

주기적 형태의 외란이 가해지는 위성체에 대한 선형최적제어기 설계

Design of Satellite Attitude Control System Under Periodic-Type Disturbances

°김희섭, 김유단

서울대학교 항공우주공학과 (Tel:880-7398; Fax:887-2662; E-mail: ydkim@plaza.snu.ac.kr)

Abstract In designing the controller by changing the weighting matrix for the purpose of satisfying constraints, the physical meaning of weighting matrix may disappear and the system may not yield best performance because operation condition such as periodic disturbance was not considered. In this paper, the weighting matrix is fixed and controller is designed to minimize the new performance index to reduce the effects of periodic-type disturbances. This method is applied to design the satellite controller to verify the effectiveness.

Keyword : Periodic Disturbance Rejection, LQR, Satellite Attitude Control

1. 서론

제어기를 설계하는 방법은 고전제어기법[1]과 현대제어기법 [2-7]으로 나눌 수 있다. 고전제어기법은 단일 입출력 시스템에 대하여 주파수 영역 접근법을 이용하여 강건성을 보장하도록 제어기를 설계할 수 있다. 그러나 다변수 시스템에 적용하는 것이 쉽지 않으므로, 이를 보완하기 위하여 다변수 시스템 제어기 설계기법에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 대표적인 현대제어기법중의 하나인 LQR제어기 설계기법을 이용하여 제어기를 설계하는 경우, 가중함수를 변화시키며 시뮬레이션등 다양한 해석 방법을 통하여 주어진 조건을 만족시키는 제어기를 설계하게 된다. 이러한 과정의 문제점은 주어진 조건을 만족시키기 위해서 가중함수를 바꾸는 것이 용이하지 않으며, 설계 과정중에 가중함수 값들이 물리적인 의미를 상실한다는 점이다. 이러한 점을 보완하기 위하여 고전 제어기 설계기법을 살펴볼 필요가 있다. 고전 제어기 설계기법의 특징은 시스템이 만족스러운 성능을 갖도록 시스템의 특성과 외란의 특성을 고려하여 제어기를 설계한다는 점이다. 특정한 주파수의 외란이 가해지는 시스템의 경우 이 주파수대에 제어효과가 크게 나타나도록 제어기를 설계하게 되는데 이를 위하여 잡음제어 필터 등을 첨가한다.

본 논문에서는 최적의 제어기를 설계하는데 있어서 외란의 형상을 고려하여 작동 환경에서 주어진 비용함수를 최소화하는 제어기를 설계하는 방법을 제안한다. 제안된 방법의 유효성을 검증하기 위하여 3축 선형화된 인공위성에 대하여 자세제어기를 설계하고 시뮬레이션을 수행하였다.

2. 선형제어기 설계

다음과 같은 선형시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

여기서 x , u 는 n , m 차원의 상태변수, 제어입력이며, A , B 는 시스템 행렬 및 입력행렬이다. 이러한 시스템에 대하여 선형 최적제어기는 다음과 같은 목적함수를 최소화하는 제어기로 정의된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{x^T Q x + u^T R u\} dt \quad (2)$$

위 목적함수를 최소화하는 제어기를 계산하기 위해 다음과 같이 해밀토니언을 정의한다.

$$H = \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (Ax + Bu) \quad (3)$$

제어기는 되먹임의 종류에 따라 상태되먹임 제어기와 출력되먹임 제어기로 분류된다. 상태되먹임 제어이득은 다음식을 이용하여 구할 수 있다.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4)$$

$$K = R^{-1}B^T P \quad (5)$$

한편, 출력되먹임 제어이득은 다음과 같은 비선형 연립대수행렬 방정식을 이용하여 반복적인 과정을 통하여 계산하게 된다.

$$Ac^T P + P Ac + C^T K^T R K C + Q = 0 \quad (6)$$

$$Ac S + S Ac^T + X = 0 \quad (7)$$

$$R K C S C^T - B^T P S C^T = 0 \quad (8)$$

여기서 $A_c = A - B K C$ 이다.

