

세바퀴 여유구동 모바일 로봇의 기구학/동역학 모델링 및 해석

Kinematic/Dynamic Modeling And Analysis of a 3 Degree-of-Freedom Redundantly Actuated Mobile Robot

박승, 이병주*, 김희국**

*한양대학교 제어계측공학과(Tel : +82-345-400-5218; Fax : +82-345-406-6639; e_mail: bj@hyunpl.hanyang.ac.kr)

**고려대학교 제어계측공학과(Tel : +82-415-60-1443; Fax : +82-415-865-1820)

Abstracts This paper deals with the kinematic and dynamic modeling of a 3 degree-of-freedom redundantly actuated mobile robot for the purpose of analysis and control. Each wheel is driven by two motors for steering and driving. Therefore, the system becomes force-redundant since the number of input variable is greater than the number of output variable. The kinematic and dynamic models in terms of three independent joint variables are derived. Also, a load distribution method to determine the input loads is introduced. Finally we demonstrate the feasibility of the proposed algorithms through simulation.

Keywords Dynamics, Mobile robot, Redundant Actuation.

1. 서론

현재 산업에서 사용되고 있는 모바일 로봇은 어떤 물리적인 유도경로 없이 dead reckoning, beacon systems, inertial navigation systems or computer vision systems들을 응용하여 여러 가지 방면에 이용되고 있는데[3] 대표적인 분야들로는 sea exploration[11], nuclear and explosive handling[8], security[5], military[6], mobility for the disabled[7]들이 있다.

본 논문에서는 유도 경로를 지닌 세바퀴 여유구동 모바일 로봇의 기구학과 동역학 모델링에 대한 방법을 제시한다. 방법론적인 면에서 이러한 접근은 구름 로봇에 대한 해석, 디자인, 모의 실험 그리고 제어에 매우 유용하다. 본 논문에서는 모의 실험을 통하여 제시된 알고리즘의 유용성을 보인다. 이러한 모든 작업은 모바일 로봇의 자율동작에 필수적이다.

일반적인 로봇 매니플레이터가 holonomic인 시스템인데 반하여 구름 로봇은 nonholonomic 시스템이다. 따라서 바퀴의 구름 구속조건은 기구학/동역학 해석들에 있어 holonomic 시스템보다 더욱 복잡하고 어렵게 만든다. 현재 약간의 기구학에 의한 모델링이 보고 되어지고 있다[1][4][12].

Jorge Angeles와 Subir Kumar Saha는 2 자유도 모바일 로봇의 대한 기구학 그리고 동역학 모델링 및 해석을 수행 하였다 [10]. 본 논문에서는 여유구동 3 자유도 모바일 로봇의 경우로 확장하는 연구를 수행한다.

2. 기구학 해석

먼저 본 논문에서 고려하는 모바일 로봇은 세개의 바퀴를 가지고 있고 미끄러짐이 없는 평면을 움직인다고 가정한다. 로봇의 구성은 아래의 그림과 같다. 기구학 해석을 위해서 \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} 의 단위벡터가 차량의 몸체에 고정된 좌표계를 만든다. 각각의 바퀴에는 몸체와의 연결을 위한 회전관절이 존재하는데 조향 역할을 담당하게 된다. 또 바퀴는 모두 구동이 가능하다. 다시 말하면 각각의 바퀴는 구동과 조향의 기능을 모두 지닌다.

그러나, 미끄러짐이 없는 평면을 움직이기 위해서는 3 자유도의 운동을 해야 하므로, 3 개의 입력에 의해서만 운동이 가능하다. 따라서 두개의 뒷바퀴 구동과 앞바퀴의 조향을 독립변수로 잡고 나머지를 종속변수로 잡는다. 이 3 개의 입력에 의해서 차량은 평면 위의 모든 운동을 할 수 있다.

