

3축 위성체의 준최소시간 선회기동을 위한 입력형상최적화

Torque Shaping for Near-Minimum-Time Optimal Slewing of 3-axis Spacecraft

°김기석, 김희섭, 석진영, 김유단

서울대학교 항공우주공학과 (Tel: 880-7398; Fax: 887-2662; E-mail: ydkim@plaza.snu.ac.kr)

Abstracts : In this paper, the optimal torque shaping is obtained for 3-axis rotation of a spacecraft. The true optimal 3-axis rotation of rigid spacecraft is first investigated via parameter optimization method with prescribed switching times. Input torque shape of the torque generating device mounted on the central hub is optimized using Fourier Series expansion so that the spacecraft may slew while minimizing the vibration energy of flexible modes. Numerical results show that proposed method suggests a reference trajectory for open-loop control, and also verify that it can minimize the vibratory modes of the spacecraft during/after the rest-to-rest maneuver.

Keywords : Eigenaxis rotation, Three-axis rotation, Torque shaping, Near-minimum-time, Fourier Series Expansion

1. 서론

위성체의 3축회전에 있어서 최소시간 문제의 해는 일반적으로 bang-bang 형태의 제어 입력을 갖는다. 최근까지 위성체의 최소시간 3축회전에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다. 간단한 강체(rigid body)의 모델에 대해서는 이미 그 해가 밝혀졌고, 그 해는 eigenaxis rotation이 아님도 수치적으로 증명되었다[1]. 그러나 임의의 강체에 대해서는 아직 일반적인 해가 알려져 있지 않다. 한편, 최소시간문제의 해를 구하기 위해 엄밀한 의미의 두점 경계치문제(TPBVP)를 푸는 대신, switching time을 매개변수로 잡아 매개변수 최적화(parameter optimization)문제로 바꾸어 해를 구하려는 노력도 있었다[2].

실제 위성체는 태양전지판 등과 같은 유연구조물을 가지고 있으므로, bang-bang 형태의 입력은 위성체의 구조모드를 가진 하여 위성체에 진동을 야기한다. 본 논문에서는 준최소시간(near-minimum-time) 기동을 수행하여, 유연구조체의 진동을 억제할 수 있는 방법을 제시하고자 한다. 기준입력을 최소시간 문제의 해인 bang-bang 형태의 입력으로 삼고, 삼각급수 전개를 이용하여 입력을 모사한다. 삼각급수 전개방법을 통해서 입력값의 급격한 변화가 없는 부드러운 입력곡선을 얻을 수 있다. 이렇게 얻어진 입력을 초기형상으로 하여 삼각급수의 계수를 매개변수로 설정하고, 매개변수 최적화를 수행하여, 원하는 기동을 하며 동시에 위성체의 진동을 효과적으로 억제할 수 있는 입력을 얻을 수 있었다.

2. 최소시간 회전

본 논문에서 사용한 위성체의 모델은 중앙동체와 4개의 유연부착물을 가진 유연구조체이다[3]. 본 장에서는 유연우주비행체를 강체로 모델링하여 3축 최소시간 회전을 위한 입력을 구하고자 한다.

2.1 최소시간 eigenaxis rotation

강체에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$I\ddot{\omega} + \omega \times (I\dot{\omega}) = \vec{T}, \quad \max \|\vec{T}\| \leq T_0 \quad (1)$$

여기서 I 는 관성모멘트, ω 는 각속도, 그리고 \vec{T} 는 토크이다. 원하는 eigenaxis를 $\vec{E} = [e_x \ e_y \ e_z]^T$ 라 하고, 위 식에 eigenaxis rotation 조건인 $\vec{\omega} = \theta \vec{E}$ 를 대입하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$I_x e_x \ddot{\theta} - (I_y - I_z) e_y e_z \dot{\theta}^2 = T_x \quad (2a)$$

$$I_y e_y \ddot{\theta} - (I_z - I_x) e_z e_x \dot{\theta}^2 = T_y \quad (2b)$$

$$I_z e_z \ddot{\theta} - (I_x - I_y) e_x e_y \dot{\theta}^2 = T_z \quad (2c)$$

$$\ddot{\theta} = k_x \dot{\theta}^2 + U_1 \quad (k_x = \frac{(I_y - I_z) e_y e_z}{I_x e_x}, U_1 = \frac{T_x e_x}{I_x}) \quad (3a)$$

$$\ddot{\theta} = k_y \dot{\theta}^2 + U_2 \quad (k_y = \frac{(I_z - I_x) e_z e_x}{I_y e_y}, U_2 = \frac{T_y e_y}{I_y}) \quad (3b)$$

$$\ddot{\theta} = k_z \dot{\theta}^2 + U_3 \quad (k_z = \frac{(I_x - I_y) e_x e_y}{I_z e_z}, U_3 = \frac{T_z e_z}{I_z}) \quad (3c)$$

본 논문에서는 위성체의 자세를 결정하기 위해서 다음과 같이 정의되는 쿼터니언을 사용하기로 한다.

