

## 제한된 제어 입력을 갖는 시스템에 대한 시간 지연 제어기의 설계

### Design of Time Delay Controller for a System with Bounded Control Inputs

\*변경석\*, 송재복\*\*

\*고려대학교 기계공학과 (Tel : +82-2-929-8501; E-mail: byeonks@kucncx.korea.ac.kr)

\*\*고려대학교 기계공학과 (Tel : +82-2-3290-3363; Fax : +82-2-928-9769; E-mail: jbsong@kucncx.korea.ac.kr)

**Abstracts** Reference models are used in many control algorithms for improvement of transient response characteristics. They provide desired trajectories that the plant should follow. Most control systems have bounded control inputs to avoid saturation of the plant. If we design reference models that do not account for limits of control inputs, control performance of the system may be deteriorated. In this paper, therefore, the way of determining variable reference models for TDC(time delay control) technique is proposed. The variable reference model is determined based on the information of bounded control inputs and reference inputs. This proposed method is also verified by application to the position control experiment using the BLDC motor.

**Keywords** Time Delay Control, Variable Reference Model, Bounded Control Inputs

### 1. 서론

시간 지연 제어(Time Delay Control, 이하 TDC 라 칭함) 범칙은<sup>[1],[2]</sup>, 플랜트에 미지의 동역학과 예측하지 못하는 외란이 존재하더라도 과거의 몇 샘플링 주기 동안의 시스템의 입출력 정보를 이용하여 미지의 동역학과 외란의 항들을 제거하고, 기준 모델에 의해 주어지는 원하는 동역학으로 치환함으로써, 플랜트의 상태 변수가 원하는 궤적, 즉 기준 모델을 정확하게 추종하도록 하는 제어 기법이다. 이러한 TDC 기법은 상태 공간 방식에서 기술되며, 기준 모델을 사용한다는 특징을 갖는다.

기준 모델은 TDC 뿐만 아니라 모델 기준 적응 제어(MRAC)<sup>[3]</sup>나 모델 기준 학습 제어<sup>[4]</sup> 등에서도 사용되어 제어 시스템의 원하는 궤적을 생성하므로, 제어기의 설계 시에 선정된 기준 모델에 의해 제어 시스템의 추종 성능이 결정된다. 그러나, 제어의 대상이 되는 대부분의 플랜트는 제어 입력의 크기에 제한이 있으므로 제어 시스템의 추종 성능에는 한계가 존재하게 되며, 기준 모델의 선정 시에도 이러한 한계를 고려하여야만 한다.

한편, 제어 시스템에 존재하는 제어 입력 크기의 제한에 대해서 여러 측면에서 연구가 수행되어 왔다. Lu는 GSMC (global sliding mode control)를 제안하였고<sup>[5]</sup>, Spong은 ODS (optimal decision strategy)를 사용한 로봇 매니플레이터에서의 궤적 추종 성능의 개선을 연구하였다<sup>[6]</sup>. 이 중에서 GSMC는 슬라이딩 모드 제어기에서 다항식을 이용하여 플랜트의 초기 조건이 슬라이딩 표면에 존재하도록 슬라이딩 표면을 설계함으로써 최대 제어 입력과 최소 제어 입력을 추정하여 제어 입력의 제한을 고려하는 제어 기법이다.

본 논문에서는 GSMC를 참고하여 기준 모델을 이용하여 TDC에서 제어 입력의 범위를 추정하고, 이를 통하여 기준 모델의 선정 기준을 제시하고자 한다. 이를 위해 시간 지연 제어기에서 제어 입력의 제한으로 인해 발생하는 제어 시스템의 한계를 밝히고, 이러한 한계를 고려하여 기준 모델을 적절히 선정하는 가변 기준 모델 방식에 대해서 연구를 수행한다. 그리고 제안된 가변 기준 모델을 모터 제어 시스템에 적용한 실험 결과를 예로 보이고자 한다. 2장에서 주 제어 범칙인 시간 지연 제어 법칙에 대해 간단히 살펴보고, 3장에서 제어 입력의 한계로 인한 제어 시스템의 한계와 가변 기준 모델에 대해 설명한다. 4장에서 가변 기준 모델을 사용한 모터 제어 실험 결과를 고찰한 다음, 5장에서 결론을 도출하기로 한다.