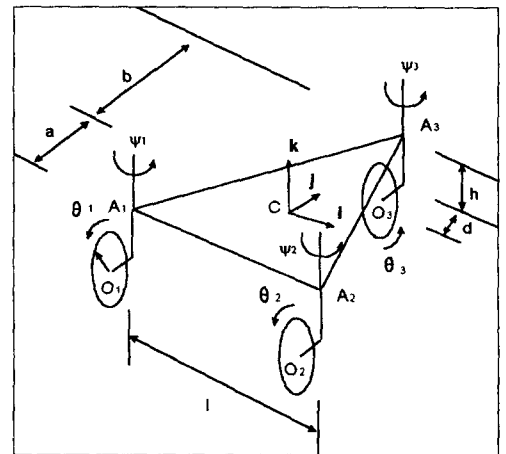


그림 1 : 3차원에서 본 모바일 로봇

2.1 속도 해석

그림 1에 나와 있듯이 바퀴들의 회전속도는 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ 로 정의 하고 반지름 r 을 가진다면 선속도는 아래와 같다

$$\vec{v}_{o_1} = \dot{\theta}_1 (\cos \phi_1 \hat{i} + \sin \phi_1 \hat{j}) \times r \hat{k}, \quad (1)$$

$$\vec{v}_{o_2} = \dot{\theta}_2 (\cos \phi_2 \hat{i} + \sin \phi_2 \hat{j}) \times r \hat{k}, \quad (2)$$

$$\vec{v}_{o_3} = \dot{\theta}_3 (\cos \phi_3 \hat{i} + \sin \phi_3 \hat{j}) \times r \hat{k}. \quad (3)$$

각 바퀴의 바닥에 대한 차량의 중심 C의 선속도는 아래와 같다.

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{o_1} + \dot{\phi}_1 \hat{k} \times \overline{O_1 A_1} + w \hat{k} \times \overline{A_1 C}, \quad (4)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{o_2} + \dot{\phi}_2 \hat{k} \times \overline{O_2 A_2} + w \hat{k} \times \overline{A_2 C}, \quad (5)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{o_3} + \dot{\phi}_3 \hat{k} \times \overline{O_3 A_3} + w \hat{k} \times \overline{A_3 C}, \quad (6)$$

여기서 \vec{v}_{o_i} ($i=1,2,3$)는 바퀴 중심에서의 속도, w 는 모바일 로봇 플랫폼의 회전 속도이다.

식 (4)과 식 (5) 그리고 식 (4)과 식 (6)의 항등식을 이용하여 독립변수와 종속변수 사이의 관계를 나타내는 행렬식을 얻을 수

있는데, 독립변수와 종속변수를 다음과 같이 정의하면

$$\vec{\theta}_a = [\theta_1 \theta_2 \theta_3]^T \quad \vec{\theta}_b = [\phi_1 \phi_2 \theta_3 w]^T \quad (7)$$

이에 따라서 $J_b \vec{\theta}_b = J_a \vec{\theta}_a$ (8)

$$\vec{\theta}_b = [G_a^b] \vec{\theta}_a \quad (9)$$

여기서, $[G_a^b] = J_b^{-1} J_a : (4 \times 3)$, $J_a : (4 \times 3)$, $J_b : (4 \times 4)$ 행렬이고 $\vec{\theta}_a ; (3 \times 1)$, $\vec{\theta}_b ; (4 \times 1)$ 벡터이다.

그리고 위의 차량 중심의 선속도 v_C 는 식 (4)에 식 (9)의 관계식을 삽입하여 독립변수 벡터의 관계식으로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{v}_C = H \vec{\theta}_a \quad (10)$$

여기서 H 는 (2×3) 행렬이다. 식 (10)에서 결정된 \vec{v}_C 와 w 를 혼합하여 (3×1) 출력 벡터 \vec{t}_q 가 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{t}_q = T_q \vec{\theta}_a \quad (11)$$

여기서 $\vec{t}_q = [w \vec{v}_C^T]^T$, T_q 는 (3×3) 선형변환 행렬이다.

