

Matching 조건을 이용한 강인한 극점배치 방법

Robust Pole Placement Method Using Matching Condition

°신준호*, 정정주**, 서병설*

*한양대학교 전자통신공학과(Tel :+82-2-290-0364; Fax :+82-2-281-9912; E-mail :drifty@apollo.hanyang.ac.kr)

**한양대학교 전자전기공학부(Tel :+82-2-290-1724; Fax :+82-2-298-1796; E-mail :cchung@email.hanyang.ac.kr)

Abstracts In this paper, we presents that for discrete system with matched perturbation of uncertain parameters in the state coefficient matrix A(i.e., with perturbation of A in the range of the input matrix B), the poles of the perturbed closed loop system can be placed into the preassigned circle by the static-state feedback. We discuss the robust stabilization of the system satisfying the matching condition and application to the controller design problem.

Keywords Pole Placement, Matching Condition, Robust stabilization

1. 서론

시스템 행렬에서 perturbation을 고려할 때, perturbed된 시스템의 극점들을 지정된 범위내에 두게하는 문제에 관해서 많은 연구가 이루어져 왔다[1]-[8]. 강인한 안정성(Robust stability) 문제에 관한 연구에는 주파수 영역에서의 해석과 시간 영역에서의 해석이 있다. 주파수 영역에서의 해석은 특이값 분해를 이용해 수행된다[1]. 시간 영역에서의 해석은 Lyapunov 식의 해를 이용하면, 복소평면에서 perturbed된 시스템의 극점들을 지정된 범위 내로 두게하는 perturbation의 한계 조건이 구해진다[2]-[3]. 그러나, Lyapunov 식의 해를 구하는 것은 힘든 일이므로, induced norm과 matrix measure의 몇가지 성질을 이용하여, perturbed된 시스템 행렬 A의 극점들을 지정된 범위내에 두게하는 시스템 행렬 A의 perturbation의 한계조건을 설정할수 있다[4]-[5]. 강인한 가안정성(robust stabilizability) 문제는 앞의 강인한 안정성 문제와는 다른 방향으로 접근된다. 상태 피드백을 가진 제어가능한 시스템의 경우, 시스템 행렬 A와 입력 행렬 B에 일반적인 perturbation을 고려하면, 지정된 범위내로의 임의적인 극점배치는 어려운 문제가 된다[6]-[7]. 입력 행렬인 B행렬에만 작은 perturbation을 가정해도, 상태 피드백에 의한 perturbed된 시스템의 극점배치는 대단히 제한적이다[6]. 그렇지만, 시스템 행렬에 일반적인 perturbation 조건이 아닌 matching 조건을 가정하게 되면, 연속 시스템의 경우, 제한적이지만 설정한 범위이내로 perturbed된 페루프 시스템의 극점배치가 가능하다[7].

본 논문은 이산 시스템의 경우, matching 조건을 가진 제어가능한 시스템의 극점배치의 강인성에 관해 기술한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 이산 시스템에서 matching 조건을 가정하여, perturbed된 페루프 시스템의 극점들을 상태 피드백으로 지정된 원 내부에 둘수 있음을 제안한다. 3장에서는 2장에서 제안된 사실에 기초하여, 이산 시스템의 강인한 가안정성(robust stabilizability)에 관해 기술한다. 그리고, 극점배치를 이용한 제어기 설계에서, 2장에서 제안된 사실이 어떻게 적용될수 있는지를 살펴본다. 끝으로 4장에서는 결론 및 앞으로의 연구 과제를 제시한다.

2. Matching 조건을 이용한 이산 시스템의 강인한 극점배치

식 (2.1)과 같이 주어지는 단일 입출력 이산 시스템을 고려하자. $A(p)$ 는 시스템 행렬 집합으로, $p = p_0 \in P$ 일 때 공칭 시스템 행렬이다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(p)x(k) + Bu(k) \\ u(k) &= -Kx(k) \end{aligned} \quad (2.1)$$

식 (2.1)에서 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times 1}$, $K \in R^{1 \times n}$ 이다. 여기서 식 (2.1)의 이산 시스템은 다음과 같은 두가지 조건을 만족한다고 가정한다.

조건 1 : $p = p_0 \in P$ 인 페라미터에 대해, 시스템은 reachable 하다.

조건 2 : 어떤 행벡터 $a(p)$ 에 대해 $A(p) - A(p_0) = Ba(p)$ 이다.