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$$

$$q_i = \epsilon_i \sin(\phi/2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

$$q_4 = \cos(\phi/2)$$

여기서 ϵ_i 는 회전전과 회전후의 축에 대한 eigenaxis의 방향코사인(direction cosine)이다. 최소시간 eigenaxis rotation 문제를 풀기 위해서 먼저 선행축(critical axis)을 결정해야 한다. 위의 식(3a), (3b), (3c)중에서 $U = \min\{U_1 \ U_2 \ U_3\}$ 를 찾아 그 U 가 들어 있는 축이 선행축이 된다. 식(3a), (3b), (3c) 중 하나의 식에서 입력 U 가 결정되면 나머지 입력들은 자동으로 결정된다.

선행축에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= kx_2^2 + U \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ 이다. 최적제어이론에 따라 성능지수는 다음과 같다.

$$J = \int_0^{t_f} dt \quad (6)$$

최소시간 기동이므로 t_f 는 고정되어 있지 않다. 해밀토니언은 다음과 같이 정의된다.

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (kx_2^2 + U) \quad (7)$$

이제 부상태변수에 대한 방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_1 &= \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ -\dot{\lambda}_2 &= \frac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_1 + \lambda_2 (2kx_2) \end{aligned} \quad (8)$$

Pontriagin's minimum principle에 따라 제어입력은 해밀토니언을 최소화 하는 것으로 다음과 같이 결정된다.

$$U = -\text{sgn}(\lambda_2) \quad (9)$$

이 문제의 경우 최소시간 t_f 가 고정되어 있지 않으므로 다음과 같이 조건이 추가된다.

$$H(\text{tf}) = 0 \quad (10)$$

위 문제는 shooting method[4]를 사용하여 두점경계치문제(TPBVP)를 풀어서 해를 얻을 수 있다. Shooting method는 초기치에 민감하므로 초기치를 잘 선택해야 한다. 전방적분(forward integration)을 수행하여 해를 구하게 되면, 최종시간 t_f 가 고정되어 있지 않으므로 미지수는 $t_f, \lambda_1(0), \lambda_2(0)$ 이다. 부상태변수의 초기치를 예상하기는 어려운 일이므로, 미지수의 개수를 줄여서 후방적분(backward integration)으로 문제를 푼다. $H(\text{tf}) = 0$ 의 조건 및 최종시간에 각속도가 0이라는 조건을 이용하면, $\lambda_2(t_f)$ 를 결정할 수 있으며 미지수의 개수는 최종시간 t_f 와 상수인 λ_1 으로 줄어든다.

2.2 Time-Optimal 3-axis rotation

직접 두점경계치문제를 풀기가 어려우므로, switching time을 예상하여 매개변수로 삼아 매개변수 최적화문제로 바꿀 수 있다. 다양한 수치적 접근에 의해서 최소시간 해는 입력이 5번 또는 7번 일어나는 것이 알려져 있다[1,2]. 본 논문에서는 입력이 5번 switching이 일어나는 것으로 가정하여 switching time을 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 로 매개변수화 하였고, 여기에 최종시간 t_f 도 매개변수에 추가하면 제어입력과 성능지수를 다음과 같이 쓸 수 있다[2].

$$\begin{aligned} T_x &= T_{\max} \cdot \text{sgn}[(t-p_1)(t-p_2)] \\ T_y &= -T_{\max} \cdot \text{sgn}[(t-p_3)(t-p_4)] \\ T_z &= -T_{\max} \cdot \text{sgn}[(t-p_5)] \\ J &= \frac{1}{2} t_f^2 \end{aligned} \quad (11)$$

위의 식 (10), (11)과 강체의 운동방정식인 식 (1)을 사용하여 최적화를 수행한다.

3. 입력 토오크 형상화

본 장에서는 유연우주비행체의 선회 및 진동제어를 효율적으로 수행하기 위한 최적입력 토오크를 구하고자 한다.

3.1 구조모드 모델링 및 운동방정식

운동방정식을 유도할 때에 다음과 같은 가정을 하였다. 서로 반대편에 있는 두 개의 유연보는 각각 같이 움직인다고 생각하였으며, 4개의 유연보의 운동은 동체좌표계상에서 x-y평면상으로 제한하였다. 그리고 구조모드 방정식을 유도할 때에는 Assumed Mode Method를 사용하였다. 본 논문에서는 각 유연보의 구조모드를 2개까지 고려하였다.