2.2 가속도 해석

차량의 물체에 관한 가속도 식을 얻어내기 위해서 식 (11)를 시간에 대하여 미분한다. 그 결과는 아래와 같다.

$$\dot{\vec{t}}_q = T_q \dot{\vec{\theta}}_a + \dot{T}_q \vec{\theta}_a \quad (12)$$

여기서, $\dot{\vec{t}}_q = [\dot{w} \dot{\vec{v}}_C^T]^T$ 그리고 $\dot{\vec{\theta}}_a = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3]^T$ 이다.

2.3 역기구학 해석

조인트의 속도는

$$\dot{\vec{\theta}}_a = T_q^{-1} \dot{\vec{t}}_q \quad (13)$$

여기서 T_q^{-1} 는 T_q 의 역변환을 의미하고 (3×3) 행렬이다.

가속도를 얻기 위해서 식(13)을 식(12)에 대입하여

$$\dot{\vec{\theta}}_a = T_q^{-1} [\dot{\vec{t}}_q - \dot{T}_q \vec{\theta}_a] \quad (14)$$

임을 알 수 있다. 만약 조인트의 각을 알고자 할때는 식(13)을 적분하여 얻는다.

2.4 정기구학 해석

속도와 가속도는 위의 식(13)과 식(14)을 통해 쉽게 얻을 수 있지만 위치의 경우는 고정되어 있는 어떤 기준 좌표계에 대해서 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{X} = x \cos \beta - y \sin \beta \quad (15)$$

$$\dot{Y} = x \sin \beta + y \cos \beta \quad (16)$$

여기서, β 는 기준좌표계 X 축에 대한 차량에 붙어있는 \vec{i} 축의 회전각도, \dot{X} 는 기준좌표축에서의 X 축으로의 속도, \dot{Y} 는 기준좌표축에서의 Y 축으로의 속도, x 는 차량의 물체에 붙어 있는 \vec{i} 축 방향으로의 속도, y 는 차량의 물체에 붙어 있는 \vec{j} 축 방향으로의 속도로 각각 정의한다. 초기조건과 입력 $\vec{\theta}_a$ 를 알면 식 (15)과 식 (16)을 적분하여 기준좌표에서의 위치를 구할 수 있다.

3. 동력학 해석

구속되어 있는 강체로 이루어진 시스템의 동력학을 구하기 위해서 속도에 대한 구속조건을 나타내는 행렬의 natural orthogonal complement를 이용하는 방식을 사용한다.[2]

첫번째, 임의의 3차원 공간을 운동하는 강체의 \vec{i} (twist)는

$\vec{i} = T \vec{\theta}_a$ 를 통해 구할 수 있고, 만약 I 를 강체의 질량중심에 대한 관성질량이라고 한다면 물체의 운동을 나타내는 Newton-Euler 방정식이 정의되고 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$M \dot{\vec{i}} = -W M \vec{i} + \vec{w} \quad (17)$$

여기서, $\vec{w} \equiv [\vec{n}^T \vec{j}^T]^T$ 로 정의되고, \vec{n} 는 물체의 질량중심에서의 관성토크, \vec{j} 는 물체의 질량중심에서의 관성힘을 나타낸다. 그리고 확장된 각속도 W 와 확장 질량 M 는 아래와 같다.

$$W \equiv \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M \equiv \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서, Ω 는 임의의 벡터 \vec{x} 에 대하여 $\Omega \equiv \frac{\partial(\vec{w} \times \vec{x})}{\partial \vec{x}} \equiv \vec{w} \times \mathbf{1}$ 을 나타낸다. 그리고 W 는 (6×6) 행렬, M 는 (6×6) 행렬, 0 는 영 행렬, $m \mathbf{1}$ 는 단위행렬 형태의 질량, $\mathbf{1}$ 은 단위행렬을 나타낸다.