### 2. 시간 지연 제어 법칙

본 연구의 주 제어 알고리즘인 시간 지연(TDC) 법칙에 대해서 간단히 설명하기로 한다.[1],[2] 다음과 같은 형태의 상태 방

정식으로 표현될 수 있는 비선형 시변 플랜트를 고려하여 보자.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t) \quad (1)$$

여기서,  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ 는 상태 벡터,  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^r$ 는 제어 벡터,  $\mathbf{d}(t)$ 는 미지의 외란 벡터를 각각 표시한다. 플랜트의 동역학은 기지의 동역학 벡터인  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 와 미지의 동역학 벡터인  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ 로 나누어 생각할 수 있다. 한편, 제어 행렬인  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}^{n \times r}$ 은 잠정적으로 기지의 행렬이라 가정한다. 가제어성(controllability) 및 구조적 정합(structural matching) 조건을 만족시키는 비선형 MIMO 시스템은, 일반성을 잃지 않고 다음과 같은 표준형으로 표시될 수 있다. 즉, 식 (1)의 각 행렬 및 벡터는 다음과 같이 분할될 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_q(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{Bmatrix}; \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{f}_r(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}; \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{(n-r) \times 1} \\ \mathbf{h}_r(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{(n-r) \times r} \\ \mathbf{B}_r(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}; \mathbf{d}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{(n-r) \times 1} \\ \mathbf{d}_r(t) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서,  $\mathbf{x}_r, \mathbf{f}_r, \mathbf{h}_r$  및  $\mathbf{d}_r$ 은  $\mathcal{R}^{r \times 1}$ ,  $\mathbf{x}_q$ 는  $\mathcal{R}^{(n-r) \times 1}$ 이며,  $\mathbf{B}_r \in \mathcal{R}^{r \times r}$ 은 비특이 행렬이다. 또한,  $\mathbf{T}$ 는  $(n-r) \times n$  행렬이며, TDC 법칙의 유도에 직접 관련이 되지 않으므로 자세한 설명은 생략한다.

비선형 시변 시스템으로 표현되는 다음과 같은 기준 모델을 고려하자.

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \Phi(\mathbf{x}_m(t), \mathbf{r}(t)) \quad (3)$$

이 때,  $\mathbf{x}_m(t) \in \mathcal{R}^n$ 는 기준 모델 상태 벡터,  $\mathbf{r}(t) \in \mathcal{R}^r$ 는 기준 입력 벡터이다. 기준 모델은 플랜트의 상태 벡터가 추종해야 할 기준이 되는 상태 벡터를 생성해 주는 역할을 한다.

기준 모델의 상태 벡터와 플랜트의 상태 벡터의 차인 오차 벡터를

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_m(t) - \mathbf{x}(t) \quad (4)$$

로 정의하면, 원하는 오차 동역학은 일반적으로

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_e \mathbf{e}(t) \quad (5)$$

표현할 수 있으며, 여기서  $\mathbf{A}_e$ 는 오차 시스템 행렬이다. 모든 고유치가  $s$ -평면 상의 좌반 평면에 위치하도록 행렬  $\mathbf{A}_e$ 를 선정하면, 시간이 경과함에 따라 오차 벡터가  $\mathbf{0}$ 으로 수렴하게 되어 오차 동역학은 점근적으로 안정하게 된다(asymptotically stable). 이 때, 기준 모델 및 오차 시스템 행렬도 다음과 같이 분할될 수 있다.

$$\mathbf{x}_m(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{mq}(t) \\ \mathbf{x}_{mr}(t) \end{Bmatrix}; \mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} -\mathbf{T} \\ \mathbf{A}_{er} \end{bmatrix} \quad (6)$$

한편, 식 (4)와 (5)로부터,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_m(t) - \mathbf{A}_e \mathbf{e}(t) \quad (7)$$

