

## 견실한 H<sub>∞</sub> 필터를 이용한 기동표적의 추적

### Tracking a Maneuvering Target using Robust H<sub>∞</sub> Filter

\*김 준 영\*, 유 경 상\*\*, 권 오 규\*

\* 인하대학교 전자전기컴퓨터공학부 (Tel:+82-32-860-7395; Fax:+82-32-863-5822; E-mail:g9611093@inhavision.inha.ac.kr)

\*\* 두원공업전문대학 전기과 (Tel:+82-334-676-6433; Fax:+82-334-676-7689; E-mail:ksyoo@doowon.ac.kr)

**Abstracts** This paper proposes a robust H<sub>∞</sub> tracking filter to improve the unacceptable target tracking performance for systems with parameter uncertainties. Also, we use here the input estimation approach to account for the possibility of maneuver. Simulation results show that the robust H<sub>∞</sub> tracking filter which is proposed here to solve the systems with all system parameter uncertainties, has a good tracking performance for a maneuvering target tracking problem.

**Keywords** robust H<sub>∞</sub> filter, maneuvering target tracking, parameter uncertainty, input estimation, Kalman filter

#### 1. 서론

기동표적의 추적문제는 전략적 측면에서 매우 중요하기 때문에 GNC(Guidance, Navigation and Control) 분야에서 많은 연구가 진행되어 왔다[1-5]. 표적추적 문제에 사용하는 추적필터를 구분하면 크게 세 가지로 나눌 수 있는데, 최근의 측정데이터에 가중치를 주는 유한기억 필터(Limited memory filter)에 의한 방법, 기동검출 논리(Maneuver detection logic)를 이용하여 기동입력을 보상하는 방법, 여러 개의 부필터(Sub-filter) 출력의 베이시안 합(Bayesian sum)을 이용하는 방법들이 있다. 이 가운데 가장 많이 쓰이는 방법은 기동검출 논리를 이용한 방법이며, 이에 속하는 기법으로는 기동검출시 공정잡음 공분산을 보상하는 Q 보상기법, 표적모델을 변환하는 가변차수 필터기법, 기동입력의 크기 및 기동시작 시간 등을 추정하는 입력추정기법 등이 있다.

기존의 기동검출 및 추적법에서는 추정자로서 대부분 칼만 필터를 사용하는데, 칼만필터를 이용하여 기동표적의 추적을 수행할 때에는 모델링 오차에 대한 필터의 발산문제와 계산량이 많아지는 문제점이 있다. 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 많은 연구가 진행되어 왔으며, 특히 시스템의 모든 변수에 불확실성이 존재하는 가장 어려운 상황에서도 시스템의 추정문제를 원활하게 수행하기 위한 H<sub>∞</sub> 필터링 기법들이 최근에 많이 제안되고 있다[6,7].

이 논문에서는 견실한 H<sub>∞</sub> 필터를 이용한 기동검출 및 추적 방법을 제시한다. 이 방법은 기동검출 및 추적문제에서 발생하기 쉬운 시스템모델과 관측모델에 모델링 오차가 동시에 존재하는 경우에 기동검출과 추적을 원활하게 수행하기 위해 제시하는 새로운 기법이다. 또한 기동검출 및 추적법으로는 제어입력을 갖는 견실한 H<sub>∞</sub> 필터를 이용한 입력추정기법을 이용하는 데 이 기법은 견실한 H<sub>∞</sub> 필터의 특성 때문에 모델링 오차에 대해서 견실한 특성을 가지고 있다.

기동검출 및 추적문제에서 추적필터의 성능은 필터 자체 뿐만 아니라 모델의 적합성에 따라서도 크게 달라지게 된다. 표적모델로서 Singer[5]는 가속도를 영평균 시간상관 자기회귀 과정(Time-correlated auto-regressive process)인 1차 마코프 과정(Markov process)으로 묘사하여 표적모델을 제시하였는데, 이 모델은 표적이 단기간 기동 혹은 작은 크기의 기동을 행할 경우에는 알맞은 모델이 될 수 있으나, 표적이 장기간 혹은 큰 기동을 행할 경우에는 알맞은 모델이 될 수 없다. 이러한 문제를 해결하기 위해 다양한 표적모델이 제시되었는데[1-3], 이 논문에서는 [4]에서 제시한 개선된 모델을 사용할 것이다.