두번째, 만약 p 개의 강체가 존재한다고 하면 각각의 Newton-Euler 방정식은 아래와 같이 주어지며

$$M_i \dot{\vec{t}}_i = -W_i M_i \vec{t}_i + \vec{w}_i^E + \vec{w}_i^C \quad (19)$$

$(i = 1, 2, 3, \dots, p)$

여기서, \vec{w}_i^E 는 외부에서 작용하는 wrench, \vec{w}_i^C 는 일을 하지 않는 구속 wrench로 정의된다. 따라서 p 개의 동력학식은 다음과 같은 압축된 형태로 나타낼 수 있다.

$$M \dot{\vec{i}} = -W M \vec{i} + \vec{w}^E + \vec{w}^C \quad (20)$$

여기서

$$M \equiv \text{diag}[M_1, M_2, M_3, \dots, M_p] : (6p \times 6p) \text{ 행렬,}$$

$$W \equiv \text{diag}[W_1, W_2, W_3, \dots, W_p] : (6p \times 6p) \text{ 행렬,}$$

$$\vec{i} \equiv [t_1 \ t_2 \ t_3 \ \dots \ t_p]^T,$$

$$\vec{w}^E \equiv [w_1^E \ w_2^E \ w_3^E \ \dots \ w_p^E]^T,$$

$$\vec{w}^C \equiv [w_1^C \ w_2^C \ w_3^C \ \dots \ w_p^C]^T : (6p \times 1) \text{ 벡터이다.}$$

세번째, nonholonomic coupling에 의해 생긴 기구학적 구속조건은 미분의 형태로 나타난다. 어떤 시스템의 기구학적 구속조건은 linear homogeneous 식들로 표현될 수 있다. 이것을 식으로 나타내면[10]

$$A \vec{i} = 0 \quad (21)$$

또한 \vec{i} (twist)는 독립변수인 $\vec{\theta}_a$ ($n \times n$)에 대해서

$$\vec{i} = T \vec{\theta}_a \quad (22)$$

의 관계가 성립하게 되므로, 식 (21)과 식 (22)으로부터 아래와 같은 관계식이 형성된다.

$$A T = 0 \quad (23)$$

이로부터 T 는 A 의 orthogonal complement임을 알 수 있다.

네번째, A 와 일을 하지 않는 구속 wrench의 정의에 기인하여 일을 하지 않는 구속 wrench는 A 의 트랜스포즈의 range space에 존재하고 T 의 트랜스포즈의 nullspace에 존재한다. 따라서 식 (20)에 T^T 를 곱해주면 일을 하지 않는 구속 wrench가 소거되고 아래와 같은 식이 구해진다.

$$T^T M \dot{\vec{i}} = -T^T W M \vec{i} + T^T \vec{w}^E \quad (24)$$

그리고 식 (22)에 대한 가속도 관계식은 다음과 같이 정의되고

$$\dot{\vec{i}} = T \dot{\vec{\theta}}_a + \dot{T} \vec{\theta}_a \quad (25)$$

식 (22)과 식 (25)을 식(24)에 대입하면

$$T^T M T \dot{\vec{\theta}}_a = -T^T (M \dot{T} + W M T) \vec{\theta}_a + T^T (\vec{w}^E + \dot{T} \vec{\theta}_a + \vec{w}^C + \dot{T} \vec{\theta}_a)$$

또는

$$K(\theta)\vec{\theta}_a = C(\vec{\theta}, \vec{\theta}_a)\vec{\theta}_a + \vec{\tau} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} \quad (26)$$

여기서, $\vec{\theta}$ 는 독립변수와 종속변수로 이루어진 벡터이다. 그리고

$I \equiv T^T M T : (n \times n)$ 행렬은 일반화된 관성질량,

$C \equiv -T^T(M\dot{T} + WMT) : (n \times n)$ 행렬은 전달 관성질량,

$\vec{\tau} \equiv T^T \vec{w}^J \equiv n$ 차원 벡터는 구동 힘,

$\vec{\gamma} \equiv T^T \vec{w}^G \equiv n$ 차원 벡터는 중력에 의한 일반적인 힘,

$\vec{\delta} \equiv T^T \vec{w}^D \equiv n$ 차원 벡터는 일반화된 소모되는 힘으로 정의된다.