조건 2는 $A(p) - A(p_0)$ 의 열벡터들이 B 의 범위(range)위에 있음을 의미한다. 여기서 조건 2를 matching 조건으로 명명한다.

본 장에서는 식 (2.1)의 시스템에서 지정된 원 내부로의 극점배치에 관해 기술한다. 2장의 1절은 식 (2.1)의 공칭 페루프 시스템의 극점들이 r 인 경우에 대해 perturbed된 시스템의 극점들을 r 을 중심으로 하는 원 내부로 극점배치할수 있음을 보여준다. 2장의 2절은 공칭 페루프 시스템의 극점들이 r_1, r_2, \dots, r_n 인 경우, 임의의 복소수 r 을 중심으로 하는 원 내부로의 극점배치로 확장될 수 있음을 보일 것이다.

2.1 공칭 페루프 시스템의 극점들이 r 인 경우 강인한 극점배치

식 (2.2)는 식 (2.1)의 공칭 페루프 시스템의 특성 방정식을 나타낸다. 여기서 K 는 공칭 페루프 시스템의 극점들을 r 의 위치로 이동시키는 피드백 행렬이다.

$$\det[zI - A(p_0) + BK] = (z - r)^n \quad (2.2)$$

그리고, perturbed된 페루프 시스템의 특성방정식은 식 (2.3)과 같다.

$$\begin{aligned} \det[zI - A(p) + BK] \\ = \det[zI - A(p_0) + BK + A(p_0) - A(p)] \\ = \det[zI - A(p_0) + BK - Ba(p)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

식 (2.3)을 5장의 1절에 의해, 식 (2.4)와 같이 perturbed된 페루프 특성 방정식을 공칭 페루프 특성 방정식과 $q(z, p)$ 로 분리할수 있다.

$$\begin{aligned} & \det[zI - A(p) + BK] \\ &= \det[zI - A(p_0) + BK] - a(p) \operatorname{adj}[zI \\ & \quad - A(p_0) + BK]B \\ &= (z-r)^n + q(z, p) \end{aligned} \quad (2.4)$$

식 (2.4)의 $q(z, p)$ 는 5장의 2절에 의해 식 (2.5)로 유도된다. 여기서 $q(z, p)$ 는 $n-1$ 차 다항식으로, 계수값들은 오직 p 값에만 의존한다.

$$\begin{aligned} q(z, p) &= -a(p) \operatorname{adj}[zI - A(p_0) + BK]B \\ &= -a(p) \operatorname{adj}[zI - A(p_0)]B \end{aligned} \quad (2.5)$$

정리 1 : 식 (2.1)의 공칭 페루프 시스템의 극점들이 r 이라고 하자. 그러면, 식 (2.1)의 페루프 시스템의 극점들을 상태 피드백으로 극점 r 을 중심으로 하고 반지름이 d 인 원 내부에 둘 수 있다. 여기서 r 은 $|r| < 1$ 인 실수이고, d 는 양의 실수로 설계 패러미터이다.

증명 : 중심이 r 이고 반지름이 d 인 원 C 를 고려하자. 복소수 평면에서 원 C 위의 임의의 z 는 $|z-r|=d$, 즉 $|z-r|^n = d^n$ 를 만족한다. 식 (2.5)에서, 만약 $|q(z, p)|$ 가 원 C 위에서 어떤 $p \in P$ 에 대해서도 d^n 보다 작으면, Rouché 이론에 의해 $(z-r)^n$ 과 $(z-r)^n + q(z, p)$ 는 원 C 내부에서 같은 수의 영점들을 가진다. 즉, 공칭 페루프 특성방정식과 perturbed된 페루프 특성방정식은 원 C 내부에서 같은 수의 극점들을 가진다. 마지막으로, perturbed된 페루프 극점들이 원 C 내부에 존재하게 하는 $q(z, p)$ 의 조건에 대해 살펴본다. 식 (2.5)에서 $q(z, p)$ 는 $n-1$ 차 다항식으로, 다음과 같이 정의된다.

$$q(z, p) = q_0(p) + q_1(p)z + \dots + q_{n-1}(p)z^{n-1} \quad (2.6)$$

z 가 원 C 위에 존재하는 점이면, $|z| \leq |r| + d$ 를 만족하고, 식 (2.6)은 식 (2.7)로 전개된다. 식 (2.7)에서 q_M 은 $q(z, p)$ 의 계수 중 절대치가 최고인 값을 나타낸다.