#### 2. 견실한 H<sub>∞</sub> 필터를 이용한 추적법

##### 2.1 견실한 H<sub>∞</sub> 필터[6]

불확실한 선형 시변 이산형 시스템을 고려하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= [A + \Delta A]x(i) + Bw(i) \\ y(i) &= [C + \Delta C]x(i) + Dw(i) \\ z(i) &= Lx(i) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x \in \mathcal{R}^n$ 는 상태벡터,  $w \in \mathcal{R}^q$ 는 잡음벡터로  $\ell_2[0, \infty)$ 에 속한다.  $y \in \mathcal{R}^m$ 는 측정출력치,  $z \in \mathcal{R}^p$ 는 추정되는 상태변수들의 선형결합이다.  $A, B, C, D, L$ 은 알 수 있는 유계의 공칭시스템으로서 다음의 조건을 만족한다.

$$DB^T = 0, DD^T > 0 \quad \forall i, \quad (2)$$

그리고  $\Delta A, \Delta C$ 는 계수 불확실성을 나타낸다. 이러한 불확실성은 아래의 구조와 같이 가정한다:

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} FE \quad (3)$$

여기서  $H_1, H_2, E$ 는 적절한 차원의 이미 아는 실상수 행렬이고,  $F \in \mathcal{R}^{n \times s}$ 는 다음을 만족하는 미지의 시변 행렬이다.

$$F^T F \leq I \quad \forall i, \quad (4)$$

위에서 사용한 뒤틀침자 'T'는 전치행렬을 나타내고,  $I$ 는 적당한 차원의 단위행렬을 나타낸다. 표시  $X \geq Y (X > Y)$ 는  $X - Y$ 를 의미하며 준정치(반면, 정치)를 나타낸다(반면, 정치).

그러므로 식 (3)의 정합조건을 이용하여 견실한 H<sub>∞</sub> 필터를 유도할 수 있다. 우선 기동이 발생하지 않은 경우의 표적모델을 다음과 같이 표현할 때:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= \hat{A}x(i) + \hat{B}\hat{w}(i) \\ y(i) &= \hat{C}x(i) + \hat{D}\hat{w}(i) \\ z(i) &= Lx(i) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A + \gamma^{-2} \bar{B} (I - \gamma^{-2} \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P A, \\ \hat{B} &= \bar{B} (I - \gamma^{-2} \bar{B}^T P \bar{B})^{-1/2}, \\ \hat{C} &= C + \gamma^{-2} \bar{D} (I - \gamma^{-2} \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P A, \\ \hat{D} &= \bar{D} (I - \gamma^{-2} \bar{B}^T P \bar{B})^{-1/2}, \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} B & \gamma H_1 \\ \varepsilon & \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D & \gamma H_2 \\ \varepsilon & \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

그리고  $P = P^T \geq 0$  는 다음의 대수 리카티 방정식의 해이며,

$$P = A^T P A + \gamma^{-2} A^T P \bar{B} (I - \gamma^{-2} \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P A + \varepsilon^2 E^T E \quad (6)$$

모든 구간에서  $I - \gamma^{-2} \bar{B}^T P \bar{B} > 0$  이다.  $\hat{w}(i) \in \mathfrak{R}^{r+r}$  은  $\ell_2[0, \infty)$  에 속하는 잡음신호이고,  $\varepsilon > 0$  은 각 구간에서 선택하는 스케일링 변수이다.  $\gamma > 0$  는 견실한  $H_\infty$  추정에서 얻어야 하는 외란 감쇄 수준이다.

또한  $Q = Q^T \geq 0$  는 다음의 대수 리카티 방정식의 해이며,

$$\begin{aligned}Q &= \hat{A} Q \hat{A}^T - (\hat{A} Q \hat{C}_1^T + \hat{B} \hat{D}_1^T) (\hat{C}_1 Q \hat{C}_1^T + \hat{R}_1)^{-1} \\ &\quad \times (\hat{C}_1 Q \hat{A}^T + \hat{D}_1 \hat{B}^T) + \hat{B} \hat{B}^T\end{aligned} \quad (7)$$

모든 구간에서  $I - \gamma^{-2} L Q L^T > 0$  이다.

