

슬라이딩 모드 관측기를 이용한 로봇 매니퓰레이터를 위한 슬라이딩 모드 제어기의 개발

Development of Sliding Mode Controller for Robot Manipulators using Sliding Mode Observer

박강박, 이주장

한국과학기술원 전기및전자공학과

(Tel:+82-42-869-5432; Fax:+82-42-869-3410; E-mail: kbpark@odyssey.kaist.ac.kr)

Abstract In this paper, a continuous sliding mode controller for robot manipulator is proposed. The proposed scheme guarantees that the tracking error converges to zero maintaining the smoothness of the actual control signal. In order to estimate the acceleration data, a sliding mode observer is used, and the stability of the closed-loop system is shown.

Keywords Sliding Mode Control, Sliding Mode Observer, Robust Control

1. 서론

스위칭 제어 시스템의 기초 이론은 1950년대에 소련에서 처음으로 제안되었으며 [1] 그 후에 이러한 시스템에 대한 명칭으로 “가변 구조 시스템 (VSS)” 및 “슬라이딩 모드 제어기 (SMC)” 가 사용되어왔다 [2].

슬라이딩 모드 제어 기법은 잘 알려진 바와 같이 시스템의 불확실성이나 외란 등에 대하여 강인한 불변성의 특성을 가지고 있으나, “떨림(chattering) 현상”이라는 단점을 내재하고 있다. 슬라이딩 모드 제어기는 시스템 불확실성 및 외란 등에 대한 불변성이라는 특성을 얻기 위하여 스위칭 함수를 사용하기 때문에, 이러한 떨림 현상이 제어 입력 신호에 나타나는 것은 불가피한 것이다.

떨림 현상은 시스템의 고주파 동역학을 유발시킬 수 있고, 기구부의 노화를 촉진할 수 있으므로 가능하면 피하는 것이 좋다. 이를 위하여 대부분의 연구에서는 연속화 기법을 사용하였다. 연속화 기법은 스위칭 함수를 부드럽게 만드는 것에 주안점을 두었으며, 포화(saturation) 함수나 sigmoid 함수 등으로 스위칭 함수를 대체하여 사용하였다.

그러나, 이러한 방법들은 동일한 난제를 안고 있다. 즉, 제어 입력 신호의 연속성을 확실히 보장받기 위해 충분한 경계층(boundary layer)의 폭이 어느 정도인지 구할 수 있는 정량적인 방법이 아직 개발되지 않았다는 것이다. 따라서, 이러한 기법을 사용하면 주먹구구식으로 경계층의 폭을 설정해야하는 문제가 있다. 더구나 이러한 접근 방법들은 추적 오차가 영으로 수렴함을 보장할 수 없고, 단지 경계층 안에 유계된다는 것 만 보장할 수 있다.

따라서, 본 논문에서는 추적 오차가 영으로 수렴함을 보장하는, 로봇 매니퓰레이터에 대한 부드러운 슬라이딩 모드 제어기를 제안하였다. 주 개념은 다음과 같다. 먼저, 저대역 필터(LPF)와 로봇 매니퓰레이터의 조합을 가상 시스템으로 보고, 가상 슬라이딩 모드 제어기 u 를 이 시스템에 대해 설계한다 (그림 1 참조). 이 그림에서, τ 는 실제 제어 신호이며 u 는 가상 제어 신호이다. 왼쪽 블록은 가상 제어기를 나타내며, 중앙의 블록은 저대역 필터(LPF)를, 그리고 오른쪽 블록은 로봇 매니퓰레이터를 의미한다. 가상 제어 신호 u 는 가상 시스템(LPF + 로봇 매니퓰레이터)에 대해서 설계된다. 그러면, 그림에서 볼 수 있듯이, 가상 제어 신호 u 가 스위칭 함수에 의해서 떨림 현상을 나타내더라도, 실제 제어 신호 τ 는 저대역 필터(LPF)를 통과한 신호가 되므로 부드러운 신호를 얻을 수 있다.

