

## QFT를 이용한 BTT미사일 종방향 오토파일럿 시스템의 강인제어기 설계

### Design of Robust controller for the Longitudinal Autopilot system of BTT missile using QFT

\* 김석우\*, 윤경한\*, 김영철\*

\*충북대학교 전자공학과 (Tel: 0431-61-2475; Fax: 0431-272-2475; E-mail:yckim@cbucc.chungbuk.ac.kr)

#### Abstract

A design method of robust controller for the longitudinal autopilot of BTT missile is considered. The difficulties are, a set of linearized dynamic models which corresponds to different operating points has a wide range of parameters and it has even Non-Minimum Phase(NMP) zeros. In this paper, such a family of models is expressed by an interval plant. Then a robust control design method using QFT is represented. A simulation result shows that the proposed controller satisfies the given specification well.

**Keywords :** BTT, Non-Minimum Phase(NMP), robust, QFT

#### 1. 서 론

유도미사일의 비행제어시스템은 비선형 동특성을 갖고 대 기압력, 외부외란, 비행고도와 속도등의 변화에 따라 동작점이 변하게 된다. 미사일의 가속도제어시스템은 비최소위상(nonminimum phase)특성을 갖고 있으며 이는 안정성을 보장하는 제어기 설계를 어렵게 하는 요인이다. 플랜트의 불확실성과 비최소위상특성을 고려하는 제어기 설계 방식은 최근  $H_\infty$ ,  $\mu$  설계법(1), 이득계획제어(3), LQG/LQR등이 연구되고 있다. Morari(9)등은 IMC기법과 smith predictor를 이용하여 예측된 시간지연 요소를 보상하는 방법들을 제시한바 있고, Horowitz(2)(4)는 불확실성 구조를 갖는 비최소위상 플랜트를 최소위상(MP)과 전역통과필터로 분리한 후 전역통과 필터의 위상지연을 고려하여 제어기를 설계하고 Singular - G method를 이용하여 비최소위상의 문제를 제한하는 방법을 제시하였다.

Horowitz에 의해 발전된 QFT (Quantitative Feedback Theory)(2)는 모델링 오차, 외부외란, 동작점의 변동의 변화에 의해 발생하는 플랜트의 불확실성에 대해 페루프 전달함수의 주파수응답의 크기가 허용변동 범위내에 놓이도록 니콜스선도와 보드선도에서의 loopshaping을 이용하여 설계하는 방식이다.

본 논문의 목적은 QFT를 이용하여 비최소위상 특성을 갖는 BTT미사일의 종방향 가속도시스템의 구간플랜트에 대해 위상 지연 범위를 고려하여 강인안정도를 보장하는 고정이득제어기의 설계방법을 제시하는데 있다. 종방향운동에 대한 국부모델에서 받음각(angle-of-attack)변화에 따라 5개의 동작점에 대응하는 선형모델을 구조적 불확실성을 갖는 하나의 선형모델로 표현하였다. 비최소위상특성을 갖는 선형구간 플랜트는 최소위상 플랜트와 전역통과 필터로 분리하였다. 구간플랜트로 나타나는 MP 부분에 대해 QFT기법에 따라 제어기를 설계하였으며, 전역통과 필터부분의 위상지연요소를 고려하여 단위궤환의 안정도를 보장할 수 있게 하였다. 설계사양은 주파수영역에 대해 대역폭, 이득여유, 위상여유를 고려하였으며, 이 결과를 Kharitonov접근방

식(7)을 이용하여 확인하였고 시간영역에서 단위계단응답특성을 비교함으로써 제안된 제어기가 강인안정성을 만족함을 보인다.