$$\begin{aligned} |q(z, p)| &\leq |q_0(p)| + |q_1(p)||z| + \dots + |q_{n-1}(p)||z|^{n-1} \\ &\leq q_M[1 + (|r| + d) + \dots + (|r| + d)^{n-1}] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$q_M = \sup\{|q_i(p)|, i=1, \dots, n-1, p \in P_i\}$$

만약 $|r| + d < 1$ 이면, $|q(z, p)| \leq nq_M$ 을 만족한다. 이때 d 를 $d > (nq_M)^{\frac{1}{n}}$ 로 설정하면, $|q(z, p)| < d^n$ 이므로, Rouché 이론에 의해 식 (2.4)는 원 C 내부에서 n 개의 극점들을 지닌다. \square

정리 1에서 공칭 페루프 시스템의 극점들이 r 인 경우, perturbed된 시스템의 극점들을 r 을 중심으로 하는 원 내부에 둘 수 있음을 보였다. 정리 1에서 perturbation의 한계 범위를 정해주는 q_M 은 r 과 d 에 의해 구해진다. 공칭 페루프 시스템의 극점들을 r 로 지정하면, q_M 을 설정하기가 쉽다. 다음 절은 공칭 페루프 시스템의 극점들이 일반적인 경우에 관해서 기술한다.

2.2 공칭 페루프 시스템의 극점들이 r_1, r_2, \dots, r_n 인 경우 강인한 극점배치

식 (2.1)의 공칭 페루프 시스템의 극점들이 r_1, r_2, \dots, r_n 이면, 공칭 페루프 시스템의 특성 방정식은 식 (2.8)과 같다.

$$\det[zI - A(p_0) + BK] = (z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n) \quad (2.8)$$

그리고, perturbed된 페루프 시스템의 특성 방정식은 식 (2.4)에 의해, 식 (2.9)로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \det[zI - A(p) + BK] \\ &= (z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n) + q(z, p) \end{aligned} \quad (2.9)$$

정리 2 : 식 (2.1)의 공칭 페루프 시스템의 극점들이 모두

C_{rd} (중심이 r 이고 반지름이 d 인 원)내부에 존재한다고 가정한다. 식 (2.1)의 페루프 시스템의 극점들을 상태 피드백으로 C_{rd} 내부에 둘 수 있다. 여기서 r 과 d 는 설계 패러미터이다.

증명 : 한 점이 C_{rd} 위에 있다면, 이 점은 $r + de^{i\theta}$ 로 표현할 수 있다. 식 (2.6)에서 z 가 C_{rd} 위의 점이면, 식 (2.6)은 식 (2.10)으로 전개된다.

$$\begin{aligned} |q(z, p)| &\leq |q_0(p)| + |q_1(p)||z| + \dots + |q_{n-1}(p)||z|^{n-1} \\ &\leq q_M[1 + |r + de^{i\theta}| + \dots + |r + de^{i\theta}|^{n-1}] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$|r + de^{i\theta}| < 1$ 이면, 식 (2.10)은 $|q(z, p)| < nq_M$ 으로 쓸 수 있는 것이다. 식 (2.8)에 $z = r + de^{i\theta}$ 를 대입하면, 식 (2.11)을 만족하는 q_M 을 설정한다.

$$\begin{aligned} |(r + de^{i\theta} - r_1)(r + de^{i\theta} - r_2)\dots(r + de^{i\theta} \\ - r_n)| > nq_M \end{aligned} \quad (2.11)$$

식 (2.11)을 만족하도록 r, d 를 설정해 주면, Rouché 이론에 의해 이 perturbation범위내에서 식 (2.1)의 페루프 시스템의 극점들은 모두 C_{rd} 내부에 존재한다. \square

만약 $|r + de^{i\theta}| < r_0$ 이고, r_0 가 1보다 작다면, 식 (2.10)은 식 (2.12)로 표현할 수 있다.

$$|q(z, p)| < q_M \frac{1 - r_0^n}{1 - r_0} \quad (2.12)$$

그러면 정리 2에서, q_M 은 식 (2.13)에 의해 설정된다.

$$\begin{aligned} |(r + de^{i\theta} - r_1)(r + de^{i\theta} - r_2)\dots(r + de^{i\theta} \\ - r_n)| > \frac{1 - r_0^n}{1 - r_0} q_M \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. 이산 시스템의 강인한 가안정성과 극점배치를 이용한 제어기 설계에서의 적용

이 장에서는 정리 2의 내용에 기초하여, 식 (2.1) 시스템의 가안정성에 관해 기술한다. 그리고, 이산 시스템의 극점배치를 이용한 제어기 설계에서 정리 2의 적용에 관해 살펴본다.