따라서, 제안된 제어 기법은 추적 오차의 정확성을 떨어뜨리지 않고도 실제 제어 신호의 부드러움을 보장할 수 있다. 즉, 제안된 기법은 포화 함수 등의 연속화 기법을 사용하지 않으면서도 제어 신호의 부드러움을 보장한다.

그러나, 지금까지 설명한 기법은, 실제로는 측정하기 힘든 가속도 정보를 필요로 한다는 단점을 내포하고 있다. 이를 위하여, 본 논문에서는 슬라이딩 모드 관측기를 사용한 슬라이딩 모드 제어기를 제안하였으며, 로봇 매니퓰레이터의 각 관절의 가속도 정보는 이 관측기가 추정을 하게 된다.

2. 가상 시스템 동역학

n 개의 관절을 갖는 로봇 매니퓰레이터의 동역학 방정식은 아래와 같이 선형 매개변수화 할 수 있다.

$$M(q)\ddot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = \tau \quad (1)$$

여기서 $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ 는 관절의 각도, 각속도, 각각속도를 의미한다. $M(q)$ 은 $n \times n$ 양의 관성 행렬이며, $C(q, \dot{q})$ 는 $n \times n$ 행렬로써 코리올리(Coriolis) 및 원심력을 나타낸다. $G(q)$ 는 $n \times 1$ 중력을 표시하며, τ 는 $n \times 1$ 제어 입력 벡터를, θ 는 상수 p 차원 관성 매개변수, 그리고 Y 는 $n \times p$ 행렬로써 기지의 일반화된 좌표 및 그의 고차 미분함수들을 나타낸다. 매개변수 벡터 θ 에 대해서는 다음과 같은 가정을 할 수 있다. 즉, θ 는 미지이며, 기지의 벡터 $\theta_0 \in \mathbb{R}^p$ 및 $\rho \in \mathbb{R}$ 가 존재하며 이들은 $\|\theta\| := \|\theta - \theta_0\| \leq \rho$ 를 만족한다 [4].

저대역 필터(LPF)의 입출력 관계로부터, 다음과 같은 수식을 얻을 수 있다. $\tau + \Lambda\tau = u$. 여기서, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 그리고 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 이다. 따라서, 가상 제어 입력 신호 u 에 대해서, 가상 시스템의 동역학 방정식은 다음과 같이 기술되어질 수 있다.

$$M\ddot{q} + \dot{M}\dot{q} + \Lambda M\dot{q} + C\dot{q} + \dot{C}\dot{q} + \Lambda C\dot{q} + \dot{G} + \Lambda G = u \quad (2)$$

여기서 u 는 $n \times 1$ 가상 제어 입력 벡터이다. 추적 오차 상태 벡터를 다음과 같이 도입하자. $x_1 = q - q_d, x_2 = \dot{q} - \dot{q}_d, x_3 = \ddot{q} - \ddot{q}_d$. 여기서, $q_d \in \mathbb{R}^n$ 는 원하는 궤적 벡터를 나타낸다. 그러면 가상 플랜트(2)는 다음과 같은 상태방정식으로 표현되어질 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \beta(x_1 + q_d, x_2 - \dot{q}_d, x_3 + \ddot{q}_d) + M^{-1}u - \ddot{q}_d \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 β 는 다음과 같다.

$$\beta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = -M(\bar{x}_1)^{-1} \{ (\dot{M} + \Lambda M + C) \bar{x}_3 + (\dot{C} + \Lambda C) \bar{x}_2 + \dot{G} + \Lambda G \} \quad (4)$$

이것은 Hermann과 Krener [7]가 정의한 것 처럼, lie-algebra의 의미에서의 지역적으로 관측 가능한 표현식을 정의하며, $q_i \in C^3[0, \infty)$ 이다.