#### 2. BTT 미사일 시스템

##### 2.1 미사일 시스템의 선형동역학식

선형화된 BTT미사일 시스템의 동역학방정식은 주어진 비행조건에서 근사화 기법을 통해 얻어진 모델(1)을 이용한다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2-1)$$

여기에서 상태변수벡터  $x$ 와 입력벡터  $u$  및 상태공간에서의 행렬  $A$ 와  $B$ 는 다음과 같다.

$$x^T = (\alpha \quad q \quad \beta \quad r \quad p \quad \phi) \quad u^T = (\delta_e \quad \delta_r \quad \delta_a)$$

$$A = \begin{pmatrix} Z_\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_\beta & -\cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & \frac{g}{V_M} \cos \theta_0 \\ 0 & 0 & n_\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} z_{\delta_e} & z_{\delta_r} & z_{\delta_a} \\ m_{\delta_e} & m_{\delta_r} & m_{\delta_a} \\ 0 & y_{\delta_e} & y_{\delta_r} \\ 0 & n_{\delta_e} & n_{\delta_r} \\ 0 & l_{\delta_e} & l_{\delta_r} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

$\alpha, q, \beta, \gamma, p, \phi$  : angle of attack, pitch rate, angle of sideslip, yaw rate, abnk angle

$\delta_e, \delta_r, \delta_a$  : pitch, yaw, and roll control deflections

$m_\alpha, m_\beta, m_\delta, m_\delta$  : pitching moment derivatives

$I_{\beta}, I_{\delta}, I_{\delta_s}$  : rolling moment derivatives  
 $n_{\beta}, n_{\delta}, n_{\delta_s}$  : yawing moment derivatives  
 $y_{\beta}, y_{\delta}, y_{\delta_s}$  : side force derivatives  
 $Z_{\alpha}, Z_{\delta}, Z_{\delta_s}, Z_{\delta_s}$  : Z-axis force derivatives

## 2.2 종방향운동 모델식 : 구간 플랜트

주어진 비행조건은 고도 40000ft, 속도 Mach 2.75 이다. 식 (2.2)에서 종방향운동에 대한 국부모델 식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\alpha} & 1 \\ m_{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_{\delta_s} \\ m_{\delta_s} \end{pmatrix} \delta_s \quad (2-3)$$

위 식에서 러더 입력과 에일러론 입력에 대한 영향은 매우작다 위 가정하여 이를 무시하였다. 반응각과 수직가속도 사이의 관계는 식(2-4)와 같다(3).

$$a_z = Z_{\alpha} \alpha + Z_{\delta_s} \delta_s \quad (2-4)$$

이 모델에 대한 구동장치의 전달함수는  $\frac{180}{s+180}$  이며 시스템 블록선도는 그림 1과 같다

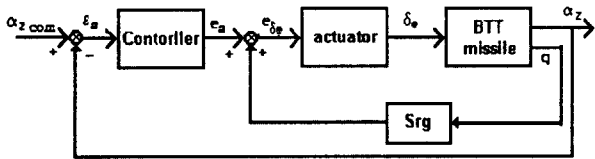


그림 1. 종운동 오토파일럿 시스템

이 그림에서 승강타입력에 수직가속도와 피치각속도의 전달함수는 식 (2-3),(2-4)로부터 식 (2-5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{a_z}{\delta_s} = \frac{Z_{\delta_s}(s^2 + \frac{Z_{\alpha} m_{\delta_s}}{Z_{\delta_s}} - m_{\alpha})}{s^2 - Z_{\alpha} s - m_{\alpha}} \quad (2-5)$$

$$\frac{q}{\delta_s} = \frac{m_{\delta_s} s + m_{\alpha} Z_{\delta_s} - Z_{\alpha} m_{\delta_s}}{s^2 - Z_{\alpha} s - m_{\alpha}}$$

표 1. 반응각 변화에 따른 시스템 파라미터

	$\alpha_0$				
	2 deg	5 deg	10 deg	15 deg	20 deg
$Z_{\alpha}$	-0.4083	-0.5673	-0.8196	-1.1372	-1.2342
$Z_{\delta_s}$	-0.1301	-0.1292	-0.1337	-0.1123	-0.1294
$m_{\alpha}$	-24.1593	-38.7292	94.8788	-36.0662	-43.3763
$m_{\delta_s}$	-149.9028	-149.4325	-155.6843	-139.6265	-157.6747

