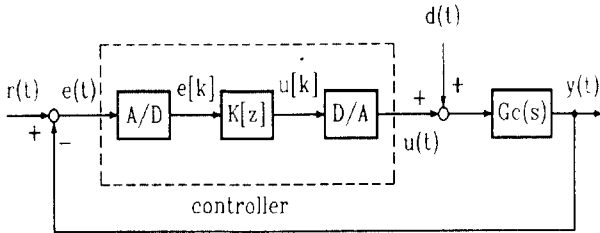


그림 2 Digital 제어시스템
Fig.2 Digital Control System

연속시간인 제어대상의 $G_c(s)$ 와 Digital 보상기 $K_d[z]$ 의 실현을 각각

$$G_c(s) : \begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_c x_p(t) + B_c v(t) \\ y(t) = C_c x_p(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$K_d[z] : \begin{cases} x_k[k+1] = A_k x_k[k] + B_k e[k] \\ u[k] = C_k x_k[k] \end{cases} \quad (2)$$

두고, 각각의 계수행렬은 적당하게 주어진 것으로 한다. 이 그림에서 A/D (sampler)의 위치를 제어대상의 뒤로 가져가서 앞의 D/A (주로 zero-order-hold)와 함께 제어대상을 이산시스템으로 간주하여 제어기 $K_d[z]$ 를 설계한다면 서론에서 언급한 설계법 b)가 된다. 여기서는 이 방법을 이용하여 전체시스템의 내부안정성을 살펴보기로 한다. 따라서, 이에 의한 $G_c(s)$ 의 이산화시스템 $G_d[z]$ 는 D/A로서 z.o.h를 사용한다면 다음과 같이 됨을 쉽게 알 수가 있다.

$$G_d[z] : \begin{cases} x_p[k+1] = A_d x_p[k] + B_d v[k] \\ y[k] = C_d x_p[k] \end{cases} \quad (3)$$

$$A_d = e^{A_c T}, B_d = \int_0^T e^{A_c t} B_c dt, C_d = C_c$$

이식을 이용하고, 또한 그림 2의 모든 신호가 이산화(discretized)된 것으로 간주한다면 전체의 상태공간 표현은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} x_p[k+1] \\ x_k[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_d C_k \\ -B_k C_d & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p[k] \\ x_k[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d[k] \\ r[k] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y[k] \\ u[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_d & 0 \\ 0 & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p[k] \\ x_k[k] \end{bmatrix} \quad (4)$$

이때, 제어기 $K_d[z]$ 를 상기의 3가지 중 임의의 방법을 이용하여 설계하였을 경우에도 적용되는, 폐루프시스템의 내부안정성에 관한 다음과 같은 정리가

주어져 있다³⁾.

[정리 1] 위의 그림에서 외부신호가 인가되지 않았을 경우, 시스템의 초기값 응답이 지수적으로 0에 접근한다면 이 시스템은 내부안정이라고 한다. 이때, 그림2의 시스템이 내부안정이 되기 위한 필요충분조건은 다음 행렬(5)의 고유치가 전부 단위원내에 존재하는 것이다.

$$\begin{bmatrix} A_d & B_d C_k \\ -B_k C_d & A_k \end{bmatrix} \quad (5)$$

즉 시스템 (4)의 A행렬의 모든 고유치가 단위원내에 존재해야 한다는 것을 의미하고 있다. 또한, 안정화보상기 $K_d[z]$ 가 존재하기 위한 필요충분조건은, (A_c, B_c, C_c) 가 가안정(stabilizable) 및 가검출(detectable)로 되어야 한다는 것이다.

이러한 전제조건이 만족된다는 가정아래서, 본 연구에서 제안하는 가상영역에서의 설계방법은 아래와 같다⁴⁾.

[스텝 1] 먼저 주어진 제어대상에 대해 적당한 sampling주기로 이산화한다. 이를 전달함수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$G_d[z] := \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{bmatrix} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \right\} \quad (6)$$

이에 대해 가상영역에서의 제어대상의 전달함수 $G_c(\lambda)$ 를

$$\bar{G}_c(\lambda) = G_d \left(\frac{2/T + \lambda}{2/T - \lambda} \right) \quad (7)$$

과 같이 정한다. 이 $G_c(\lambda)$ 에 대해 연속시간시스템의 설계이론을 적용하여 가상제어기 $K_d[\lambda]$ 를 설계한다.