여기서

$$\hat{C}_1 = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \gamma^{-1} L \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_1 = \begin{bmatrix} \hat{D} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{R}_1 = \begin{bmatrix} \hat{D} \hat{D}^T & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

식 (7)에서 상태  $x(\cdot)$  에 대한 견실한  $H_\infty$  필터는 다음과 같이 정의한다:

$$\begin{aligned}\hat{x}(i+1) &= \hat{A} \hat{x}(i) + K[y(i) - \hat{C} \hat{x}(i)], \quad \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{z}(i) &= L \hat{x}(i)\end{aligned} \quad (8)$$

그리고 필터의 추정오차는 다음과 같다:

$$e(i+1) = z(i+1) - \hat{z}(i+1) \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned}K &= (\hat{A} \hat{V} \hat{C}^T + \hat{B} \hat{D}^T) (\hat{C} \hat{V} \hat{C}^T + \hat{D} \hat{D}^T)^{-1}, \\ \hat{V} &= Q + \gamma^{-2} Q L^T (I - \gamma^{-2} L Q L^T)^{-1} L Q.\end{aligned}$$

식 (5)는 기동이 존재하지 않을 경우의 표적모델 이므로, 기동입력이 존재하는 경우에 식 (5)는 다음과 같이 수정할 수 있다:

$$\begin{aligned}x(i+1) &= \hat{A} x(i) + \hat{B} \hat{w}(i) + G u(i) \\ y(i) &= \hat{C} x(i) + \hat{D} \hat{w}(i) \\ z(i) &= L x(i)\end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $G u(\cdot)$  가 기동입력항을 나타낸다. 이 시스템에 대한 견실한  $H_\infty$  필터는 다음과 같이 주어진다:

$$\begin{aligned}\hat{x}(i+1) &= \hat{A} \hat{x}(i) + K[y(i) - \hat{C} \hat{x}(i)] + G \hat{u}(i) \\ \hat{z}(i) &= L \hat{x}(i)\end{aligned} \quad (11)$$

## 2.2 입력추정기법에 의한 견실한 $H_\infty$ 추적필터 알고리즘

기동입력이 상수이고( $u(\cdot) = \hat{U}_0$ ), 이 값을 알고 있는 경우에는 식 (11)의 견실한  $H_\infty$  필터를 써서 추적을 할 수 있으며, 이 필터의 잔류치는 다음과 같이 정의된다:

$$r(i) := y(i) - C \hat{x}_0(i+1) \quad (12)$$

여기서  $\hat{x}_0(i)$  는 기동입력이  $\hat{U}_0$  일 때의 견실한  $H_\infty$  필터를 나타낸다. 표적이  $i - N - 1$  시점에서 또 다른 기동을 일으켰을 때, 이 기동입력도 알고 있는 경우에 견실한  $H_\infty$  필터의 추정치를  $\hat{x}_n(\cdot)$  이라 하면, 이 필터의 잔류치는 다음과 같이 정의 된다:

$$\begin{aligned}r_n(i) &:= y(i) - C \hat{x}_n(i+1) \\ &= r(i) - C M_n(i) U_n \\ &= r(i) - \phi_N U_n\end{aligned} \quad (13)$$

여기서

$$\begin{aligned}\hat{x}_n(i) &= \hat{x}(i) + M_n(i) u(i), \quad i > n \\ M_n(i) &= \left[ \prod_{k=i+1}^i M(k) \right] B + \sum_{k=n}^{i-1} \left[ \prod_{l=i+1}^k M(l) \right] \hat{A}^{-1} G, \\ \phi_N &= C M_n(i).\end{aligned}$$

이고,  $N$  은 기동검출을 위한 데이터 관측 구간의 크기이다. 식 (13)의 두번째 동식은 구간  $[i - N - 1, i]$  동안 기동입력이 다음과 같이 상수값  $U_n + \hat{U}_0$  로 고정되어 있다는 가정 하에 유도된 것이다:

$$u(i) = \begin{cases} \hat{U}_0, & i < k - N - 1 \\ U_n + \hat{U}_0, & i \geq k - N - 1 \end{cases} \quad (14)$$