의 관계식을 얻을 수 있으며, 이 식을 (1)에 대입하면

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t) \mathbf{u}(t) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) - \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t) - \mathbf{d}(t) + \dot{\mathbf{x}}_m(t) - \mathbf{A}_e \mathbf{e}(t) \quad (8)$$

을 얻게 된다. 식 (2)와 (6)을 (8)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_r(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = -\begin{bmatrix} \mathbf{T} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{f}_r(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_r(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{mq}(t) \\ \mathbf{x}_{mr}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{T} \\ \mathbf{A}_{er} \end{bmatrix} \mathbf{e}(t) \quad (9)$$

을 얻는다. 따라서 위의 분할된 행렬-벡터 식으로부터 다음과 같은 벡터 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{B}_r(\mathbf{x}(t), t) \mathbf{u}(t) = -\mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t), t) - \mathbf{h}_r(\mathbf{x}(t), t) - \mathbf{d}_r(t) + \dot{\mathbf{x}}_{mr}(t) - \mathbf{A}_{er} \mathbf{e}(t) \quad (10)$$

이 때,  $\mathbf{B}_r(\mathbf{x}, t)$ 은  $r \times r$  비특이 행렬이므로 역행렬이 존재하게 되어, 식 (10)을 만족시키는 제어 입력  $\mathbf{u}(t)$ 를 구할 수 있다.

그러나,  $\mathbf{h}_r(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}_r(t)$ 가 미지의 함수이므로, 제어 법칙 (10)을 바로 구현하는 것은 불가능하다. 따라서, 이 미지 함수의 추정치인  $\hat{\mathbf{h}}_r(\mathbf{x}, t) + \hat{\mathbf{d}}_r(t)$ 를 구하여야 한다. 식 (7)을 (10)에 대입하면, 이들 미지의 항은

$$\mathbf{h}_r(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}_r(t) = \dot{\mathbf{x}}_r(t) - \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t), t) - \mathbf{B}_r(\mathbf{x}(t), t) \mathbf{u}(t) \quad (11)$$

로 표시된다. 만약 시간 지연(time delay)  $L$ 이 충분히 작고,  $\mathbf{h}_r(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}_r(t)$ 가 연속 함수라면, 시간  $t$ 에서의 함수값  $\mathbf{h}_r(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}_r(t)$ 와 시간  $(t-L)$ 에서의 함수값  $\mathbf{h}_r(\mathbf{x}, t-L) + \mathbf{d}_r(t-L)$ 은 거의 동일하다고 가정할 수 있다. 따라서  $\mathbf{h}_r(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}_r(t)$ 의 추정치는

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_r(\mathbf{x}(t), t) + \hat{\mathbf{d}}_r(t) &\approx \mathbf{h}_r(\mathbf{x}(t-L), t-L) + \mathbf{d}_r(t-L) \\ &= \dot{\mathbf{x}}_r(t-L) - \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t-L), t-L) - \mathbf{B}_r(\mathbf{x}(t-L), t-L) \mathbf{u}(t-L) \end{aligned} \quad (12)$$

로 나타낼 수 있다. 즉, 미지의 함수에 대한 추정치가 과거의 측정치, 상태 변수 및 제어 입력에 대한 정보로부터 구해진다.

한편,  $\mathbf{B}_r(\mathbf{x}(t), t)$ 가 미지이거나 불확실한 경우에는 이의 추정치인  $\hat{\mathbf{B}}_r(t)$ 를 사용하며, 식 (12)를 (10)에 대입하면 다음과 같은 시간 지연 제어 법칙이 얻어진다.

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{B}}_r^{-1}(t) \left\{ -\mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}_r(t-L) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t-L), t-L) + \hat{\mathbf{B}}_r(t-L) \mathbf{u}(t-L) + \dot{\mathbf{x}}_{mr}(t) - \mathbf{A}_{er} \mathbf{e}(t) \right\} \quad (13)$$

위의 제어 법칙은 시간 지연  $L$ 을 샘플링 주기  $T_s$ 와 동일하거나 정수배로 취함으로써 이산 제어 시스템으로 쉽게 구현할 수 있다.