3.2 역동력학 해석

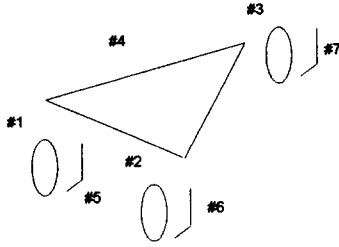


그림 2 : 모바일 로봇의 분리된 각각의 몸체

먼저 모바일 로봇은 그림 2에서와 같이 7 개의 몸체로 이루어졌다고 가정한다. 각각의 몸체에 대하여 아래와 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$\vec{i} = T_a \vec{\theta}_a + T_b \vec{\theta}_b \quad (27)$$

여기서 \vec{i} 는 (42×1) 벡터이고, T_a 는 (42×3) 그리고 T_b 는 (42×4) 행렬이다.

식(9)를 식(27)에 대입하여 일반화된 \vec{i} 에 대하여 정리하면 독립변수에 대하여 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{i} = T \vec{\theta}_a \quad (28)$$

여기서, $T = T_a + T_b J_b^{-1} J_a$ 로 표현된다.

또한 식 (28)을 미분한 형태에는

$$\dot{\vec{i}} = \dot{T} \vec{\theta}_a + \dot{T} \vec{\theta}_a$$

여기서,

$$\dot{T} = \dot{T}_a + \dot{T}_b J_b^{-1} J_a - T_b J_b^{-1} \dot{J}_b J_b^{-1} J_a + T_b J_b^{-1} \dot{J}_a \quad (29)$$

T 과 \dot{T} 을 이용해서 독립관절에 대한 동력학 식도 구해진다.

$$K(\theta)\vec{\theta}_a = C(\vec{\theta}, \vec{\theta}_a)\vec{\theta}_a + \vec{\tau} + \vec{\delta} \quad (30)$$

여기서 I , C 는 (3×3) 행렬이고 $\vec{\tau}$, $\vec{\delta}$ 는 (3×1) 벡터이다. 식 (30)은 원하는 토크를 구할때 사용된다.

3.3 정동력학

정동력학에서는 적분의 단계가 필요하고 임의의 여러가지 적분방법이 사용되는데 여기서는 Runge-Kutta 4차를 사용하였다.

식 (30)는 다시 아래와 같이 steady space 형태로 나타낼 수 있다.

$$\vec{\dot{a}} = P\vec{a} + Q\vec{u} \quad (31)$$

여기서, $\vec{a} = [\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3]^T$, $\vec{u} = [\tau_1 \tau_2 \tau_3]^T$ 로 정의된다. 그리고 $P = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \mathbf{1}_{(3 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \Gamma^{-1} C_{(3 \times 3)} \end{bmatrix}$ (32)

여기서, $\mathbf{1}$ 은 단위행렬을 나타낸다.

4. 힘분배

본 논문에서 고려되는 모바일 시스템은 여유구동을 가지고 있어서 전체구동력을 나누어 구동할 수 있다. 이미 앞에서 구한 식 (9)은 토크와 양립의 성질을 가지고 있어서 아래와 같이 나타낼 수 있으므로

$$\vec{\theta}_p = [G_a^p] \vec{\theta}_a \quad (33)$$

$$\vec{\tau}_a = [G_a^p]^T \vec{\tau}_p \quad (34)$$

전체 구동력을 최소화표제에 대하여 나타내면

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{\tau}_a + [G_a^p]^T \vec{\tau}_p \\ &= [[I] : [G_a^p]^T] \begin{bmatrix} \vec{\tau}_a \\ \vec{\tau}_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

여기서, I 는 (3×3) 단위행렬, $[G_a^p]^T$ 는 (3×4) 행렬,

$[\vec{\tau}_a^T \vec{\tau}_p^T]^T$ 는 (7×1) 벡터이다.

식 (35)에 대한 일반해로 다음과 같이 정의되고

$$\begin{bmatrix} \vec{\tau}_a \\ \vec{\tau}_p \end{bmatrix} = [G]^+ \vec{\tau} + ([I] - [G]^+ [G]) \epsilon \quad (36)$$

여기서, $[G] = [[I] : [G_a^p]^T]$, $[G]^+ = [G]^T ([G][G]^T)^{-1}$ 로 정의된다. 우측변의 첫번째항은 particular solution이며 minimum norm solution을 나타내고, 두번째항은 homogeneous solution이며 내력을 의미한다.