[스텝 2] (스텝 1)에서 구한 보상요소 $K_c[\lambda]$ 에 대해서, digital 보상기 $K_d[z]$ 를

$$K_d[z] = \bar{K}_c \left(\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (8)$$

과 같이 구한다.

이와 같은 방법으로 구한 digital제어기는 선정된 sampling주기에 관계없이 전체 시스템의 안정성은 보증됨을 쉽게 알 수가 있다. 따라서, 나머지의 정량적인 특성 (예를 들면, 안정여유, 과도특성 및 감도함수 등의 주파수특성) 등을 양호한 것으로 할 수가 있다면, 위의 설계법은 특히 sampling 주기를 길게 설정해야 할 필요가 있을 경우에 유효한 것으로 생각된다.

3. 이론적 배경

상기의 방법은 기본적으로 (inverse) bilinear변환을

이용한 것이다. 따라서, 먼저 이에 대한 명확한 정의를 다음과 같이 둔다. 즉, 위의 (1)식과 (3)식을 전달함수의 형태로 고치면

$$G_c(s) = C_c(sI - A_c)^{-1} B_c + D_c \quad (9)$$

$$G_d[z] = C_d(zI - A_d)^{-1} B_d + D_d$$

로 된다. 여기서 두 시스템 사이의 bilinear 변환은 다음과 같이 정의된다⁵⁾.

$$A_d = (\alpha I - A_c)^{-1} (\alpha I + A_c)$$

$$B_d = \sqrt{2\alpha} (\alpha I - A_c)^{-1} B_c \quad (10)$$

$$C_d = \sqrt{2\alpha} C_c (\alpha I - A_c)^{-1} B_c$$

$$D_d = C_c (\alpha I - A_c)^{-1} B_c + D_c$$

위 식에서 α 는 $(\alpha I - A)$ 가 정칙이 되도록 적당히 선정된 실수이다. 위의 (8)식과 (9)식을 비교하면, $\alpha = 2/T$ 로 두었음을 알 수가 있다. 이와 같은 관계가 성립할 경우, $G_c(s) = G_d\{(s + \alpha)/(s - \alpha)\}$ 가 성립됨을 쉽게 알 수가 있다.

한편, $G_c(s)$ 와 $G_d[z]$ 가 (10)식의 관계에 의하여 연결되어 있을 경우, 관련되는 Riccati방정식의 해에 관하여 다음의 정리⁶⁾가 알려져 있다⁶⁾. 먼저, Hamilton행렬을 생성하는 사상으로서

$$\Sigma = \{A, B, Q, S, R\}$$

$$\text{Ham}(\Sigma) := \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -S \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} S^T & B^T \end{bmatrix} \quad (11)$$

로 둔다.

[정리 2] $G_c(s)$ 와 $G_d[z]$ 가 (10), (11)식으로 주어졌으며, 임의의 행렬 M 은 대칭이며, $D_c^T M D_c$, $D_d^T M D_d$ 는 각각 정칙이라고 가정한다. 이때,

$$\Sigma_c = \{A_c, B_c, C_c^T M C_c, C_c^T M D_c, D_c^T M D_c\} \quad (12)$$

$$\Sigma_d = \{A_d, B_d, C_d^T M C_d, C_d^T M D_d, D_d^T M D_d\}$$

로 두면, 두 개의 Hamilton방정식의 고유치와 두 개의 Riccati방정식의 해 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\lambda_d = \frac{\alpha + \lambda_c}{\alpha - \lambda_c} \quad (13)$$

또한, $\text{Ric}\{\Sigma_c\}$ 혹은 $\text{Ric}\{\Sigma_d\}$ 의 해가 존재한다면 다른 한쪽도 반드시 존재하며 그 값은 동일하다.

위 정리에서, c 는 연속시간에서의 Riccati 방정식을, d 는 이산시간에서의 Riccati 방정식을 각각 나타내는 것으로 한다.