### 3. 가변 기준 모델

대부분의 플랜트는 입력되는 제어 신호의 크기에 제한을 가지게 되며, 이러한 제한으로 인하여 제어 시스템의 추종 성능에도 한계가 존재하게 된다. 예를 들어, 모터와 부하 관성으로 구성된 시스템을 제어할 때 제어 신호인 전압을 크게 인가할수록 시스템의 응답성은 향상되지만, 모터에 인가되는 전압을 어느 한계 이상으로 크게 할 수는 없다.

이러한 제어 입력의 제한은 그림 1과 같이 포화 요소로 모델링할 수 있다. 제어기에서 계산된 제어 신호가 포화 범위 내에 있는 값이면 그대로 플랜트에 입력되고, 포화 범위보다 크거나

작으면 제한값( $U_{\max}, U_{\min}$ )이 플랜트에 입력된다.

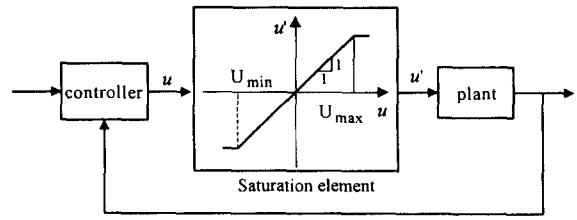


Fig. 1 Saturation of control signals

한편, MRAC나 시간 지연 제어와 같은 여러 제어 기법에서는 플랜트가 이상적으로 추종하기를 원하는 제적을 생성하기 위해서 기준 모델을 사용한다. 편의상 가장 단순한 형태인 1차의 선형 기준 모델을 고려해 보자.

$$\dot{x}_m(t) = a_m x_m(t) + b_m r(t) \quad (14)$$

여기서,  $x_m(t)$ 은 기준 모델의 상태 변수,  $r(t)$ 는 기준 입력이다. 그림 2는 기준 입력으로 스텝 함수가 주어지는 경우의 기준 모델의 상태 변수를 보여준다. 시간 지연 제어기는 플랜트가 이 상태 변수 값을 추종하도록 제어 신호를 계산하게 된다. 이 때, 현재 기준 입력과 과거 기준 입력 사이의 차를 기준 입력의 변화량  $\Delta r(t)$ 라고 부르기로 한다.

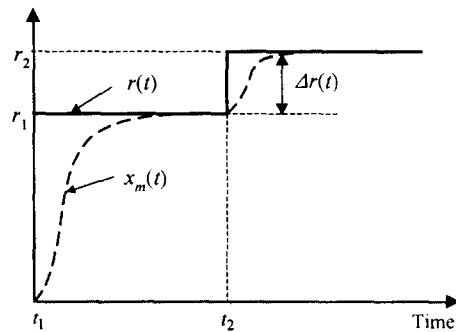


Fig. 2 Reference model subject to reference input of step function

만약 상태 변수  $x_m(t)$ 가 기준 입력  $r(t)$ 를 매우 빠르게 추종하도록 기준 모델을 선정한다면, 플랜트가  $x_m(t)$ 를 제대로 추종하지 못하는 경우가 발생하게 된다. 즉, 큰 오버슈트가 발생하거나 큰 오차에 근거하여 산출된 제어 신호가 플랜트의 포화 범위를 벗어나는 큰 값을 가질 수도 있다. 시간 지연 제어기는 이러한 경우에도 식 (13)에서 알 수 있듯이 제어기의 출력(그림 1에서  $u$ )이 시스템의 입력으로 간주되고, 이 값의 시간 지연 항(즉,  $u(t-L)$ )이 제어 입력의 계산을 위해 제어기에 사용되게 된다. 따라서 제어기에서 플랜트의 입력으로 간주한 값(그림 1에서  $u$ )과 실제 플랜트의 입력(그림 1에서  $u'$ ) 사이에 차이가 생겨서 제어기의 출력은 더욱 커지게 된다. 이로 인해 오버슈트나 리밋 사이클이 발생하거나 시스템의 안정성이 저하된다. 반면에, 상태 변수가 기준 입력을 느리게 추종하도록 기준 모델을 선정한다면, 플랜트가  $x_m(t)$ 를 충분히 추종할 수는 있지만 응답성이 저하되는 문제가 발생하게 된다.