Lin동(1)에 의해 제시된 5개의 반응각 동작점( $\alpha_0=2,5,10,15,20$  (deg))에 대응하는 전달함수의 파라미터는 표1과 같고 공칭 반응각이 10deg에 해당하는 시스템의 전달함수는 불안정

$$\frac{q}{e_a} = \frac{180(m_{\delta_s} s - Z_{\delta_s} m_{\alpha} + m_{\alpha} Z_{\delta_s})}{s^3 + p1 s^2 - p2 s + p3} \quad (2-6)$$

$$p1 = 180 - Z_{\alpha}, \quad p2 = 540 m_{\delta_s} + 180 Z_{\alpha} + m_{\alpha}$$

$$p3 = 540 Z_{\alpha} m_{\delta_s} - 540 m_{\delta_s} - 180 m_{\alpha}$$

이 전달함수식을 이용하여 그림1을 간략히 나타내면 그림2와 같다.

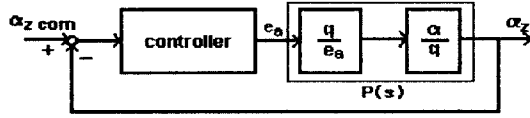


그림 2. BTT미사일 수직가속도 시스템 블록선도

식 (2.6)를 수직가속도에 대한 전달함수 형태로 나타내고, 표1의 시스템파라미터에 대한 다른 동작점의 전달함수에 적용할 경우 시스템은 전체 동작구간에 대해 아래와 같은 구간플랜트형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{a_z}{e_a} = P(s) = \frac{K(s^2 + A)}{s^3 + B s^2 + C s + D} \quad (2.7)$$

$$K = [-24.0660 \quad -20.2140]$$

$$A = [-1460.5040 \quad -446.2889]$$

$$B = [180.4083 \quad 181.2342]$$

$$C = [75639.0722 \quad 85409.8703]$$

$$D = [35702.2557 \quad 109861.9136]$$

여기서 공칭반응각  $\alpha_0$ 가 [2deg, 20deg]에서의 어떤 값에 대해서도 전달함수의 계수는 식(2.7)의 구간내에 존재한다고 가정하였다.

## 3. 종방향 오토파일럿시스템의 강인제어기 설계

### 3.1 비최소위상 시스템

구간플랜트 범위중 불안정한 플랜트들은 내부 루프에 이득을 피드백시켜 안정하도록 하였다. 식(2-7)의 구간플랜트로 표시한 가속도제어시스템은 안정성(stability)과 성능(performance)의 절충(trade-off)된 설계를 위해 종속보상기와 입력필터로 구성된 그림3의 피드백 제어시스템으로 고려할 수 있다. 이제 문제는 여러 동작 조건에서 비최소위상특성을 갖는 플랜트에 대해 안정성을 보장하고 원하는 제어 성능사양을 보장할 수 있는 강인제어기 C(s)를 어떻게 설계하는가이다. 비최소위상특성을 갖는 식(2-7)의 구간플랜트는 종속보상기와 함께 그림3의 피드백 제어시스템으로 고려할수 있다.

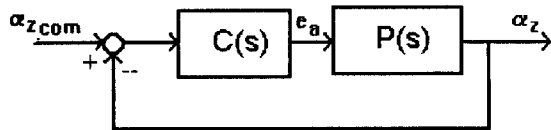


그림 3. BTT 가속도제어시스템

$$P(s) = -K \frac{s^2 - A}{s^3 + B s^2 + C s + D} \quad (3-1)$$

$$\angle P(s) = \angle P_M(s) + \angle A(s) \quad (3-2)$$

$$\angle A_p(s) = -2 \tan^{-1} \frac{\omega}{\sqrt{A}} \quad (3-3)$$

따라서  $P_M(s)$ 의 최소위상플랜트에 대해 설정한 주파수에 대한  $A_p(s)$ 의 위상지연을 보상하여 설계를 함으로써 안정성을 보장할 수 있게 된다.

본 논문에서 적용한 설계조건은 다음과 같다.