이 정리의 관계를 이용하면, 주어진 제어대상을 Hold회로를 이용하여 이산화한 전달함수 $G_d[z]$ 가 이산시간에서의 H_∞ 제어이론 설계를 위한 제반조건을 만족한다면 (혹은 만족하도록 가중함수 등을 설정해 놓았다면), 가상영역에서 H_∞ 제어기 설계가 별다

른 조정이 필요 없이 가능하다는 것을 나타내고 있다 (간단히 증명가능).

가상적인 연속시간과 실제의 연속시간 사이의 비교를 위해 두 개의 주파수 영역사이의 관계를 구해본다. 먼저, (8)식과 z 와 s 사이의 관계인 $z = e^{Ts}$ 를 이용하면

$$\chi = \frac{2 \cdot e^{Ts} - 1}{T \cdot e^{Ts} + 1} \quad (14)$$

가 얻어진다. 여기에 $s = j\omega$ 와 $\chi = j\xi$ 를 이용하면 ξ 는 다음과 같이 주어진다

$$\xi = \frac{2}{T} \tan \frac{T}{2} \omega \quad (15)$$

그림 3에 (15)식의 관계를 나타냈다.

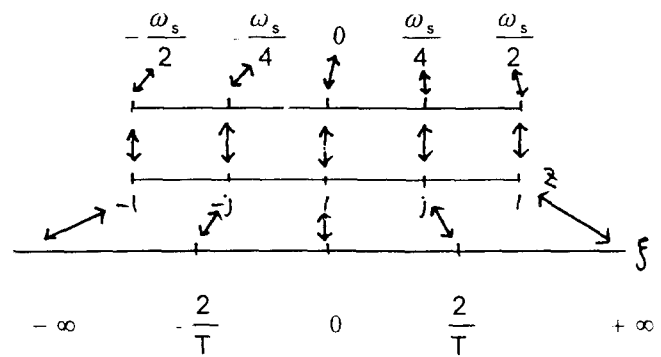


그림 3. ω 와 ξ 와의 대응관계
Fig. 3 The Relation between ω and ξ

이 그림에서부터 알 수 있는 바와 같이, 가상주파수는, 실제의 주파수 의 $-s/2 \sim +s/2$ 사이의 부분을 $-\infty$ 에서 $+\infty$ 로 확대해서 사상한 것으로 알 수가 있다. $-s/2 \sim +s/2$ 의 주파수대역은 digital 시스템에 있어 기본이 되는 주파수 대역이므로, 이 부분을 $-\infty$ 에서 $+\infty$ 로 확대함으로써 이산시간에서의 설계문제를 연속시간에서의 문제로 귀착시킨 것으로 해석할 수가 있다.

4. Simulation

DSP등과 같은 digital보상기로서 제어기를 구성하여 실제의 시스템을 제어하고자 할 경우 위에서 언급한 바와 같이 4가지 방법을 생각할 수가 있다. 여기서는 위의 4가지 방법 각각에 대해 simulation을 수행해 봄으로서, 선정된 sampling주기와 시스템의 제어성능 사이의 관계를 H_∞ -norm 값을 이용하여 확인한다. 즉, sampling 주기의 변화에 따른 norm값을 계산하여 이것을 제어성능의 지표로 한다. 다음에 각각에 대한 Step응답을 구하여 과도상태응답 등을 통하여 위의 사실을 재확인한다.

본 Simulation에서 채택한 제어대상은 2입력 2출력 시스템으로서 다음과 같다.

$$A_c = \begin{bmatrix} 0.023 & -37 & -19 & -32 \\ 0 & -1.9 & 0.98 & 0 \\ 0.012 & -12 & -2.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.41 & 0 \\ -78 & 22 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & 57 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57 \end{bmatrix}, D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

그림 4는 Sampling-Time의 변화에 따른 H^∞ -norm 값의 변화를 나타낸 것이다. 여기서 서론의 방법(a)는 기본적으로 연속시간에서 설계한 것이므로, norm 값은 Sampling 주기와는 관계없이 대략 0.68 정도였다. 또한, 이 그림에서는 방법 (c)에 의한 norm 값이 방법 (b) 혹은 (d)에 의한 norm 값보다 크게 나타나 있으나 이것은 program 상의 문제(Matlab의 μ -Tool)로서 실제로는 방법 (a)와 방법 (b) 사이에 존재함을 확인하였다.