여기서  $U_n$  은 제 2의 기동입력이며 상수로 가정한다. 따라서 식 (13)으로 부터

$$r(k) = \phi_{N-k+1} U_n + r_n(k), \quad i - N \leq k \leq i \quad (15)$$

위와 같이 되는데, 여기에서 잔류치  $r_n(\cdot)$  은 영평균 백색잡음이므로, 식 (15)로 부터 기동입력  $U_n$  의 최소자승추정은 다음과 같다:

$$\hat{U}_n = [\psi^T \psi]^{-1} \psi^T R_n(i) \quad (16)$$

여기서

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi_N \\ \phi_{N-1} \\ \vdots \\ \phi_0 \end{bmatrix}, \quad R_n(i) = \begin{bmatrix} r(i) \\ r(i-1) \\ \vdots \\ r(i-N) \end{bmatrix}.$$

식 (16)의 기동입력 추정치  $\hat{U}_n$  에 의해서 기동검출변수를 구성

하면 다음과 같다:

$$T(i) = \hat{U}_n^T \{E[\hat{U}_n \hat{U}_n^T]\}^{-1} \hat{U}_n \quad (17)$$

제 2의 기동이 없는 조건하에서 ( $U_n = 0$ ), 추정입력  $\hat{U}_n$ 은 평균값이 0이고, 다음의 상호분산을 가진다:

$$E[\hat{U}_n \hat{U}_n^T] = [\psi^T \psi]^{-1} \Pi, [\psi^T \psi]^{-1} \quad (18)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Pi_r &= \phi_N^T \Gamma_r \phi_N + \dots + \phi_0^T \Gamma_r \phi_0, \\ \Gamma_r &= E[r(k)r^T(k)] = R(i). \end{aligned}$$

따라서 기동검출변수  $T(i)$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다:

$$T(i) = R_r^T \psi \Pi_r^{-1} \psi^T R_r \quad (19)$$

식 (19)는 식 (16)과 식 (18)을 식 (17)에 대입하여 얻을 수 있다. 기동검출변수  $T(i)$ 는 기동검출 임계값  $\lambda$ 와 비교되어  $\lambda$ 보다 클 경우에는 기동이 발생된 것으로 판정하여 식 (11)의 제어입력이 있는 견실한  $H_\infty$  필터식에 다음과 같이 기동입력 추정치를 대입하여 보상함으로써 상태추정을 한다:

$$\hat{x}_c(i+1) = \hat{x}(i+1) + M_n(i) \hat{u}(i) \quad (20)$$

여기서

$$\hat{u}(i) = \begin{cases} \hat{U}_0 & , \quad i < k - N - 1 \\ \hat{U}_n + \hat{U}_0 & , \quad i \geq k - N - 1 \end{cases}$$

이고,  $\hat{U}_n$ 은 식 (16)의 기동입력 추정치이고,  $\hat{x}_c(\cdot)$ 는 기동입력 추정치  $\hat{U}(\cdot)$ 을 써서 보상시킨 추정자이다. 이러한 절차를 반복하면 목표물이 또 다른 기동을 일으킨다 하더라도 그 기동입력을 추정하여 지속적으로 표적추적을 수행할 수 있다.

위에서 제시한 표적추적법은 입력추적기법에 근거한 것인데, 이에 속하는 기존의 결과들은 Bogler[1], Chan 등[2]이 제시한 것이 있다. 그런데 이 방법들은 칼만필터를 사용하기 때문에 시스템모델이나 관측모델에 모델링 오차가 있을 경우에는 필터의 발산문제로 인하여 표적추적에 실패하게 되는 문제점을 지니고 있으며, 또한 입력추정과 기동검출에 필요한 계산량이 관측구간 폭의 제곱에 비례하게 되어 계산량 문제도 안고 있다. 그러나 이 절에서 제시한 방법에서는 모델링 오차에 견실한  $H_\infty$  필터를 사용하기 때문에 발산문제를 해소하는 장점을 지니고 있다.

### 3. 모의실험

이 절에서는 모의실험을 통하여 기동표적의 추적문제에 이 논문에서 제안하는 추적 알고리즘을 적용하고, 그 성능을 예증한다. 견실한  $H_\infty$  추적필터의 성능을 확인하기 위한 표적모델은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & T & \tau^2[-1+T/\tau+e^{-T/\tau}] \\ 0 & 1 & \tau[1-e^{-T/\tau}] \\ 0 & 0 & e^{-T/\tau} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ G &= \begin{bmatrix} T^2/2 - \tau^2[-1+T/\tau+e^{-T/\tau}] \\ T - \tau[1-e^{-T/\tau}] \\ 1 - e^{-T/\tau} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]. \end{aligned}$$