선형최적제어기를 설계할 때 가중함수를 변화시키며 제어기를 설계하는 경우, 대부분 가중함수의 대각행렬 이외의 원소들이 영(zero) 아닌 값을 가지게 되며, 가중함수들은 물리적 의미를 상실하게 된다. 그러므로 이러한 방법보다는 주어진 외란에 대한

여 물리적인 의미를 가진 가중행렬에 의해 정의된 목적함수를 최소화하는 제어를 설계하고자 한다. 이를 위해 문제를 공식화 하면 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (9)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gu \quad x(0) = x_0 \quad w = w(t)$$

여기서 Q와 R은 최적화시킬 변수가 아니라 물리적 특성에 의해서 주어진 값이고, w는 시스템에 가해지는 외란이다.

[정리] 아래와 같이 주어진 시스템에 대하여 식 (9)와 같이 주어진 목적함수를 최소화하는 제어기는 동일하다.

$$\text{[시스템 1]} \quad \dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0 \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

$$\text{[시스템 2]} \quad \dot{x} = Ax + Bu + \nu \quad x(0) = 0 \quad \nu(t) = x_0 \delta(t)$$

$$\text{[시스템 3]} \quad \dot{x} = Ax + Bu + \nu \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{02} \end{bmatrix} \quad \nu(t) = \begin{bmatrix} x_{01} \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$$

외란이 다음과 같이 특수한 형태를 가지는 경우를 생각해 보자.

$$\nu = f(s) \bar{\nu} \quad (10)$$

여기서 $\bar{\nu} = \delta(t)$ 이다.

이러한 형태의 외란에 대하여 식 (9)와 같이 주어진 목적함수의 값을 계산할 수 있다. 식 (10)으로 주어진 외란의 시스템 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{z} = Fz + \bar{\nu}_1 \quad (11)$$

$$\nu = Hz + \bar{\nu}_2$$

이를 시스템 모델과 결합하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ H & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \bar{\nu} \quad (12)$$

$$y = [0 \ I] \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix}$$

따라서 [정리]에 의해서 식(10)과 같은 특수한 형태의 외란이 가해지는 시스템의 제어기 설계는 초기조건을 갖고 외란이 없는 시스템의 제어기 설계 문제와 동일하게 취급할 수 있다. 이를 확장하여 다양한 형태의 외란이 시스템에 가해지는 경우를 생각해 보자. 이러한 경우로 각 외란이 확률적인 분포를 가지는 경우 목적함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$J = \frac{1}{2} f_1 J_1 + \frac{1}{2} f_2 J_2 + \dots + \frac{1}{2} f_n J_n \quad (13)$$

여기서 f_i 는 외란 ω_i 가 시스템에 가해질 확률이고, J_i 는 외란 ω_i 가 가해질 때의 각각의 목적함수이며, 이때 시스템은 다음 방정식을 만족한다.

$$\dot{x} = Ax + Bu + G_i \omega_i \quad (14)$$

앞의 과정을 적용하여 다음과 같은 구속조건을 얻을 수 있다.

$$Ac_i^T P_i + P_i Ac_i + C^T K^T R K C + Q = 0 \quad (15)$$

여기서 Ac_i 는 외란을 고려한 모델의 페루프 시스템 행렬이다.

이를 이용하여 해밀토니언을 구성하면 다음과 같다.

$$H = \frac{1}{2} f_1 \text{tr}(P_1 X_1) + \frac{1}{2} f_2 \text{tr}(P_2 X_2) + \dots + \frac{1}{2} f_n \text{tr}(P_n X_n) + g_1 S_1 + g_2 S_2 + \dots + g_n S_n \quad (16)$$

최적조건을 적용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$Ac_i^T P_i + P_i Ac_i + C^T K^T R K C + Q = 0 \quad (17)$$

$$Ac_i S_i + S_i Ac_i^T + f_i X_i = 0$$

$$K = R^{-1} (B_1^T P_1 S_1 C^T + \dots + B_n^T P_n S_n C^T) (C S_1 C^T + \dots + C S_n C^T)^{-1}$$

위 식들을 이용하여 다양한 외란이 들어오는 시스템의 경우 최적의 이득을 가지는 이득행렬을 계산하게 된다.

3. 보상기 설계

단일 입출력 시스템의 경우 고전 제어기법을 사용하여 제어를 설계하면 전달함수 형태의 보상기가 설계된다. 본 절에서는 이를 다변수 시스템에 적용하기 위하여 일반화시킨다. 다음과 같은 시스템 방정식을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (18)$$

보상기 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Fz + Gy \\ u &= Hz + Jy \end{aligned} \quad (19)$$

위 보상기를 설계하기 위해서 새로운 변수 w, z, y 를 다음과 같이 정의하자.

$$w = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (20)$$

위와 같이 정의된 변수를 사용하면, 식 (18), (19)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} u \quad (21)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} w \quad (22)$$

$$u = -Ky \quad (23)$$

$$\text{여기서 } K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J & -H \\ -G & -F \end{bmatrix}$$

식 (21)-(23)은 일반적인 형태의 시스템으로 다양한 제어기 설계 기법을 사용하여 보상기 설계가 가능하다.