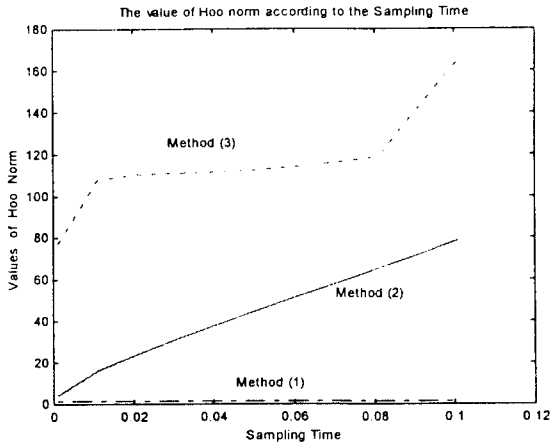


그림 4 Sampling Time에 따른 H^∞ -norm 값의 변화
Fig.4 H^∞ -norm depending on sampling time

그림 5는 Sampling Time을 0.01초로 했을 경우의 Step 응답이다. 방법 (a)가 가장 바람직하지만, sampling time을 조금 길게 (약 0.02초 이상) 취하면, 페루프 시스템의 안정성 조차 확보하지 못하게 되었다. 따라서, 실제의 경우 sampling time 선정에 많은 주의를 기울여야 함을 알 수가 있다. 또한 방법 (b)와 본 연구에서 제안한 방법 (d)는 sampling 주기에 관계없이 거의 같은 정도로 수렴하였고, 방법 (c)에 의한 결과는 (a)에 의한 결과와 가장 유사하였다. 따라서, 방법 (c)가 sampling 주기에 관계없이 가장 양호한 응답을 얻을 수가 있지만, 이 경우 제어기의 차수가 높아지고 아직 안정되게 제어기를 설계할 수 있는 상용 software가 없다는 것이 문제점이다.

5. 결론

여기서 제안된 방법은, 이미 30년도 전에 고전제이

론에 의한 제어기의 설계에 사용된 것이다. 이것을 H^∞ 이론에 의한 설계에 안심하고 적용할 수 있기 위해서는 좀 더 확실한 수학적 검증이 필요하다고 생각된다.

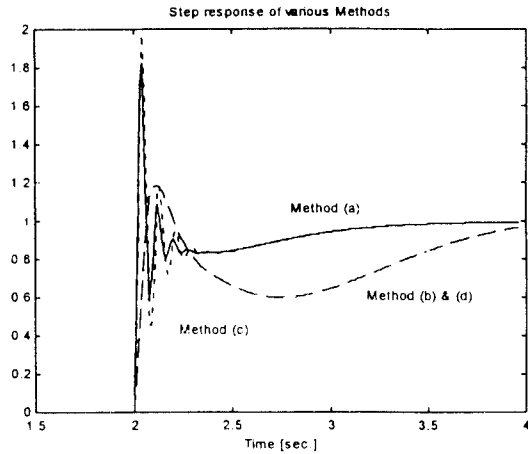


그림 5 Step 응답 파형
Fig.5 Simulation Results of Step Response

참고문헌

- [1] T. Chen & B. A. Francis, "H2-optimal Sampled-Data Control", IEEE AC-36-4, pp.387-397, 1991
- [2] P. P. Khargonekar & N. Sivashamkar, "H2-Optimal Control for Sampled-Data Systems", Systems and Control Letters, 17-6, pp.425-436, 1991
- [3] B. A. Francis & T. T. Georgiou, "Stability Theory for Linear Time-Invariant Plants with Periodic Digital Controller", IEEE AC-33-8, pp.820-832, 1988
- [4] E. I. Jury, Sampled-Data Control Systems, John Wiley, 1958
- [5] R. Kondo & K. Furuta, "On the Bilinear Transformation of Riccati Equation", IEEE AC-31-1, pp.50-54, 1986
- [6] R. Kondo, S. Hara & T. Itou, "Unified Solution for Continuous/Discrete-Time H^∞ Problems", SICE, vol.27, no.4, pp.415-421, 1991