또한, 위 식은 아래와 같이 다시 기술되어질 수 있다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix} (y + \beta_1) \quad (5)$$

여기서, $x^T = [x_1^T, x_2^T, x_3^T]$, $y = M_0^{-1}u$, $\beta_1 = \beta - \ddot{q}_d + (M^{-1}M_0 - I_n)y$, 그리고 $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 는 단위 행렬이다. 여기서, 다음의 가정이 유효하다고 가정한다.

가정 1 다음의 부등식들을 만족하는 기지의 함수 $\bar{\beta} > 0$ 및 기지의 양의 상수 $c_0 > 0$ 가 존재한다고 가정한다.

$$\|\beta - \hat{\beta}\| \leq \bar{\beta}, \quad \|M^{-1}M_0 - I_n\| \leq c_0 < 1 \quad (6)$$

여기서 $\hat{\beta}$ 은 β 의 추정치이다.

3. 모든 상태 변수를 사용한 슬라이딩 모드 제어기

다음과 같은, 함수가 덧붙여진 슬라이딩 평면 $s \in \mathbb{R}^n$ 를 제안하여 $s(0) = 0$ 가 만족되도록 한다.

$$s = x_3 + \Lambda_1 x_2 + \Lambda_2 x_1 - N e^{-\Lambda_3 t} \quad (7)$$

여기서 $\Lambda_j = \text{diag}(\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \dots, \lambda_{jn})$, $\lambda_{ij} > 0$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n$, $N = x_3(0) + \Lambda_1 x_2(0) + \Lambda_2 x_1(0)$ 이다. 그러면, 슬라이딩 모드 존재 조건 $s^T \dot{s} \leq 0$ 으로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다. $\dot{s} = y + \beta_1 + \Lambda_1 x_3 + \Lambda_2 x_2 + N \Lambda_3 e^{-\Lambda_3 t}$. 이 수식으로부터, 제어 법칙을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y = \ddot{q}_d - \Lambda_1 x_3 - \Lambda_2 x_2 - N \Lambda_3 e^{-\Lambda_3 t} - \hat{\beta} - \Psi s - \rho \cdot \text{sgn}(s)$$

여기서 ρ 는 스칼라인 양의 제한되는 함수이며 다음의 부등식을 만족한다.

$$\|\beta - \hat{\beta} - (M^{-1}M_0 - I_n)y\| \leq \rho \quad (8)$$

가정 1로부터, ρ 는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\rho = \frac{c_0}{1 - c_0} \|\ddot{q}_d - \hat{\beta} - \Psi s - \Lambda_1 x_3 - \Lambda_2 x_2 - N \Lambda_3 e^{-\Lambda_3 t}\| + \frac{\bar{\beta}}{1 - c_0}.$$

그러면, 가상 제어 법칙은 $u = M_0 y$ 이며, 다음의 정리를 도출할 수 있다.

정리 1 다음의 가상 제어 입력 (9)을 가상 시스템 (5)에 적용하면, 페루프 시스템은 광역적으로 지수함수적으로 안정하다.

$$u = M_0 (\ddot{q}_d - \Lambda_1 x_3 - \Lambda_2 x_2 - N \Lambda_3 e^{-\Lambda_3 t} - \hat{\beta} - \Psi s - (\rho + \eta) \cdot \text{sgn}(s)) \quad (9)$$

여기서 $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T$, $\eta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

증명 리아프노프 함수를 $V = \frac{1}{2} s^T s$ 라고 잡고, 시간에 대한 미분을 취하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \dot{s} = s^T (\dot{x}_3 + \Lambda_1 x_3 + \Lambda_2 x_2 + N \Lambda_3 e^{-\Lambda_3 t}) \\ &\leq -\Psi s^T s - \sum_{i=1}^n \{\eta_i |s_i|\}. \end{aligned}$$

위 수식으로부터 V 는 s 에 대한 양의 함수임을 알 수 있으며, 아울러 \dot{V} 는 s 의 음의 함수임도 알 수 있다. 따라서, V 는 리아프노프 함수이다. 그런데, $s(0) = 0$ 이므로 $V(0) = 0$ 이고, 이는 s 가 항상 영임을 의미한다. 즉, $s = 0 \forall t \geq 0$ 이다. 그러므로, 추적 오차는 지수함수적으로 영으로 수렴함을 알 수 있다. ■

따름정리 1 시스템은 항상 슬라이딩 모드에 있다, 즉, $s \equiv 0 \forall t \geq 0$ 이다.