3.1 이산 시스템의 강인한 가안정성의 적용

이산 시스템이 안정가능하려면 상태피드백으로 페루프 시스템의 극점들을 단위원 내부에 배치할 수 있으면 된다. 다음의 정리 3은 식 (2.1)에서 시스템의 가안정성에 관한 것이다.

정리 3 : 식 (2.1)의 공칭 페루프 시스템의 극점들이 모두 단위원 내부에 존재한다고 가정한다. 식 (2.1)의 페루프 시스템의 극점들을 상태 피드백으로 단위원 내부에 둘 수 있으면, 이 시스템은 안정가능하다.

증명 : 한 점이 단위원 위에 있으면, 그 점은 $e^{i\theta}$ 로 표현된다. 나머지 부분은 정리 2의 증명과 동일하다. \square

예제 1

식 (3.1)과 같은 3차의 단일 입출력 이산시스템을 고려하자.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.1)$$

이 시스템의 공칭 시스템 행렬 $A(p_0)$ 와 B 는 다음과 같다.

$$A(p_0) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

만약 피드백 행렬이 $K=[0.1 \ 0 \ 0]$ 로 주어지면 공칭 시스템의 페루프 특성 방정식은 식 (3.2)로 주어진다.

$$\begin{aligned} \det[zI - A(p_0) + BK] &= (z + 0.6895)(z - 0.4197 - j0.2786) \\ &= (z - 0.4197 + j0.2786) \\ &= z^2 - 0.15z^2 - 0.325z + 0.175 \end{aligned} \quad (3.2)$$

여기서 식 (3.3)의 matching 조건을 가정하면, 식 (3.4)의 perturbed된 시스템 행렬 $A(p)$ 와 식 (3.5)의 이 시스템의 $q(z, p)$ 를 구할수 있다.

$$A(p) - A(p_0) = Ba(p), \quad a(p) = [p_1 \ 0 \ p_2] \quad (3.3)$$

$$A(p) = \begin{bmatrix} -1/2 + p_1 & 1 & p_2 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ p_1 & 0 & 1/2 + p_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} q(z, p) &= -a(p) \text{adj}[zI - A(p_0)]B \\ &= -[(p_1 + p_2)z^2 + (0.25p_2 - 0.75p_1)z \\ &\quad + (1.125p_1 - 0.125p_2)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

그림 1은 식 (3.2)에서 $z = e^{j\theta}$ 일 때, θ (radian)에 대한 식 (3.2)의 절대치를 나타낸다. 식 (3.1)의 시스템에 식 (3.3)의 matching 조건이 주어졌을 때 이 시스템이 안정가능하려면, 그림 1과 식 (2.11)에 의해 q_M 을 0.21로 설정할수 있다. 즉, 식 (3.5)의 세 계수들의 절대치 값이 0.21보다 작으면, 이 perturbed된 페루프 시스템의 극점들은 모두 단위원 내부에 존재하게 된다. 그림 2는 식 (3.5)의 계수의 절대치가 설정한 q_M 보다 작은 p_1, p_2 의 범위를 표시한다.