따라서 안정성을 저하시키지 않으면서 동시에 우수한 응답성을 발휘할 수 있는 방식을 찾는 것이 바람직하다. 이를 위해서 본 연구에서는 시간 지연 제어기에서 제어 입력과 기준 모델 사이의 관계를 구하고, 이 관계로부터 기준 모델을 선정하는 방법을 제안하고자 한다.

우선 제어 신호가 포화 범위 내에 존재할 조건을 구해 보자.

시간 지연 제어기의 제어 입력은 식 (13)으로 계산된다. 만약 기준 모델이 적절하게 선정되어 제어 입력이 제한 범위 내에 존재 하면서 제어 시스템이 기준 모델을 충분히 잘 추종할 수 있다면, 근사적으로 제어 입력과 기준 모델 사이의 관계를 유도할 수 있다.

제어 대상이 되는 플랜트가 기준 모델을 잘 추종한다면, 다음과 같이 플랜트의 상태 벡터가 기준 모델의 상태 벡터와 거의 같다고 가정할 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) \cong \mathbf{x}_m(t) \quad \text{또는} \quad \mathbf{x}_r(t) \cong \mathbf{x}_{mr}(t) \quad (15)$$

이러한 가정으로부터 기준 모델과 플랜트의 상태 벡터의 차이인 상태 오차  $\mathbf{e}(t)$ 가  $\mathbf{0}$ 이 되므로, 식 (13)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}(t) \cong \mathbf{u}_n(t) = \hat{\mathbf{B}}_r^{-1}(t) \left\{ \hat{\mathbf{B}}_r(t-L) \mathbf{u}_n(t-L) - \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t-L), t-L) + \dot{\mathbf{x}}_{mr}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{mr}(t-L) \right\} \quad (16)$$

여기서,  $\mathbf{u}_n$ 은 오차가  $\mathbf{0}$ 일 때의 공칭 제어 입력을 의미한다. 이 식을 정리하면

$$\hat{\mathbf{B}}_r(t) \mathbf{u}_n(t) - \hat{\mathbf{B}}_r(t-L) \mathbf{u}_n(t-L) = -\mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t-L), t-L) + \dot{\mathbf{x}}_{mr}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{mr}(t-L) \quad (17)$$

이 되고, 식 (17)을 같은 시간 인덱스를 가진 항끼리 정리하면

$$\hat{\mathbf{B}}_r(t) \mathbf{u}_n(t) + \left\{ \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}_{mr}(t) \right\} = \hat{\mathbf{B}}_r(t-L) \mathbf{u}_n(t-L) + \left\{ \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t-L), t-L) - \dot{\mathbf{x}}_{mr}(t-L) \right\} = \mathbf{C} \quad (18)$$

이 된다. 식 (18)은 시간에 관계 없이 일정한 상수 벡터  $\mathbf{C}$ 가 존재함을 의미한다. 이 식으로부터 공칭 제어 입력과 제어 행렬, 기지의 동역학 벡터 사이의 관계를 간단히 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}_n(t) = \hat{\mathbf{B}}_r^{-1}(t) \left\{ \dot{\mathbf{x}}_{mr}(t) - \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{C} \right\} \quad (19)$$

여기서, 상수 벡터  $\mathbf{C}$ 는 오차가  $\mathbf{0}$ 이거나 작을 때의 공칭 제어 입력, 기준 모델 상태 벡터의 미분치, 기지의 동역학 벡터 등으로부터 산출할 수 있다.

이러한 과정을 통해 얻은 식 (19)의 관계로부터 기준 모델의 선정 조건을 구할 수 있다. 즉, 식 (19)로부터 공칭 제어 입력의 최대값  $\mathbf{u}_{\max}(t)$ 과 최소값  $\mathbf{u}_{\min}(t)$ 을 계산할 수 있으므로, 공칭 제어 입력이 포화 영역으로 가지 않도록 하려면 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\mathbf{U}_{\min} \leq \mathbf{u}_{\min}(t), \mathbf{u}_{\max}(t) \leq \mathbf{U}_{\max} \quad (20)$$

여기서,  $\mathbf{U}_{\min}$ 과  $\mathbf{U}_{\max}$ 는 그림 1에 나타나 있듯이 포화 영역의 경계를 나타낸다.