주 1 가상 제어 입력 u 는 스위칭 함수 $\text{sgn}(\cdot)$ 를 포함하고 있으므로, u 는 고주파의 스위칭 신호를 생성한다. 그러나, 그림 1에서 보이는 바와 같이, 실제 제어 신호 τ 는 고주파 성분을 포함하지 않는다. 왜냐하면 τ 는 u 를 저대역 필터를 통과해서 만들어진 신호이기 때문이다. 그러므로, 위의 정리의 결과로부터, 떨림 현상을 보이지 않는 실제 제어 신호를 이용하여 추적 오차가 지수함수적으로 영으로 수렴하면서도 시스템 불확실성에 대한 강인성을 항상 보장받을 수 있음을 알 수 있다.

4. 슬라이딩 모드 관측기의 설계

슬라이딩 모드 관측기의 일반적인 접근 방법[6]을 적용하면, 다음과 같은 상태 관측기를 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= K_1 \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \Gamma_1 \text{sgn}(\hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= K_2 \hat{x}_2 + \hat{x}_3 + \Gamma_2 \text{sgn}(\hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= K_3 \hat{x}_2 + \Gamma_3 \text{sgn}(\hat{x}_2) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 \hat{x}_1, \hat{x}_2 , 및 \hat{x}_3 는 각각 x_1, x_2 , 및 x_3 의 추정치를 나타내며, $(\cdot) = (\cdot) - (\hat{\cdot})$, $K_1, K_2, K_3, \Gamma_1, \Gamma_2$, 및 Γ_3 는 $n \times n$ 양의 행렬들을 나타낸다. M_0 는 “기준(nominal)” 관성 행렬이다. 가장 단순한 경우에는, 이 행렬은 다음과 같은 단순한 상수 대각 행렬이 된다. $M_0 = m_0 I$ 여기서 $m_0 > 0$. 비선형 함수 $\hat{\beta}$ 는 식(4)의 β 의 영향을 감안하기 위하여 도입하며, 이는 추적 오차와 관측 오차 사이의 차이를 설명한다.

가상 시스템 방정식 (3)으로부터 관측기 방정식 (10)를 빼면, 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -K_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \Gamma_1 \text{sgn}(\tilde{x}_1) \quad (11)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -K_2 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 - \Gamma_2 \text{sgn}(\tilde{x}_2) \quad (12)$$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = -K_3 \tilde{x}_2 - \Gamma_3 \text{sgn}(\tilde{x}_2) + y + \beta_1. \quad (13)$$

각도 및 각속도는 일반적으로 엔코더(encoder) 및 타코미터(tachometer)로부터 구해질 수 있으므로, x_1 및 x_2 는 측정 가능한 양이라고 다음과 같이 가정한다.

가정 2 각도(x_1) 및 각속도(x_2)는 측정 가능하다.

문제의 단순화를 위하여 Γ_1, Γ_2 는 다음과 같은 대각 행렬이라고 하자. $\Gamma_1 = \gamma_1 I$, $\Gamma_2 = \gamma_2 I$. 그러면 다음과 같은 보조정리를 얻을 수 있다.

보조정리 1 다음의 영역은 $|\tilde{x}_3| < \gamma_2$ 가 보장되는 한 불변이다. $\{(x_1, x_2) | \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0\}$.

증명 이 보조정리는 너무나 자명하므로 그 증명을 생략한다. ■

스위칭 평면이 불변성인 영역을 “슬라이딩 패치(sliding patch)”라고 한다 [6].