위의 가정아래 유연보의 변위는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y_i = \sum_{j=1}^2 \phi_{ij}(x) q_{ij}(t) \quad (13)$$

유연보의 한 쪽 끝이 고정된 경우, shape function을 다음과 같이 정의할 수 있다[5].

$$\phi_{ij}(x) = 1 - \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2}(-1)^{j+1} \left(\frac{j\pi x}{L}\right)^2 \quad (14)$$

운동에너지 및 위치에너지는 다음과 표시된다.

$$T = \frac{1}{2} \omega^T I_{mb} \omega + 2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^L \dot{r}_i^T \dot{r}_i \rho A dx \right] \quad (15)$$

$$V = 2 \left[\sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_0^L EI (y'')^2 dx \right] \quad (16)$$

위의 T, V를 다음의 Euler-Lagrangian 방정식에 대입하면 구조모드에 대한 운동방정식이 얻어진다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ij}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{ij}} = 0, \quad L = T - V \quad (17)$$

3.2 초기 입력 토오크

앞 장에서 계산된 bang-bang 입력에 대하여 time offset을 기동시간의 처음과 끝에 더한 뒤에 Fourier 급수로 전개하였다. 일반적인 Fourier 급수는 상수항, cosine항, sine항을 모두 포함하므로, 본 논문의 경우 t=0에서 입력의 크기가 0이 되는 것을 보장할 수 없게 된다. 이는 시간 t=0에서 제어입력이 급격한 변화를 가져옴을 의미하므로 별로 바람직하지 않다. 따라서 이러한 상수항 및 cosine항을 없애기 위하여 주기를 $[-t_f, t_f]$ 로 보고 sine series로만 전개한다. 이렇게 하여 항상 t=0에서 입력의 크기를 0으로 만들 수 있다.

3.3 최적화

본 논문에서 고려하는 위성체의 기동은 rest-to-rest 기동이다. 즉, 각속도가 0인상태에서 회전기동을 한 후 다시 각속도가 0인 상태로 돌아오는 기동이며, 최종시간에서 원하는 자세를 가져야 한다. 이러한 구속조건을 만족하며, 진동에너지를 최소화 하는 제어입력을 구해야 한다. 최적화를 수행하기 전에 몇 가지 고려해야 할 사항이 있다. 본 논문에서는 삼각급수(Fourier series)를 무한히 전개할 수는 없으므로, 8차까지 전개하는 것으로 가정하였다. 따라서 T_x, T_y, T_z 에 대해서 최적화 하여야 할 매개변수는 모두 24개가 된다. 먼저, 이 24개의 변수를 2개의 그룹, U와 X로 나눈다. U는 각 토오크 T_x, T_y, T_z 에서의 삼각급수의 계수 중 낮은 차수의 계수 6개씩 모두 18개로 구성되며, X는

나머지 높은 차수의 6개로 구성한다. 경계조건은 6개(각속도 구속 3개, 쿼터니언 구속 3개)로 생각할 수 있으므로 이를 $f(X,U)=0$ 으로 쓰기로 한다. 최적화 과정에 필요한 민감도 값들은 해석적으로 구하기가 어려우므로, 모두 수치적으로 구하여 사용하였다. 최적화 알고리즘은 1차구배방법[6]을 사용하였으며, 도식화하면 [그림1]과 같다.