기준 모델에 입력되는 기준 입력이 변화할 때마다 이러한 조건을 만족하도록 기준 모델을 갱신할 수 있는데, 이를 가변 기준 모델(variable reference model)이라 부르기로 한다. 이러한 가변 기준 모델을 통해서 제어 입력의 제한 범위 내에서 최대의 제어 성능을 발휘하는 제어기를 구성할 수 있게 된다. 만약 기준 모델이 고유 진동수나 감쇠비와 같은 파라미터로 표현된다면 식 (19)과 조건 (20)이 기준 모델의 파라미터를 선정하는 기준을 제공할 수 있다.

## 4. 실험

### 4.1 실험 장치

제안된 가변 기준 모델의 성능을 확인하기 위하여 모터의 위치를 제어하는 실험을 수행하였다. 사용된 시스템은 부하로 회전체가 연결된 BLDC 모터이다.

제어기에서 계산된 제어 입력은 PWM 신호 발생 회로를 거쳐

서 BLDC 모터 구동 회로에 의해 모터를 구동하게 되고, 모터의 각위치는 모터 축에 연결된 엔코더에서 발생하는 신호를 계수하여 얻어진다. 모터의 각속도와 각가속도는 엔코더의 계수로부터 얻은 각을 수치 미분하여 얻는다.

시간 지연 제어기의 구현에 필요한 제어 행렬을 위해 모터 특성 실험을 수행하여 모터의 각 파라미터를 구하였다.

### 4.2 가변 기준 모델의 적용

모터 시스템은 상태 공간에서 다음과 같은 2차 시스템으로 모델링할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{J} \left( f + \frac{K_T K_E}{R_a} \right) \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ \frac{K_a K_T}{J R_a} \end{cases} u \quad (21)$$

여기서, 상태 변수  $x_1$ 과  $x_2$ 는 모터의 각위치를 각속도를 나타내고,  $J, f, K_T, K_E, R_a, K_a$ 는 관성 모멘트, 점성 마찰 계수, 토크 상수, 역기전력 상수, 전기자 저항, 증폭기 이득을 각각 의미한다.

고유 진동수가  $\omega_n$ 이고, 감쇠는 임계 감쇠( $\zeta=1$ )인 2차 시스템을 기준 모델로 정하고, 위의 기준 모델 선정 방법을 적용하여 보자. 기준 모델의 기준 입력  $r(t)$ 가 변할 때마다 새로운 기준 모델을 결정하게 된다. 예를 들어,  $t=0$ 인 순간에 새로운 기준 입력이 주어지며, 그 이전의 기준 입력  $r_0$ 를 플랜트가 잘 추종하였다 가정하면, 초기 상태 벡터는  $\{x_1(0) \ x_2(0)\}^T = \{r_0 \ 0\}^T$ 가 된다. 기준 모델의 감쇠비가 정해져 있으므로(즉,  $\zeta=1$ ) 기준 모델에서 설계 파라미터는 고유 진동수 하나로 된다. 플랜트의 제어 행렬은  $\mathbf{B} = \{0 \ b\}^T$  ( $\mathbf{B}_r = b$ )이고, 기지의 동역학은 없는 것으로 ( $\mathbf{f}_r = 0$ ) 가정한다. 또한, 모터가 원하는 위치에 도달한 후 제어 입력은  $\mathbf{0}$ 이 되므로  $\mathbf{C}$ 는  $\mathbf{0}$ 이 된다. 이러한 조건에서 기준 모델은 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x}_{m1} \\ \dot{x}_{m2} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\omega_n \end{bmatrix} \begin{cases} x_{m1} \\ x_{m2} \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ \omega_n^2 \end{cases} r(t), \quad \text{또는}$$

$$\ddot{x}_{m1}(t) + 2\omega_n \dot{x}_{m1}(t) + \omega_n^2 x_{m1}(t) = \omega_n^2 r(t) \quad (22)$$