보조정리 2 슬라이딩 패치라고 불리는 영역 $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2, x_3) | \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0, |\dot{x}_3| < \gamma_2\}$, 여기서, $x_3 = \hat{x}_3 + \Gamma_2 \text{sgn}(\hat{x}_2)$ 이며, $[\hat{x}_1^T, \hat{x}_2^T, \hat{x}_3^T]^T$ 의 오차 동역학은 다음의 차수가 줄어든 동역학으로 표시되어질 수 있다.

$$\dot{\hat{x}}_3 = -\Gamma \hat{x}_3 + y + \beta_1 \quad (14)$$

여기서 $\Gamma = \Gamma_3 \Gamma_2^{-1} = \gamma I$ 이며, $\gamma > 0$ 이다.

증명 이 보조정리는 너무나 자명하므로 그 증명을 생략한다. ■

주 2 위의 보조정리로부터, 슬라이딩 패치 \mathcal{R} 상에서는 다음과 같이 가속도 정보를 추정할 수 있음을 알 수 있다.

$$x_3 = \hat{x}_3 + \Gamma_2 \text{sgn}(\hat{x}_2) \quad (15)$$

5. 페루프 시스템의 안정도 해석

이제 제안된 슬라이딩 모드 제어기 (9)의 실제 상태 변수 대신에 슬라이딩 모드 관측기(10)에서 추정된 상태 변수들로 대체한 페루프 시스템의 안정도를 해석하고자 한다. x_1 과 x_2 는 측정 가능하다고 가정2에서 이미 가정을 했으므로, 이 상태 변수들은 직접 사용할 수 있다. 그러나 가속도 정보는 직접 사용할 수 없다. 주 2로부터, 슬라이딩 패치에서는 가속도 x_3 는 (15)로 주어진다 것을 알 수 있다. 그러므로 벡터 x 대신에 $[x_1^T, x_2^T, (\hat{x}_3 + \Gamma_2 \text{sgn}(\hat{x}_2))^T]^T$ 가 제어기 (9)에 사용된다. 새로운 상태 벡터 $\bar{z} = [x_1^T, x_2^T, \zeta_3^T]^T$ 를 정의하자. 여기서 $\zeta_3 = \hat{x}_3 + \Gamma_2 \text{sgn}(\hat{x}_2)$ 이며, 수정된 슬라이딩 평면은 다음과 같다. $\bar{s} = \zeta_3 + \Lambda_1 x_2 + \Lambda_2 x_1 - \bar{N} e^{-\Lambda_3 t}$. 여기서, $\bar{N} = \zeta_3(0) + \Lambda_1 x_2(0) + \Lambda_2 x_1(0)$ 이다. 그러면 모든 상태 변수들을 이용하여 설계한 제어 법칙 (9)는 다음과 같이 수정되어질 수 있다.

$$u = M_0(\ddot{q}_d - \Lambda_1 \zeta_3 - \Lambda_2 \dot{x}_2 - \bar{N} \Lambda_3 e^{-\Lambda_3 t} - \hat{\beta}(x_1 + q_d, x_2 + \dot{q}_d, \zeta_3 + \dot{q}_d) - \Psi \bar{s} - (\bar{p} + \eta) \cdot \text{sgn}(\bar{s})) \quad (16)$$

여기서 \bar{p} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{p} = \frac{c_0}{1 - c_0} \|\ddot{q}_d - \hat{\beta} - \Psi \bar{s} - \Lambda_1 \zeta_3 - \Lambda_2 \dot{x}_2 - \bar{N} \Lambda_3 e^{-\Lambda_3 t}\| + \frac{1}{1 - c_0} \bar{\beta}(x_1 + q_d, x_2 + \dot{q}_d, \zeta_3 + \dot{q}_d). \quad (17)$$

위에서 제안한 제어기 (16)를 사용하면, 다음의 정리를 도출할 수 있다.

정리 2 슬라이딩 모드 관측기 (10)를 이용한 제안된 제어기 (16)를 주어진 시스템 (5)에 적용하면, 시스템의 상태가 슬라이딩 패치 \mathcal{R} 에 있는 한, 전체 페루프 시스템은 지수함수적으로 안정하다.