- (i) 이득여유 : GM = 5.612 [dB]
- (ii) 위상여유 : PM = 58.707 [deg]
- (iii) 대역폭 : BW = 25 [rad/sec]

위의 성능사양을 만족하는 제어기를 설계하기 위해 QFT기법을 이용한다. QFT를 이용한 제어기 설계 절차는 니콜선도상에서 다수개의 적절한 주파수를 선택하게 되고 선택한 주파수에서 구간플랜트의 변동범위를 나타내는 템플레이트를 표현하게 되며 설계조건에 대한 경계(bound)조건을 만족하는 공칭제적을 구하므로써 제어기를 얻게 된다. 주파수의 설정은 절점(corner)주파수와 교차(crossover)주파수 부근에서 파라미터 변동범위를 자세히 나타내고 변동범위가 다른 주파수에 비해 상대적으로 큰 저주파수대역을 고려하여 ( $\omega = 1, 3, 5, 10, 25, 50, 100$ )의 주파수를 설정하였다. 최소위상플랜트  $P_M(s)$ 의 구간플랜트는 각각의 주파수에서 파라미터 K, A, B, C, D의 변동범위에 따라 니콜선도상에 그림4와 같이 템플레이트(template)로 표현된다.

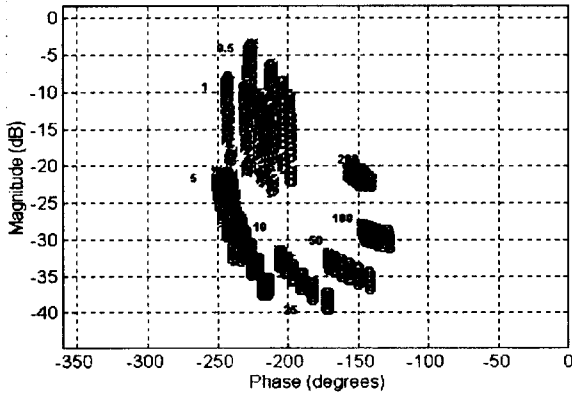


그림 4. 유한 섭동범위를 갖는 최소위상플랜트의 템플레이트

페루프 시스템의 상대안정도 조건인 설계사양(i)과(ii)는 식(3-4)로 표현할 수 있고, 대역폭에 대한 조건(iii)은 (3-5)식으로 나타낼 수 있다.

$$\left| \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \right| \leq 1.1 \quad (3-4)$$

$$\left| \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \right| < 0.707, \quad \omega = 25 \quad (3-5)$$

구간플랜트에서 공칭플랜트는 임의로 선택할 수 있으며 여기서 선정된 최소위상의 공칭플랜트는 아래식(3.6)과 같다.

$$P_{MN} = \frac{-24.066(s+38.22)(s+38.22)}{s^3 + 180.42s^2 + 75655s + 35706.8} \quad (3-6)$$

주파수 변화에 대한 공칭플랜트의 제적과 템플레이트를 식(3-4), (3-5)에 적용하면 그림5와 같이 경계곡선인 U-contour와 BW bound가 얻어진다. 공칭NMP  $P_N(s)$ 와 MP제적  $P_{MN}(s)$ 을 서로 비교하였으며 주파수 변화에 대한 위상변화를 그림5에서 확인할 수 있다.

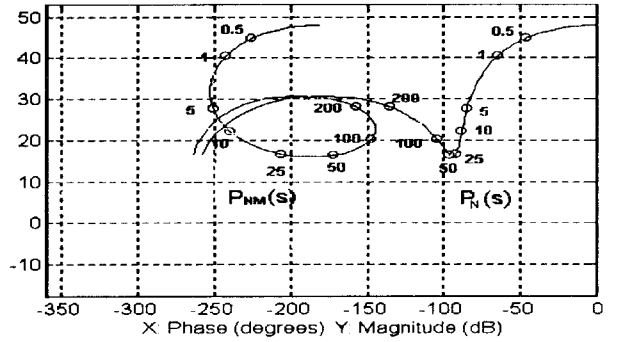


그림 5.  $P_{MN}(s)$ 와  $P_N(s)$ 의 위상지연 비교

설정된 각 주파수에서 비교한 위상변화 차이는 표2와 같다.