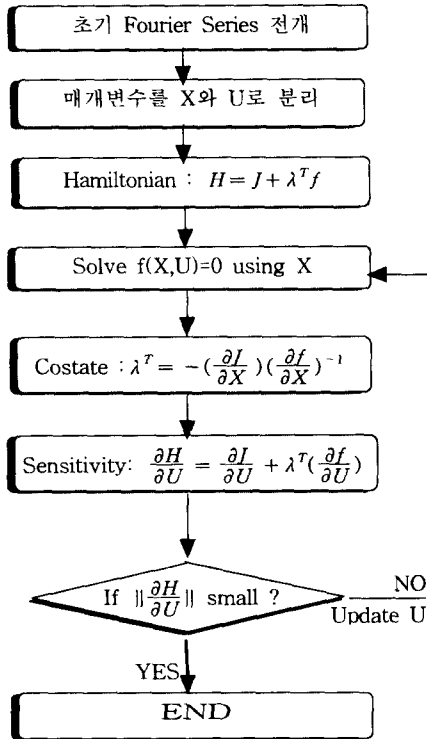


Fig. 1 Optimization Algorithm

4. 시뮬레이션 및 결과

본 장에서는 회전 가능한 유연구조물이 x축, y축, z축과 각각 45도, 45도, 30도의 각을 이루는 축을 중심으로, 정지상태에서 90도 회전 후 다시 정지하는 준최소시간 기동을 대상으로 시뮬레이션 하였다. 강체운동에 대해서 시뮬레이션 할 때에는 각 축에 대해서 최대의 토크 값은 똑같이 0.7(Nm)으로 제한하였다. 본 논문에서 사용한 유연우주비행체의 물성치는 [표 1]과 같으며, 초기조건과 말기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega(0) &= [0 \ 0 \ 0]^T, & \omega(tf) &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ q(0) &= [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, & q(tf) &= [0.25 \ 0.25 \ 0.6124 \ 0.7071]^T \\ \max \|\vec{T}\| &\leq 0.7 \text{ Nm} \end{aligned}$$

강체 모델로 시뮬레이션 한 결과, eigenaxis 회전일 때의 최종시간은 4.5269초[그림3], 매개변수 최적화의 방법을 썼을 때의 최종시간은 3.7042초이다[그림4]. 이로부터 eigenaxis 회전이 최소시간 해가 아님을 확인할 수 있었다.

최적화 하기전 및 최적화 후의 제어입력, 쿼터니언, 유연보

끝단의 변위를 각각 [그림4]-[그림9]에서 보여주고 있다. 삼각급수(Fourier Series) 전개시에 time offset은 0.5초로 선정하였다. 그러므로 최종적으로 최종시간은 4.7042초(0.5+3.7042+0.5)가 된다. 삼각급수로 전개한 뒤에 최적화를 수행한 결과, 최적화를 시키지 않았을 때는 기동 후에 제어 입력이 없어져도 진동이 심하게 계속됨[그림8]을 알 수 있다. 최적화 후에는 [그림9]에서 보듯이 끝단의 진동이 현저히 없어졌다. 최종시간이후에 약간의 잔여 진동이 남아 있음을 알 수 있는데, 이는 개회로 제어(open-loop control)가 가지는 한계로 해석된다.

[Table 1] Configuration parameters of the flexible spacecraft

Description	Value	Unit
Radius of Hub	0.200	m
Density of Beam	2800	kg/m ³
Rigidity of Beam	3.2106	N m ²
Width of Beam	0.002	m
Hight of Beam	0.0635	m
Length of Beam	0.8100	m
Moment of Inertia (Ix)	1.3818	kg m ²
Moment of Inertia (Iy)	1.3818	kg m ²
Moment of Inertia (Iz)	2.6363	kg m ²

5. 결론

본 논문에서는 유연우주비행체 모델의 진동억제를 고려한 3축회전을 위한 입력형상최적화 기법을 제시하였다. 선회를 위한 기준입력을 최소시간 해로 잡고, 삼각급수를 이용해서 입력을 근사화하였다. 삼각급수의 계수를 매개변수로 하고 주어진 rest-to-rest 임무를 만족하며, 진동을 최소화하는 압력형상을 구하였다. 유연모드를 고려했을 경우, bang-bang 입력으로는 경계조건을 만족시키기 힘들뿐 아니라 급격한 입력의 변동으로 구조모드를 가진하게 되는 것을 확인하였다. 본 논문에서 제시한 입력형상화 방법으로 시뮬레이션한 결과, 경계조건을 만족하면서 진동을 최대한 억제할 수 있었다.

참고 문헌

- [1] K. D. Billmoria and B. Wie, "Time-Optimal Three-axis Reorientation of a Rigid Spacecraft," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, No. 3, May-June 1993.
- [2] T. Singh and S. R. Vadali, "Input-Shaped Control of Three-Dimensional maneuvers of Flexible Spacecraft," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, No. 6, November-December 1993.
- [3] J. Suk, J. Moon, and Y. Kim, "Torque Shaping Based on Modified Trigonometric Series Expansion for Slewing of Flexible Structures," *38th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Kissimmee, FL, U.S.A., Apr. 7-10, 1997.
- [4] J. L. Junkins and J. D. Turner, *Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers*, Elsevier, New York, 1986.

[5] J. L. Junkins and Y. Kim, *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*, AIAA Education Series, AIAA, Washington D.C., 1993.

[6] A. E. Bryson Jr. and Y. Ho, *Applied Optimal Control*, John Wiley & Sons, New York, 1975, pp.2-41.