증명 주 2로부터, 슬라이딩 패치 \mathcal{R} 에서는, $x = \bar{z}$, $s = \bar{s}$ 이고, 제어 법칙 (16)는 식 (9)와 동일하다. 그러므로, 슬라이딩 패치 \mathcal{R} 안에서는, 식 (5)와 식 (10)의 페루프 시스템 동역학은 다음과 같이 기술되어질 수 있다.

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}(y + \beta_1) \quad (18)$$

여기서 $z = [x_1^T, x_2^T, x_3^T, \hat{x}_3^T]^T \in \mathbb{R}^{4n}$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Gamma \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_n \\ I_n \end{bmatrix}. \quad (19)$$

슬라이딩 패치 \mathcal{R} 에서는, 제어 법칙 (16)를 사용하면, 슬라이딩 모드 존재 조건 $s^T \dot{s} < 0$ 가 만족된다는 것은 너무나도 자명하다. 또한, 슬라이딩 패치 \mathcal{R} 안에서는 $s(0) = 0$ 가 보장된다는 것이 자명하므로, 시스템은 항상 슬라이딩 모드 안에 있게 된다. 즉, 따름정리 1에서처럼, $s \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$ 이다. 그러므로, $s = 0$ 으로부터 다음과 같은 동역학 방정식이 얻어진다.

$$s = x_3 + \Lambda_1 x_2 + \Lambda_2 x_1 - N e^{-\Lambda_3 t} = 0. \quad (20)$$

위의 동역학 방정식이 지수함수적으로 안정하다는 것은 자명하다.

해석을 간단히 하기 위하여 $\Lambda_1 = 3\Lambda$, $\Lambda_2 = 3\Lambda^2$, $\Lambda_3 = \Lambda^3$ 라고 가정한다. 그러면 결과적인 동역학의 극점들은 모두 $-\Lambda$ 에 놓이게 된다.

다른 하나의 동역학은 (14)에서 얻어지는 수식 (18)의 마지막 방정식에서 얻어진다. $s \equiv 0$ 라는 조건은 $\dot{s} = 0$ 및 $s = 0$ 를 의미하므로, 이는 다시,

$$\dot{s} = \dot{x}_3 + \Lambda_1 \dot{x}_2 + \Lambda_2 \dot{x}_1 + N \Lambda_3 e^{-\Lambda_3 t} = 0$$

를 의미한다. 이는 또한 다음의 방정식을 나타낸다.

$$y + \beta_1 = -\Lambda_1 x_3 - \Lambda_2 x_2 - N \Lambda_3 e^{-\Lambda_3 t}. \quad (21)$$

상기 수식들 (20) 및 (21)로부터, 식 (14)로부터 얻어지는 식 (18)의 마지막 방정식은 다음과 같이 다시 써어질 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_3 &= -\Gamma \hat{x}_3 + y + \beta_1 \\ &= -\Gamma \hat{x}_3 + (\Lambda_1^2 - \Lambda_2) x_2 + \Lambda_1 \Lambda_2 x_1 - (\Lambda_1 N - N \Lambda_3) e^{-\Lambda_3 t}. \end{aligned} \quad (22)$$

그러므로, 식 (20) 및 (22)으로부터, $t \rightarrow \infty$ 에 따라 지수함수적으로 $q \rightarrow q_d$ 및 $\hat{x}_3 \rightarrow x_3$ 함을 알 수 있다. ■

지수함수적 안정도는 슬라이딩 패치 \mathcal{R} 안에서 보장되는 것이므로, 수렴영역의 크기를 구해야한다. 해석을 쉽게 하기 위해서 $s = \hat{\Lambda}x = x_3 + 2\Lambda x_2 + \Lambda^2 x_1$ 라고 가정한다. 여기서 $\hat{\Lambda} = [\Lambda^2 \quad 2\Lambda \quad 1] \in \mathbb{R}^{n \times 3n}$, $\Lambda = \lambda I_n$ 및 $\Psi = \psi I_n$ 이다. 그러면, 다음의 보조정리를 사용할 수 있다.