이때 샘플링 시간  $T$ 는 1sec이며, 시스템 잡음 및 측정 잡음의 상호분산은 다음과 같다:

$$Q = 2\sigma_m^2/\tau \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

여기서

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{\tau^5}{2} \left[ 1 + \frac{2T}{\tau} - \frac{2T^2}{\tau^2} + \frac{2T^3}{3\tau} - e^{-2T/\tau} - \frac{4T}{\tau} e^{-T/\tau} \right], \\ q_{12} &= \frac{\tau^4}{2} \left[ 1 - \frac{2T}{\tau} + \frac{T^2}{\tau^2} + e^{-2T/\tau} - 2e^{-T/\tau} + \frac{2T}{\tau} e^{-T/\tau} \right], \\ q_{13} &= \frac{\tau^3}{2} \left[ 1 - e^{-2T/\tau} - \frac{2T}{\tau} e^{-T/\tau} \right], \\ q_{22} &= \frac{\tau^3}{2} \left[ -3 + \frac{2T}{\tau} - e^{-2T/\tau} + 4e^{-T/\tau} \right], \\ q_{23} &= \frac{\tau^2}{2} \left[ 1 + e^{-2T/\tau} - 2e^{-T/\tau} \right], \\ q_{33} &= \frac{\tau}{2} \left[ 1 - e^{-2T/\tau} \right]. \end{aligned}$$

각 축의 초기속도는  $x, y, z$  축 모두 0.0m/sec 이고, 각 축의 초기위치는  $x, y, z$  축 모두 0.0m로 가정하였다.

공칭시스템은 안정하다고 가정하고 불확실성은 다음과 같이 취한다:

$$\Delta A = H_1 F E, \quad \Delta C = H_2 F E$$

여기서

$$\begin{aligned} F &= 0 \text{ 과 } 1, \\ H_1 &= [0 \quad \Delta a \quad \Delta a \quad \Delta a \quad \Delta a \quad 0 \quad \Delta a \quad 0 \quad \Delta a]^T, \\ H_2 &= [\Delta c \quad 0 \quad \Delta c]^T, \\ E &= [0.01 \quad 0.02 \quad 0.03 \quad 0.02 \quad 0.03 \quad 0.04 \quad 0.03 \quad 0.04 \quad 0.05]. \end{aligned}$$

설계변수는 다음과 같다:

$$\gamma = 0.5176, \quad \varepsilon = 0.2561$$

<그림 1>과 같이 표적이 40sec 동안 등속운동한 후 가속도 20m/sec<sup>2</sup>의 크기로 20sec 동안 가속운동을 하는 기동표적에 대하여 견실한  $H_\infty$  추적필터와 Bogler 알고리즘[1]을 적용하는 30회의 몬트카를로(Monte Carlo) 모의실험을 수행한 결과를 RMS(Root Mean Square) 추정오차로 나타내었다. <그림 2>는 불확실성이 없는 경우의 견실한  $H_\infty$  추적필터와 Bogler 알고리즘 모의실험 수행 결과이며, <그림 3>은 불확실성이 있는 경우의 견실한  $H_\infty$  추적필터와 Bogler 알고리즘 모의실험 수행 결과이다.

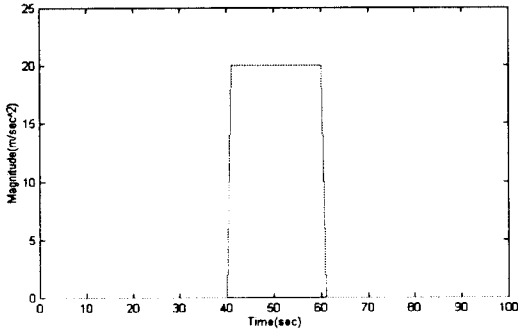
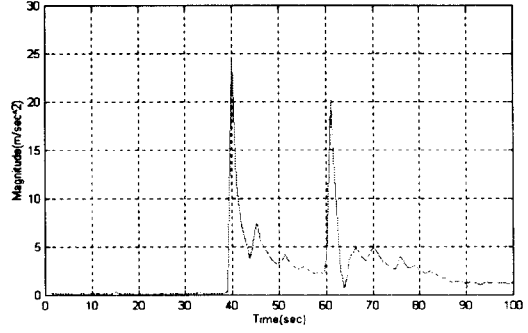
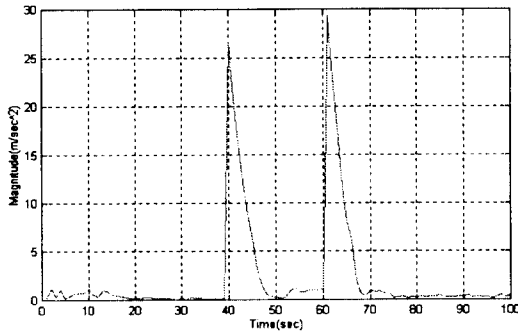