여기서,  $r$ 은 현재의 기준 입력을 나타낸다. 계단 입력에 대한 기준 모델의 응답은

$$x_{m1}(t) = r_0 + \left\{ 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \right\} (r - r_0) \quad (23)$$

이다. 이 식을 미분하면

$$\dot{x}_{m1}(t) = x_{m2}(t) = \left\{ \omega_n e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) - \omega_n e^{-\omega_n t} \right\} (r - r_0) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} (r - r_0) \quad (24)$$

이고, 한 번 더 미분하여 2차 도함수를 구하면

$$\ddot{x}_{m1}(t) = \dot{x}_{m2}(t) = \left\{ \omega_n^2 e^{-\omega_n t} - \omega_n^3 t e^{-\omega_n t} \right\} (r - r_0) \quad (25)$$

이다. 이 식을 식 (18)에 대입하면

$$u_n(t) = \frac{1}{b} \left\{ \omega_n^2 e^{-\omega_n t} - \omega_n^3 t e^{-\omega_n t} \right\} (r - r_0) \quad (26)$$

가 되는데, 이 식이 바로 제어 입력과 기준 모델의 고유 진동수와의 관계를 나타내 준다.

기준 입력의 변화량( $\Delta r = r - r_0$ )이  $\mathbf{0}$ 보다 클 때, 제어 입력의 최대값은  $\ddot{x}_{m1}$ 이 최대값을 가지는  $t=0$ 일 때이고, 최소값은  $\dot{x}_{m1}$ 이 최소가 되는  $t=2/\omega_n$ 일 때이다. 이 때의 관계식은 다음과 같이 된다.

$$u_{\max}(t) = \frac{\omega_n^2(r-r_0)}{b}, u_{\min}(t) = -e^{-2} \frac{\omega_n^2(r-r_0)}{b} \cong -0.135 \frac{\omega_n^2(r-r_0)}{b} \quad (27)$$

반면에, 기준 입력의 변화량 ( $\Delta r = r - r_0$ )이 0보다 작을 때, 제어 출력의 최대값은  $\ddot{x}_{m1}$ 의 최소값을 가지는  $t = 2/\omega_n$ 일 때이고, 최소값은  $\ddot{x}_{m1}$ 이 최대값을 가지는  $t = 0$ 일 때이다. 이 때의 관계식은 다음과 같이 된다.

$$u_{\max}(t) = -e^{-2} \frac{\omega_n^2(r-r_0)}{b} \cong -0.135 \frac{\omega_n^2(r-r_0)}{b}, u_{\min}(t) = \frac{\omega_n^2(r-r_0)}{b} \quad (28)$$

식 (27), (28)을 조건 (20)에 대입하면, 공칭 제어 입력이 포화 영역으로 넘어가지 않을 고유 진동수의 범위는 다음과 같다.

$$(r-r_0) > 0 \text{ 이면 } \omega_n = \min \left( \sqrt{\frac{bU_{\max}}{(r-r_0)}}, \sqrt{-7.41 \frac{bU_{\min}}{(r-r_0)}} \right) \quad (29)$$

$$(r-r_0) < 0 \text{ 이면 } \omega_n = \min \left( \sqrt{\frac{bU_{\min}}{(r-r_0)}}, \sqrt{-7.41 \frac{bU_{\max}}{(r-r_0)}} \right) \quad (30)$$

이 식으로부터 계산된 고유 진동수를 사용하여 기준 모델을 선정하고, 이를 시간 지연 제어기의 설계에 이용하여 가변 기준 모델을 구현하게 된다.

#### 4.3 실험 결과 및 고찰

다음은 시간 지연 제어 기법에 제안된 가변 기준 모델을 적용한 임의의 기준 입력에 대한 위치 제어의 실험 결과를 보인 것이다.