위 시스템에 대하여 식 (9)의 목적함수는 다음과 같은 형태가 된다.

$$J = \frac{1}{2} \int \left\{ w^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w + y^T \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y \right\} dt \quad (24)$$

식 (22)를 살펴보면 출력되먹임 형태의 제어형태를 갖고 있다. 그러나 식 (8)을 살펴보면 입력가중행렬의 역행렬에 대한 정보가 필요하기 때문에, 위와 같은 문제의 경우 해를 구하는 것이 쉽지 않다. 해의 형태를 분석하기 위하여 식 (21)-(23)으로부터 식 (8)의 각 요소에 대응되는 행렬값들을 대입하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} RK_1 C & RK_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T P_1 & B^T P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} + N \quad (25)$$

여기서 N 은 $\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 의 null space이다.

상태되먹임의 경우 $N=0$ 이므로 식(25)으로부터 $P_2=0, K_2=0$ 이고 $K_1=R^{-1}B^T P_1 C^{-1}$ 임을 알 수 있다.

[특성] 행렬 P 가 대칭, 양의 반정부호행렬이고 블록행렬 P_3 가 영이면 $P_2=0$ 이고 $P_1 \geq 0$ 이다.

양의 대칭 행렬 P 의 형태를 다음과 같이 가정하자.

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서 P_1 는 $n \times n$ 행렬이고 P_3 는 $N \times N$ 행렬이라 하자. 양의 행렬은 다음과 같이 cholesky decomposition이 가능하다.

$$P = LL^T \quad (27)$$

여기서 L 은 lower triangular 행렬이다.

P_3 를 대각요소가 양인 값들 갖는 대각 행렬이라고 가정하자.

$$P_3 = \text{diag}\{\epsilon_{n+1}, \epsilon_{n+2}, \dots, \epsilon_N\} \quad (28)$$

행렬 L 도 삼각행렬로 다음의 형태를 갖는다.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ l_M & l_{N2} & \dots & l_{NN} & \dots \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서 $l_{ii} > 0$ 이다.

식 (28), (29)를 (27)에 대입하면 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$\epsilon = \sum_{k=1}^i l_{ik}^2, \quad i = n+1, \dots, N \quad (30)$$

위 관계식에서 $\epsilon_i \rightarrow 0$ 인 경우를 극한행렬로 생각할 수 있다. 이를 만족시키기 위해서는 식 (33)에서 다음조건을 만족해야함을 알 수 있다.

$$l_{ik} = 0, \quad i = n+1, \dots, N \quad k = 1, \dots, i \quad (31)$$

즉, L 행렬은 다음 형태의 행렬이 된다.

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

여기서 L_1 은 대각요소가 양의 값들 갖는 lower triangle 행렬이다. 이제 $P_3=0$ 인 음이 아닌 행렬 P 는 식 (32)를 (27)에 대입하여 얻을 수 있다.

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} = LL^T = \begin{bmatrix} L_1 L_1^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

즉, 행렬 P_1 은 양인 행렬이고 P_2 는 영행렬이다.

출력되먹임의 경우, 특수한 형태의 해로 $S_2=0$ 인 경우를 생각해 보자. 이 때 널행렬 N 은 다음과 같은 구조를 가지게 된다.

$$N = M \begin{bmatrix} N & 0 \end{bmatrix}$$

여기서 $NS_1 C^T = 0$ 이다.

이를 식 (25)에 대입하면 이로부터 $P_3=0$ 이고 [특성]으로부터 $P_2=0$ 임을 알 수 있다. 또한, 식 (6)으로부터 $K_2=0$ 이며, 식 (7)로부터 $K_3=0$ 임을 쉽게 증명할 수 있다. 결국, 상수 출력되먹임의 해는 식 (24)와 같이 주어진 목적함수를 극소화하는 해 중 하나임을 알 수 있다.