그림 1 기동입력

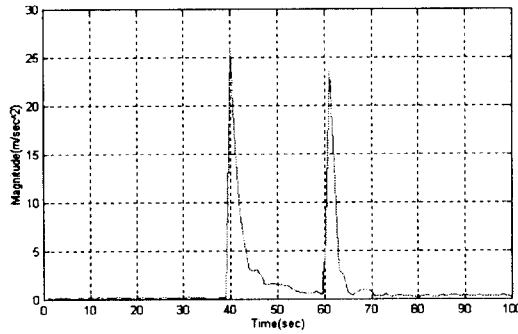


(b) 견실한  $H_\infty$  추적필터

그림 3 모델링 오차가 있는 경우의 추적오차

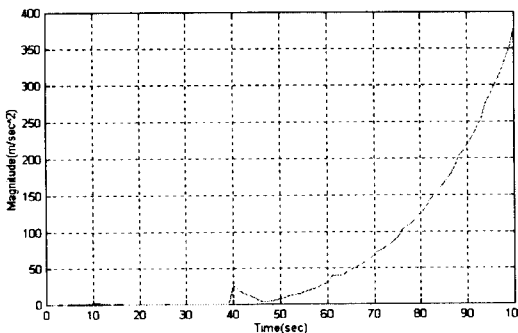


(a) Bogler 알고리즘



(b) 견실한  $H_\infty$  추적필터

그림 2 모델링 오차가 없는 경우의 추적오차



(a) Bogler 알고리즘

이 모의실험 결과들에서 볼 수 있듯이, 모델링 오차가 없는 경우에는 두 추적필터가 모두 만족할 만한 성능을 보이고 있으나, 모델링 오차가 존재하는 경우 Bogler 알고리즘의 추적성능이 견실한  $H_\infty$  추적필터보다 떨어짐을 알 수 있다.

#### 4. 결론

이 논문에서는 견실한  $H_\infty$  필터를 이용하여 표적을 추적하는 방법에 대하여 제안하였다. 기존의 기동검출 및 표적추적법은 대부분 칼만필터를 이용하여 수행하고 있으나, 칼만필터는 시스템에 불확실성이 존재하는 경우에 발산하는 특성 때문에 추적성능이 매우 떨어지게 되는 반면 이 논문에서 제안하는 견실한  $H_\infty$  추적필터는 시스템의 모든 변수에 불확실성이 존재하는 경우에도 기동검출과 추적을 원활하게 수행함을 모의실험을 통하여 예증하였다.

#### 참고문헌

- [1] P. L. Bogler, "Tracking a maneuvering target using input estimation", *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 23, pp. 298-310, 1987.
- [2] Y. T. Chan, A. G. C. Hu and J.B. Plant, "A Kalman filter based tracking scheme with input estimation", *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 15, pp. 237-244, 1979.
- [3] O. K. Kwon and K. S. Yoo, "Tracking a maneuvering target in uncertain systems using FIR filters with control input", *J. of KIEE*, vol. 6, pp. 45-51, 1993.
- [4] 성 태경, "시선좌표계에서의 분리추적필터 및 기동표적을 위한 적응추적필터에 대한 연구", *서울대학교 제어계측공학과 박사학위논문*, 1992.
- [5] R. A. Singer, "Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets", *IEEE Tans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 6, pp. 473-483, 1970.
- [6] C. E. de Souza and L. Xie, "Robust  $H_\infty$  filtering", *Control and Dynamic Systems*, vol. 65, pp. 323-377, 1994.
- [7] U. Shaked and Y. Theoder, " $H_\infty$  optimal estimation: A tutorial", *Proc. 31st IEEE CDC, Tucson, Arizona*, pp. 2278-2286, 1992.