보조정리 3 $\bar{B}^T P = \bar{\Lambda}$ 가 되도록 하는 양의 행렬 $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ 가 존재한다. 여기서 $\bar{\Lambda} = [\hat{\Lambda} \quad 0_n] \in \mathbb{R}^{n \times 4n}$ 이며, $0_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 는 영행렬, P 는 유일한 양의 행렬이며 다음의 리아프노프 방정식을 만족한다. $\bar{A}_0^T P - P \bar{A}_0 + Q = 0$ 여기서 $\bar{A}_0 = (I_{4n} - \bar{B}\bar{\Lambda}) \bar{A} - \bar{B}\Psi\bar{\Lambda}$ 이다.

증명 이 보조정리는 너무나 자명하므로 그 증명을 생략한다. ■

이제 리아프노프 함수를 $V(z) = z^T P z$ 라고 놓아보자. $V(z)$ 를 시간에 대해 미분하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z^T (P \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T P) z - 2\rho z^T P \bar{B} \text{sgn}(s) + 2z^T P \bar{B} (\eta - \beta_1) \\ &\leq -z^T Q z \leq -\lambda_{\min}(Q) \|z\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

여기서 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 는 (\cdot) 의 최소 고유치(eigenvalue)를 나타낸다. 상기 부등식은 시스템이 슬라이딩 패치 \mathcal{R} 안에 있는 한 만족되므로, z 가 항상 슬라이딩 패치 \mathcal{R} 안에 있음이 보장되어야한다. 먼저 V 가 다음과 같이 유계됨은 자명하다. $\lambda_{\min}(P) \|z\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P) \|z\|^2$. 여기서 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 는 (\cdot) 의 최대 고유치를 나타낸다. 그러므로 수렴 영역, 즉 z 가 슬라이딩 패치 \mathcal{R} 안에 머물러 있으며 z 가 점근적으로 안정한 영역은 다음과 같이 주어진다.

$$\Omega = \left\{ z \mid \|z\| \leq \gamma_2 \sqrt{\lambda_{\min}(P) / \lambda_{\max}(P)} \right\}.$$

6. 시뮬레이션 결과

시뮬레이션을 Yeung과 Chen [5]이 사용한 2관절 로봇 매니플레이터 모델에 대하여 수행하였다. 매개변수 값들은 상기 모델과 같은 값을 취하였으며 결과는 그림 2~4에 나와있다.

제안된 제어기를 사용한 경우의 추적 오차는 그림 2에 나타나있다. 이 그림에서 볼 수 있듯이, 추적 오차는 경계층의 값에 유계되는 것이 아니라 영으로 수렴함을 알 수 있다.

그림 3에는 가상 제어 신호 u 가 제시되어있다. 스위칭 함수($sgn(\cdot)$)를 사용하였기 때문에 고주파수의 떨림 현상이 나타남을 볼 수 있다. 그러나, 그림 4에서 볼 수 있듯이, 로봇에 직접 인가되는 실제 제어 신호 τ 는 부드러운 모양을 보이고 있음을 알 수 있다.

7. 결론

떨림현상을 극복하기 위하여, 본 논문에서는, 1차 저대역 필터(LPF)와 가상 제어기/플랜트 개념을 도입하였다. 제안된 제어 기법은 시스템의 불확실성이나 외란에 대해서 강인하고 불변하는 특성을 보장하였으며, 실제 제어 신호의 부드러움을 유지하면서도, 추적 오차의 정확도를 떨어뜨리지 않고 영으로 수렴함을 보일 수 있었다. 다시말하면, 제안된 제어기는 부드러운 제어 신호 τ 를 생성하면서도, 시스템은 항상 슬라이딩 모드 안에 있으며, 매개변수 불확실성이 있는 경우에도 추적 오차가 영으로 지수함수적으로 수렴하였다.