보상기를 설계하기 위해서는 식 (24)에서 보상기의 상태변수와 관련된 가중함수값을 설정할 필요가 있다. 본 논문에서는 $C=I$

인 경우를 고려하면, 식 (4)와 식 (5)로부터 다음식을 얻을 수 있다.

$$Q_{11} + A^T P_1 + P_1 A - P_1 B R_1^{-1} B^T P_1 - P_2 R_2^{-1} P_2^T = 0 \quad (34)$$

$$Q_{12} + A^T P_2 - P_1 B R_1^{-1} B^T P_2 - P_2 R_2^{-1} P_3 = 0 \quad (35)$$

$$Q_{22} - P_2^T B R_1^{-1} B^T P_2 - P_3 R_2^{-1} P_3 = 0 \quad (36)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & H \\ -G & -F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} B^T P_1 & R_1^{-1} B^T P_2 \\ R_2^{-1} P_2^T & R_2^{-1} P_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

여기서 $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$ 이다.

보상기의 구조가 결정되어 있는 경우 식 (37)로부터 P_2 와 P_3 가 결정된다. 이를 식 (34)-(36)에 대입하면 다음 결과식을 얻을 수 있다.

$$Q_{22} = R_2 G B R_1^{-1} B^T G^T R_2 + F^T R_2 F \quad (38)$$

$$Q_{11} + A^T P_1 + P_1 A - P_1 B R_1^{-1} B^T P_1 - G^T R_2 G = 0 \quad (39)$$

$$Q_{12} = A^T G^T R_2 - P_1 B R_1^{-1} B^T G^T R_2 + G^T R_2 F \quad (40)$$

특수한 형태의 보상기 형태를 구성하기 위해서는 식 (38)을 이용하여 Q_{22} 를 설계하고, 식(39)를 이용하여 P_1 를 계산하고, 이들값들을 이용하여 Q_{12} 를 식 (40)으로부터 구하면 된다.

그러나 이들 값들은 물리적인 의미를 갖지 못하므로, 이를 설계에 직접 이용하는 것은 쉽지 않으며, 이들 값들의 외란과의 관련성을 찾기 어렵다. 이를 보완하기 위해서 새로운 목적함수를 기존의 목적함수에 포함시키자[8].

$$J = \frac{1}{2} \int w^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} w + v^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} v dt + \frac{1}{2} \int y^T Q_3 y dt \quad (41)$$

이때 y_j 는 다음 방정식을 만족한다.

$$y_j = W(s) y \quad (42)$$

$W(s)$ 는 신호중 특정 주파수영역성분만을 통과시키는 필터이다. 이를 상태방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{s} = A_f s + B_f y \quad (43)$$

$$y_j = C_f s + D_f y$$

여기서, 제어 변수는 식 (42)의 주파수 영역 형상필터의 구조와 가중치가 된다. 신호중 특정 주파수 성분에 가중치를 크게 함으로써 시스템의 반응에서 특정주파수 성분을 가진 외란의 영향을 줄일 수 있다.

4. 시뮬레이션

인공위성의 제어를 설계하는데 있어서 주어진 임무를 수행하기 위해서 고정밀의 지향도를 유지하여야 한다. 특히 인공위성이 가지고 있는 태양전지판은 저주파수의 특성을 가지고 있으며 태양에 의해 주기적인 영향을 받게 된다. 주어진 임무를 수행하기 위해서는 이러한 주기적 외란에 대한 적극적인 제어가 필요하게 된다. 주기적인 외란이 입력되는 위성의 보상기를 설계하기 위해서 다음과 같은 선형화된 인공위성의 운동방정식을 살펴보자.

$$I_y \ddot{\theta}_1 + n(I_x + I_y - I_z) \dot{\theta}_3 - 4n^2(I_x - I_z)\theta_1 = T_y \quad (\text{롤})$$

$$I_z \ddot{\theta}_2 - 3n^2(I_x - I_y)\theta_2 = T_z + d(t) \quad (\text{피치})$$

$$I_x \ddot{\theta}_3 - n(I_x + I_y - I_z) \dot{\theta}_1 - n^2(I_y - I_z)\theta_3 = T_x \quad (\text{요})$$

여기서 n 은 위성의 궤도 각속도이며, 관성모멘트값은 다음과 같다.

$$I_x = 1872 \quad I_y = 1747 \quad I_z = 401 \quad n = 7.2722 \times 10^{-5}$$

위에서 언급한 인공위성 모델에 대하여 제어기를 설계하여 보면 시스템을 안정화시키는 상태피드백 제어기는 쉽게 구할 수 있지만, 출력피드백 제어기를 설계하는 것은 쉽지 않다. 상수 상태피드백 경우 외란 크기에 따른 성능을 살펴보면 [표 1]과 같다. 여기서 작은 외란은 외란의 크기가 0.02인 경우이고, 큰 외란은 외란의 크기가 2인 경우로 두 경우의 외란주기는 동일하다. 외란이 작을수록 기존의 LQR과 같은 성능을 가짐을 알 수 있다.