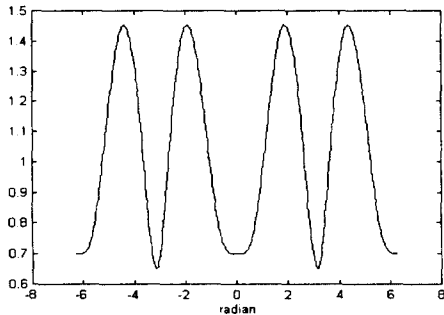


그림 1. $z = e^{j\theta}$ 일 때, 식 (3.2)의 θ 에 대한 절대치

Fig. 1. Absolute value of equation (3.2) for θ at $z = e^{j\theta}$

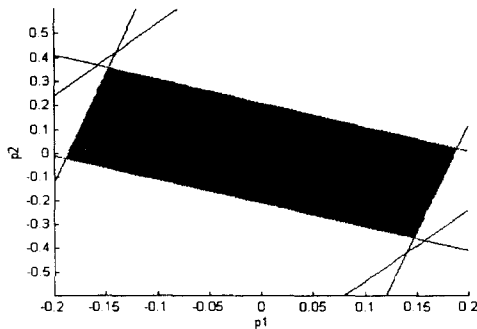


그림 2. 설정된 q_M 을 만족하는 p_1, p_2 의 범위

Fig. 2. The range of p_1, p_2 satisfying specified q_M

3.2 극점배치를 이용한 이산 시스템의 제어기 설계에서의 적용

그림 3은 극점배치를 이용한 이산 시스템의 제어기 설계에서 설계조건이 $\zeta = 0.6, \sigma T = 0.223$ 인 경우, 주어진 설계조건을 만족하는 시스템의 극점들의 범위를 나타낸다. 이 절의 목적은 식 (2.1)의 공칭 페루프 시스템이 정해진 설계조건을 만족할 때, perturbed된 페루프 시스템도 정해진 설계조건을 만족하게 하는 perturbation의 한계범위를 구함이다. 그림 4와 같이 내부에 하나의 원을 설정해서, 정리 2에 의해 식 (2.1)의 페루프 시스템의 극점들을 설정된 원 내부에 두게하는 q_M 을 구한다. 이 perturbation 범위내에서 식 (2.1)의 페루프 시스템은 정해진 설계조건을 만족한다.

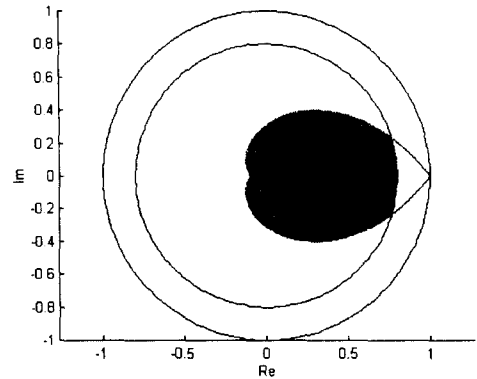


그림 3. $\zeta = 0.6, \sigma T = 0.223$ 을 만족하는 극점들의 범위

Fig. 3. The range of poles satisfying $\zeta = 0.6, \sigma T = 0.223$

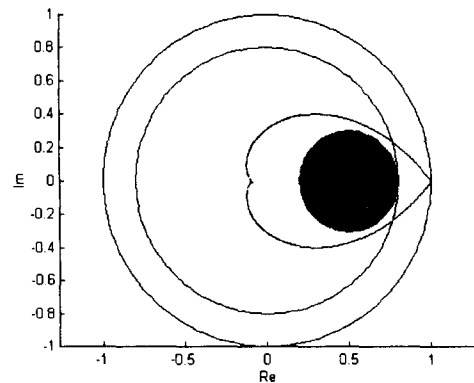


그림 4. 그림 3의 내부에 임의로 설정된 원

Fig. 4. Arbitrary specified circle in the Fig. 3.

예제 2

식 (3.6)와 같은 2차의 단일 입출력 이산 시스템을 고려하자. 이 시스템의 공칭 시스템 행렬 $A(p_0)$ 와 행렬 B는 식 (3.7)과 같다.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.6)$$

$K = [0 \ 0.4]$ 로 주어진다. 공칭 시스템의 특성 방정식은 식 (3.8)과 같다.

$$\det[zI - A(p_0) + BK] = (z - 1/3)(z - 2/3) \quad (3.8)$$

식 (3.9)의 matching 조건이 주어진다. 식 (3.10)의 perturbed된 시스템 행렬 $A(p)$ 를 구할수 있다.

$$A(p) - A(p_0) = Ba(p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [p_1 \ p_2] \quad (3.9)$$

$$a(p) = [p_1 \ p_2]$$

$$A(p) = \begin{bmatrix} 1/3 + p_1 & 1 + p_2 \\ p_1 & 1/6 + p_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

식 (3.11)과 식 (3.12)은 이 시스템의 $q(z, p)$ 과 q_M 이다.

$$q(z, p) = -(p_1 + p_2)z - \frac{5}{6}p_1 + \frac{1}{3}p_2 \quad (3.11)$$

$$q_M = \max(|p_1 + p_2|, \left| \frac{5}{6}p_1 - \frac{1}{3}p_2 \right|) \quad (3.12)$$

그림 3과 같이 설계조건이 $\zeta = 0.6$, $\sigma T = 0.223$ 로 주어진다고 가정한다. 그림 4에서 원의 중심인 $r = 0.5$ 이고, 반지름은 $d = 0.3$ 이다. 그림 5는 식 (3.8)에서 $z = 0.5 + 0.3e^{j\theta}$ 일 때, θ (radian)에 대한 식 (3.8)의 절대치를 나타낸다. 그림 5와 식 (2.13)에 의해 q_M 은 0.034로 설정할수 있다. 이 perturbation 범위내에서 식 (3.6)의 시스템은 주어진 설계조건을 만족한다.