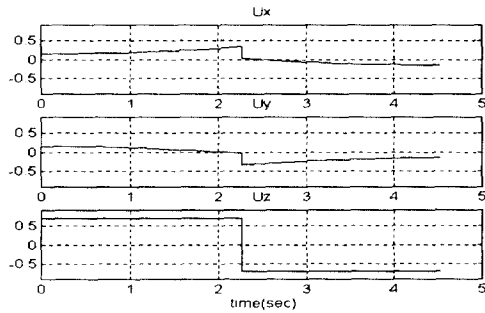


Fig. 2 Control Input (eigenaxis rotation)

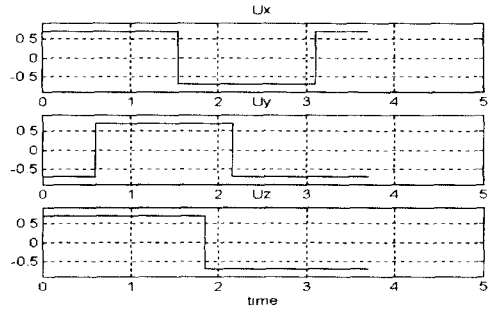


Fig. 3 Control Input (bang-bang input)

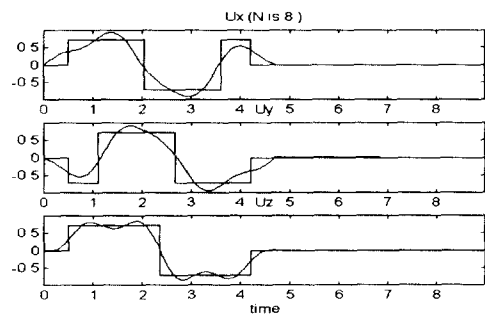


Fig. 4 Control Input (before optimization)

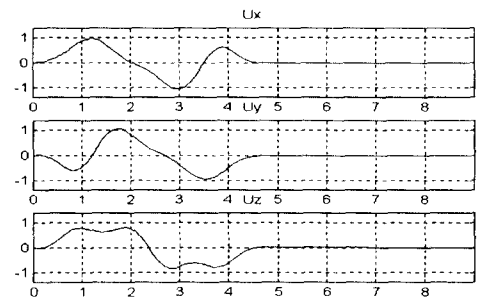


Fig. 5 Control Input (after optimization)

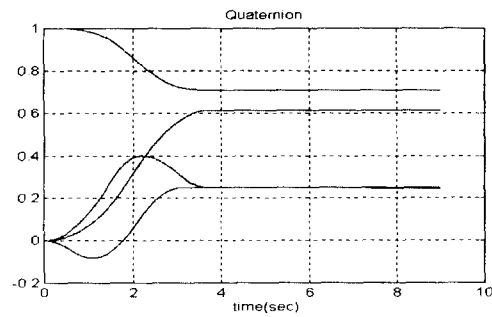


Fig. 6 Quaternion (by bang-bang input)

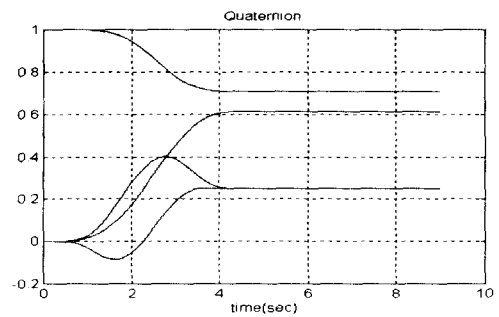


Fig. 7 Quaternion (after optimization)

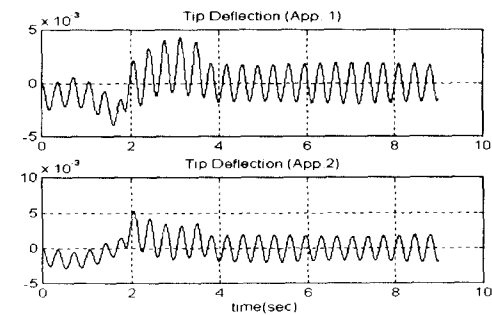


Fig. 8 Tip Deflection (by bang-bang input)

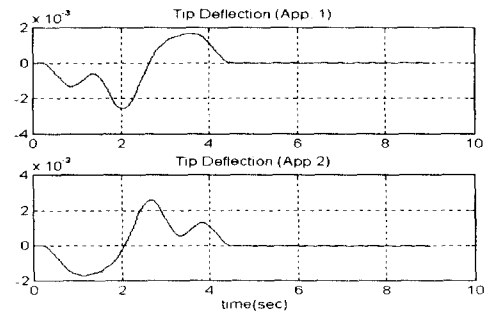


Fig. 9 Tip Deflection (after optimization)