5. 모의 실험 예제

여기서 행한 모의실험은 참고문헌[10]의 예제에서 사용된 동일한 데이터를 사용하였다. β 는 기준좌표계의 X축과 몸체에 고정된 좌표계의 \vec{i} 축이 이루는 각을 나타내며, 이에 대한 경로는 다음과 같이 주어지며 운행경로는 그림 3과 같다.

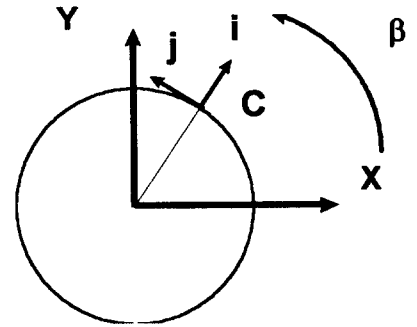
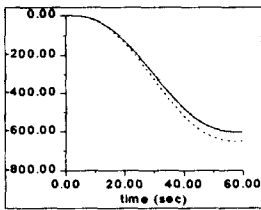


그림 3 : 운행경로

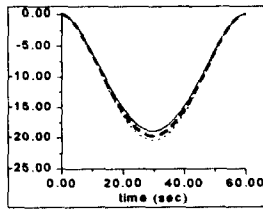
$$\beta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

여기서 $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{20\pi}{60^3}$

$$a_4 = -\frac{30\pi}{60^4}, a_5 = \frac{12\pi}{60^5}$$



(가) 실선: θ_1 가는점선:



(나) 실선: $\dot{\theta}_1$ 가는점선: $\dot{\theta}_2$

굵은점선: $\dot{\theta}_3$

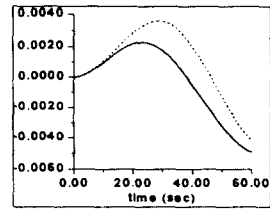


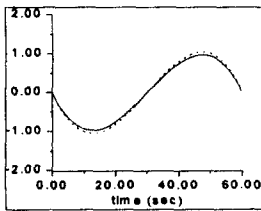
그림 5 : 각 O_1, O_2 에서의 모의 실험 각도 에러

6. 결과

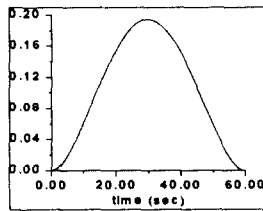
본 논문에서는 세 바퀴 모바일 로봇의 기구학/동력학의 해석, 모델링, 이에 대한 모의 실험 및 힘분배에 대한 연구를 수행하였다. 특별히 모든 바퀴가 조향과 구동을 할 수 있는 여유구동 모바일 로봇을 제안하였다. 추후 과제로는 힘분배에 있어서의 내력에 대한 연구와 articulated mobile robot의 3차원표면 운동술 위한 동력학적 모델링 및 제어 알고리즘 개발 그리고 실제 메카니즘의 구현을 통한 실험적 연구 등을 목표로 한다.