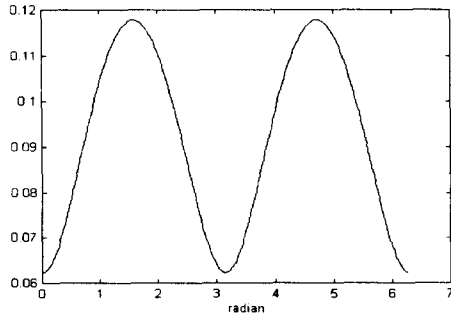


그림 5. $z = 0.5 + 0.3e^{j\theta}$ 일 때, 식 (3.8)의 θ 에 대한 절대치

Fig. 5. Absolute value of equation (3.8) for θ at

$$z = 0.5 + 0.3e^{j\theta}$$

4. 결론

본 논문은 matching 조건하에서, 식 (2.1)의 페루프 시스템의 극점들을 임의의 복소수 r 을 중심으로 하는 설정된 원내부로 둘수 있음을 제안했다. 이 제안된 사실에 기초하여, 식 (2.1)의 이산 시스템의 강인한 가안정성에 관해 기술했다. 그리고 극점배치를 이용한 이산 시스템의 제어기 설계에서 제안된 사실의 적용에 관해 기술했다. 2 장에서 제안된 q_M 을 설정하는 방법은 대단히 conservative하므로, 여기서 제안된 q_M 을 보다 덜 conservative한 값으로 유도해내는 연구가 필요하다.

5. 부록

5.1 식 (2.4)의 유도

식 (5.1)을 증명하기 위해서는 식 (5.2)와 같은 행렬공식이 필요하다.

$$\det(S + vw') = \det(S) + w' \text{adj}(S)v \quad (5.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

식 (5.2)에 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 대신에 S, v, w', I 값들을 대입하면, 식 (5.3)을 유도해낼수 있다.

$$\det(S - vw') = \det S \det(I - w' S^{-1}v) \quad (5.3)$$

$$S: n \times n, \quad I: 1 \times 1, \quad v: n \times 1, \quad w': 1 \times n.$$

5.2 식 (2.5)의 유도

어떤 정방행렬 S 와 열벡터 v, w 에 대해, 식 (5.4)를 증명하기 위해서는 앞에서 보인 식 (5.1)을 이용하면 식 (5.5)에 도달하게 된다.

$$\text{adj}(S + vw')v = \text{adj}(S)v \quad (5.4)$$

$$\det(S + vw')v = \det(S) + w' \text{adj}(S)v$$

$$\begin{aligned} (S + vw')^{-1} \det(S + vw')v &= (S + vw')^{-1} [\det(S) + w' \text{adj}(S)v]v \\ &= (S + vw')^{-1} [S \text{adj}(S)v + vw' \text{adj}(S)v] \\ &= (S + vw')^{-1} (S + vw') \text{adj}(S)v \\ &= \text{adj}(S)v \end{aligned} \quad (5.5)$$

참고문헌

- [1] N. A. Lehtomaki, N. R. Sandell, and M. Athans, "Robustness results in linear-quadratic gaussian based multivariable control design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, no. 1, pp. 75-91, 1981.
- [2] R. K. Yedavalli, "Perturbation bounds for robust stability in linear state space model," *Int. J. Contr.*, vol. 42, no. 6, pp. 1507-1517, 1985.
- [3] Y. T. Juang, Z. C. Hong, and Y. T. Wang, "Lyapunov approach to robust pole-assignment analysis," *Int. J. Contr.*, vol. 49, no. 3, pp. 921-927, 1989.
- [4] S. S. Wang and W. G. Lin, "On the analysis of eigenvalue assignment robustness," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 10, pp. 1561-1564, 1992.
- [5] Y. Fang, "The analysis of eigenvalue assignment robustness," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, no. 6, pp. 1108-1109, 1995.
- [6] A. W. Olbrot and J. Cieslick, "A qualitative bound for robustness of stabilization by state feedback," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 12, pp. 1165-1166, 1988.
- [7] A. W. Olbrot, "Arbitrary robust eigenvalue placement by a static-state feedback," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 8, pp. 1214-1215, 1996.
- [8] J. Kautsky, N. K. Nichols and P. Van Dooren, "Robust pole assignment in linear state feedback", *Int. J. Contr.*, vol. 41, no. 5, pp. 1129-1155, 1985.