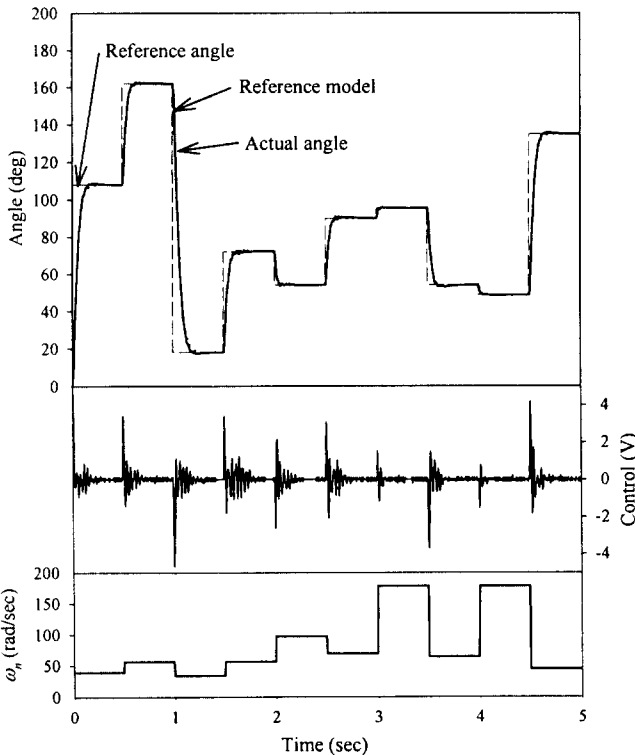


Fig. 3 Position control of BLDC motor by TDC with variable reference model

그림 3의 제어 신호는 시간 지연 제어기에 의해 계산된 제어

입력을 의미하고,  $\omega_n$ 은 기준 모델의 고유 진동수를 의미한다. 즉, 기준 입력의 변화량에 맞추어 기준 모델의 고유 진동수가 가변되는데, 기준 입력의 변화량이 큰 경우에는 기준 모델의 고유 진동수가 작게 설정되어 오버슈트와 제어 신호의 포화가 방지되고, 기준 입력의 변화량이 작은 경우에는 기준 모델의 고유 진동수가 크게 설정되어 보다 신속한 응답을 발생시킬 수 있다. 이 때, 제어 입력은 제한 범위 내에 항상 존재하게 되어 가변 기준 모델의 타당성을 입증해 주고 있다.

## 5. 결론

본 연구에서는 제한된 제어 입력을 갖는 시스템에 대한 시간 지연 제어기를 설계하는 방법으로 가변 기준 모델을 선정하는 방법을 제시하였다. 이 연구를 통해서 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 기준 입력의 변화량, 제어 행렬 및 제어 입력의 제한 범위 등의 정보로부터 가변 기준 모델을 결정하는 방법을 제안하였다.
2. 제안된 가변 기준 모델을 적용한 결과, 기준 입력의 큰 변화에 대해서도 오버슈트가 발생되지 않는 정확한 응답이, 기준 입력의 작은 변화에 대해서는 매우 신속한 응답이 발생되어, 전반적으로 향상된 제어 성능을 얻을 수 있었다.

## 후기

본 연구는 한국전력공사의 지원(과제 번호: 96-007)에 기초전력공학공동연구소의 주관으로 수행되었으며, 이에 관계자께 감사드립니다.

## 참고 문헌

- [1] K. Youcef-Toumi, and O. Ito, "A Time Delay Controller for Systems With Unknown Dynamics," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.112, No.1, pp. 133-142, 1990.
- [2] S. Reddy, "Theory of Time Delay Control and Application to Magnetic Bearings," *Doctoral Thesis*, MIT, 1992.
- [3] J.J. Slotine, and W. Li, "Applied nonlinear control," *Prentice Hall*, pp.315-323, 1991.
- [4] C.C. Cheah, and D. Wang, "A model reference learning scheme for a class of nonlinear systems," *International Journal of Control*, Vol.66, No.2, pp.271-287, 1997.
- [5] Y.S. Lu, and J.S. Chen, "Design of a global sliding-mode controller for a motor drive with bounded control," *International Journal of Control*, Vol.62, No.5, pp.1001-1019, 1995.
- [6] M.W. Spong, J.S. Thorp, and J.M. Kleinwaks, "The Control of Robot Manipulators with Bounded Input," *IEEE transaction on automatic control*, Vol. AC-31, no.6, pp.483-490, 1986.