참고문헌

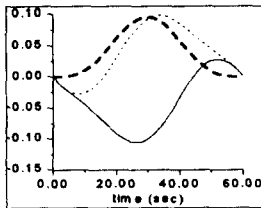
- [1] Agullo. J., Cardona. S., and Vivancos. J., "Kinematic of vechicles with directional sliding wheels", Mech. and Mach. TH., Vol 22. No. 4. pp. 295-301. 1987.
- [2] Angeles. J., and Lee. S., "The formulation of dynamical equations of holonomic mechanical systems using a natural orthogonal complement", Trans. of the ASME. J. of Appl. Mech., Vol. 55. March. pp. 243-244. 1988.
- [3] Boegli. P., "A comparative evaluation of AGV navigation techniques", Proc. of the 3rd Int. conf. on AGVS. Stockholm, Sweden, Oct. 15-17, pp. 169-180, 1985.
- [4] F. Demick Boyden & Steven A. Velinsky. "Dynamic modeling of wheeled mobile robots for high load application" IEEE, pp. 3071-3078. 1994.
- [5] Kajiwara. T., Yamaguchi, J., Kanayama. Y., Yuta. S., Iijima, J., Imasato, K., and Uehara, T., "Development of a mobile robot for security guard", Proc. of the 15th Int. Symp. on Ind. Robots. Tokyo. Japan. Sept. 11-13. Vol. 1. pp. 271-278. 1985.
- [6] Lindauer. B., and Hill. J.D., "Military robotics: an overview", Robotics Age, Nov., pp. 16-21. 1985.
- [7] Madarasz. R.L., Heiny.L.C.,Crompt.R.F.and Mazur.N.M., "The design of autonomous vechicle for the disabled" IEEE. J. of R & A. Vol. RA-2. No. 3. Sept., pp.117-126. 1986
- [8] Meieran. H. B., and Gelhaus. F. E., "Mobile robots designed for hazardous environments", Robotics Eng., March, pp. 10-16, 1986.
- [9] Muir. P.F and Neuman. C.P., "Kinematic modeling of wheeled mobile robots" J. of Robotic Systems. Vol.4. No.2,pp.281-340. 1987b.
- [10] Subir Kumar Saha and Jorge Angeles, "Kinematics and dynamics of a three-wheeled 2-dof AGV", Robotic and Automation, Vol.3. pp.1572-1577, 1989.
- [11] Tanaka. N., "The concept of the advanced robot for support of offshore oil exploration", Proc. of the Int. Conf. on Adv. Robotics, Tokyo. Japan. Sept. 9-10. pp.507-511. 1985.
- [12] Takahashi. T., Nakano. E. Mori. Y. Takayama. K. "A study on the mechanism and control of omni-directional vehicle" Proc. IROS 96. pp. 52-59. 1996.



(다)실선: $\ddot{\theta}_1$ 점선: $\ddot{\theta}_2$

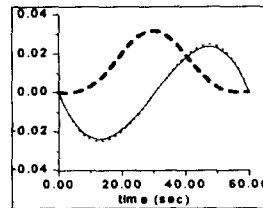


(라)몸체의 회전속도



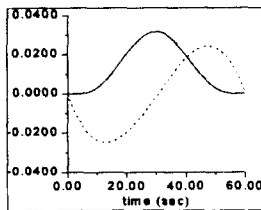
(마)실선: τ_1 가는점선: τ_2

굵은점선: τ_3



(바)실선: τ_1 가는점선: τ_2

굵은점선: τ_3



(사)실선: A_1 와 A_2 에서의
토크
굵은점선: O_3 에서의
토크

그림 4 : (가)각도 (rad) (나)속도 (rad/sec) (다)가속도 (rad/sec²) (라)몸체의 각속도 (rad/sec) (마)토크 (Nm) (바)힘분배한 독립 변수의 토크 (Nm) (사)힘분배한 종속변수의 토크 (Nm)

그림 4는 모바일 로봇이 원운동을 하기 위해서 오른쪽 바퀴의 각도, 속도, 가속도, 토크(τ_1 는 왼쪽바퀴의 구동 토크, τ_2 는 오른쪽 바퀴의 구동 토크, τ_3 는 A_3 에서의 조향 토크)들의 크기가 모두 왼쪽 바퀴보다 크다는 사실을 알 수 있고, A_3 에서 조향을 함으로써 미끄러짐을 막고 운동방향으로의 부드러운 진행을 할 수 있다. 또 그림 4의 (바)와 (사)에서 볼수 있듯이 힘의 분배를 통해 필요한 토크를 모두 균등히 나누어 모터가 가지는 부담을 줄일 수 있다.

그림 5는 정동력학을 이용하여 구한 각도와 역기구학을 이용해 구한 각도의 차이를 나타낸다. 그 결과 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 의 에러가 발생하였고, 이 사실은 적분과정에서 생긴 에러이기 때문에 실제로 응용할 때에는 허용할 수 있는 수치이다.