표 2. 전역통과필터의 위상지연

$\omega$	$P_M(s)$	$P(s)$	Phase lag
0.5	-225	-46	-179
1	-238	-67	-171
5	-250	-85	-165
10	-240	-90	-150
25	-206	-92.5	-113.5
50	-168	-95	-73
100	-148	-105	-43
200	-155	-125	-30

공칭개루프의 전달함수를  $L_N(s) = C(s) \cdot P_{MN}(s)$ 라 할 때 설정된 각 주파수에 대해 위상지연을 고려하여 공칭제적을 설계조건에 만족시키도록 롤-오프(roll-off)를 고려하여 절점 주파수와 교차 주파수 부근에 극점과 영점들을 적절히 배치함으로써 설계조건에 근접하도록 하였다. 이득 교차주파수보다 작은 주파수 범위에서는 정상상태 오차를 고려해서 설계를 하였으며 이득 교차주파수보다 큰 범위에서는 경계주파수 범위를 만족하도록 설계하였다. 이러한 loopshaping절차에 의한 결과는 그림6과 같다.

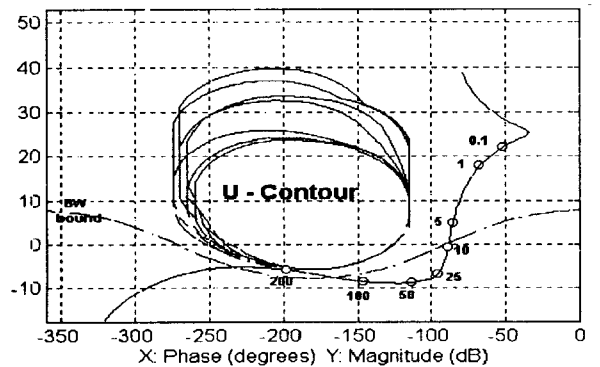


그림 6. Loopshaping 결과

설계한 공칭개루프 전달함수로부터 제어기의 전달함수  $C(s)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$C(s) = -1094.2 \frac{s^2 - 57.6s - 2.6}{s^3 + 117.5s^2 + 3386.2s} \quad (3-7)$$

위상지연을 고려하여 설계된 제어기  $C(s)$ 는 실제 비최소위상 플랜트에 대해 단위계환 페루프응답의 안정성을 만족할 수 있는 반면 성능면에서는 설계조건에 못 미치는 결과를 나타낸다.

## 4. 시뮬레이션

여기서는 3절에서 설계한 제어가 불확실성 및 비최소위상 구간플랜트에 대해 요구한 제어성능사항을 만족시키는지 확인한다. 그림 7,8과 같은 주파수 응답특성은 parametric robust theory(7)가 매우 유용하다. 그림 7과 8은 설계한 제어가 제시한 설계조건  $GM=5.612(\text{dB})$ ,  $PM=58.707(\text{deg})$ ,  $BW=25(\text{rad/sec})$ 를 만족하는지를 보여주고 있다.

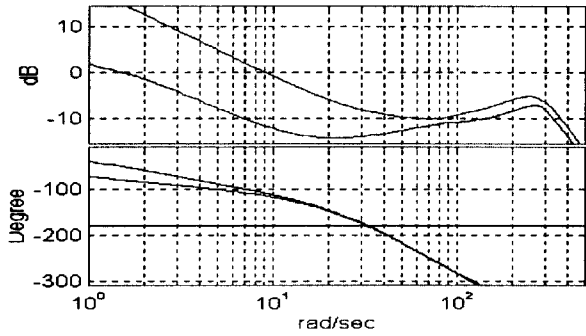


그림 7. 개루프 전달함수의 bode envelope

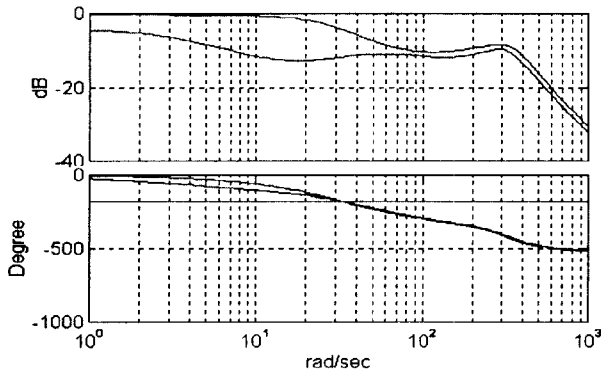


그림 8. 폐루프 전달함수의 bode envelope

시간 영역에서의 단위 계단응답은 그림9와 같다. 위상지연을 고려한 설계는 안정도와 성능을 절충해야하는 문제가 있다. 따라서 안정도를 보장하도록 설계된 결과는 BW조건을 만족시키지 못함으로써 과도응답범위와 정상상태응답에서 다소 좋지 못한 응답을 보인다.