Table 1. Performance Of Controller with Disturbance

외란	작은 외란	큰 외란
외란 고려한 상태 피드백 제어기	2.6678e-3	2.2364e+1
외란을 고려하지 않은 상태 피드백 제어기	2.6687e-3	2.3259e+1

외란이 시스템에 가해지는 경우로 롤축에 외란 w_R 과 피치축에 외란 w_P 가 가해지는 경우를 생각해 보자. 이때 가해지는 외란의 특성은 다음과 같다.

Table 2. Disturbance Characteristics

	크기	고유주파수	댐핑계수
w_R	2	0.1 Hz	0.05
w_P	2	0.9 Hz	0.01

그림 [1]은 기존 목적함수에 피치값의 특정 고주파 성분값을 포함하여 제어기를 설계한 결과이다. 피치값의 궤적을 기존 LQR과 비교하면 고주파 외란의 효과가 줄어들었음을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 기존의 LQR제어기 설계 기법에 있어서 가중함수를 변화시켜 제어기를 설계하는 방법을 지양하고, 시스템이 작동하는 외부적 환경중 하나인 외란의 형태를 고려하여 제어기를 설계할 수 있는 방법을 제안하였다. 특정 주파수 성분을 가진 외란의 시스템에 대한 영향을 줄이기 위하여 제안된 방법을 인공위성 시스템 제어기 설계에 적용하여 제안된 방법의 실용성 및 타당성을 검증하였다.

참고 문헌

- [1] Ogata, K., *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [2] Anderson, B.D.O. and Moore, J.B. *Optimal Control*,

Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.

[3] Kirk, D.E., *Optimal Control Theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1970.

[4] Kailath, T., *Linear System Theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980.

[5] Lewis, F.L., *Optimal Control*, John Wiley & Sons, Inc., New York., 1980.

[6] Green, M. and David J.N., *Linear Robust Control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.

[7] Wie, B. and Liu, Q., "Classical and Robust H_∞ Control Redesign for the Hubble Space Telescope," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, No. 6, Nov 1993, pp. 1069-1077.

[8] Gupta, N. K., "Frequency-Shaped Cost Functionals: Extension of Linear-Quadratic-Gaussian Design Methods," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 3, No. 6, Nov 1980, pp. 529-535.

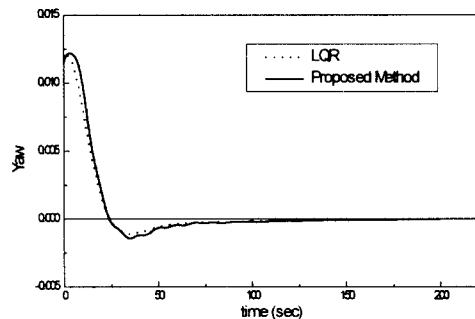
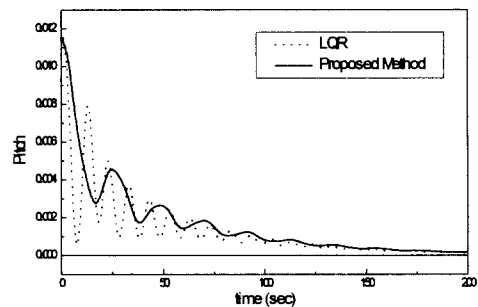
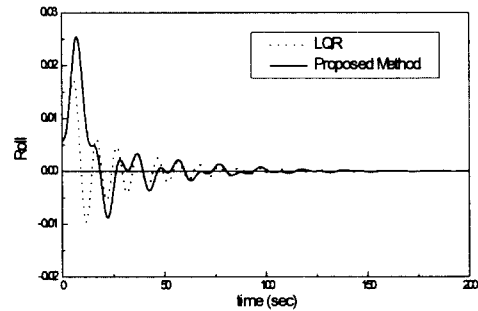


Fig. 1 Time Histories