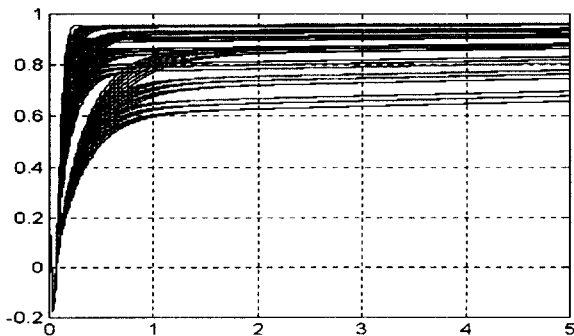


그림 9. NMP의 폐루프 단위계단응답

## 5. 결론

본 논문에서는 BTT 미사일의 비최소응답특성을 갖는 고속도제어시스템의 강인안정제어기 설계방식을 제시 하였다. BTT 시스템은 받음각의 변화에 따라 모델 동특성이 변하기 때문에 넓은 범위의 동작특성을 갖고있고 안정성을 보장하기 어려운 비최소위상 문제에 대해 원하는 제어성능을 보장하기 위해서는 강인안정성을 갖도록 설계되어야 한다.

Lin등(1)이 제시한 받음각의 5개 동작조건에서의 선형모델을 구간플랜트로 표현한 뒤 불안정한 플랜트 요소에 대해 내부루프 게인을 조정하여 안정한 구간플랜트로 개선하였다. QFT기법을 적용하여 비최소 위상특성을 갖는 플랜트를 최소 위상플랜트와 전역통과필터( $A_p(s)$ )로 나눈 후  $A_p(s)$ 의 위상지연을 고려하여 강인안정성을 보장할 수 있는 강인안정제어기를 설계하였다. 제시된 QFT설계방식은 전술유도무기에서 문제되는 비최소위상 문제에 대해 안정성을 보장할 수 있는 강인안정제어기를 설계하는 절차를 제시하였고 다양한 동작조건을 고려해야 하는 제어시스템 설계시 강인안정성을 보장할 수 있는 방식으로 유용하게 활용될 수 있을 것으로 기대된다. 앞으로 예측기(predictor)와 관측기(observer)등을 구성하여 기동성에 관련되는 시간지연 문제를 개선하는 방식을 고려하고자 한다.

## 참고문헌

- (1) Ching-Fang Lin, J. R. Clouier and J. H. Evers, "High-Performance, Robust, Bank-to-Turn Missile Autopilot Design", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 18, No. 1, pp. 46-53, 1995.
- (2) Isaac Horowitz and Yin-Kuei-liao, "Limitations of non-minimum-phase feedback system", *International Journal Of Control*, Vol.40, No. 5, pp. 1003-1013, 1984.
- (3) D. E. Williams et al., "Modern Control Theory for Design of Autopilot for Bank-to-Turn Missiles", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 10, No. 4, pp. 378 - 386, 1987.
- (4) Isaac Horowitz and Oded Yaniv, "Quantitative design for SISO non-minimum-phase unstable plants by the singular-G method", *International Journal Of Control*, Vol.46, No. 46, No. 1, pp. 281-194, 1987.
- (5) John H. A., *Automatic Control of Aircraft and Missiles*, Wiley Interscience, 1991.
- (6) Isaac M. Horowitz, *Quantitative Feedback design Theory*, Vol. 1, QFT Publication, 1992.
- (7) S. P. Bhattacharyya, H. Chappellet and L. H. Keel, *Robust Control-The Parametric Approach*, Prentice Hall PTR, 1995.
- (8) J. J. D'Azzo and C. H. Houpis, *Linear System Analysis and Design*, McGraw-Hill, 1988.
- (9) Manfred Morari, Evangelhos Zafiriou, "Robust process control", Prentice Hall, 1989.