제안된 떨림현상을 극복하는 슬라이딩 모드 제어기는 실제로는 측정하기 힘든 가속도 정보를 사용하므로, 슬라이딩 모드 관측기를 이용하여 상태변수를 추정하였으며 제안된 제어기/관측기를 사용한 경우에 대한 전체 페루프 시스템의 안정도 또한 증명하였다.

참고문헌

- [1] S. V. Emelyanov, "A technique to develop complex control equations by using only the error signal of control variable and its first derivative," *Avtomatika i telemekhanika*, vol. 18, no. 10, p. 873-885, 1957.
- [2] S. V. Emelyanov, *Theory of Variable Structure Systems*, Moscow: Nauka(in Russian), 1970.
- [3] F. A. Filippov, "Differential equations with discontinuous right-hand side," *Matematicheskii Sbornik*, vol. 51, no. 1, pp. 99-128, 1960.
- [4] Mark W. Spong, "On the robust control of robot manipulators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-37, no. 11, pp. 1782-1786, 1992.
- [5] K. S. Yeung and Y. P. Chen, "A new controller design for manipulators using the theory of variable structure systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-33, no. 2, pp. 200-206, 1988.
- [6] J. J. E. Slotine, J. K. Hedrick, and E. A. Misawa, "Sliding observers for nonlinear systems," *ASME J. Dynamic Syst., Measurement, Contr.*, vol. 109, pp. 245-252, 1987.
- [7] R. Hermann and A. J. Krener, "Nonlinear controllability and observability," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 22, pp. 728-740, 1977.

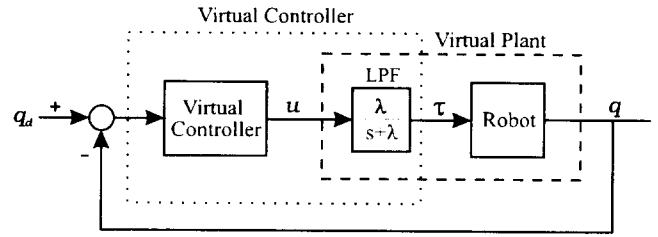


Fig. 1. 전체 시스템 블록선도

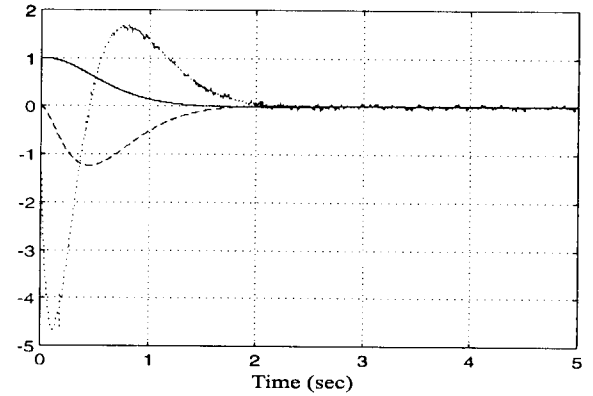


Fig. 2. 추적 오차, 속도 및 가속도

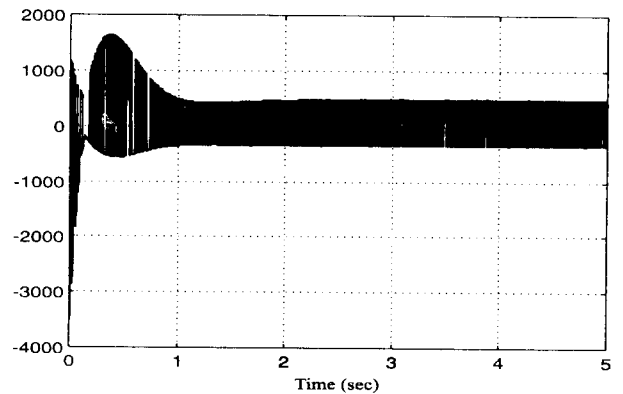


Fig. 3. 가상 입력 신호 u

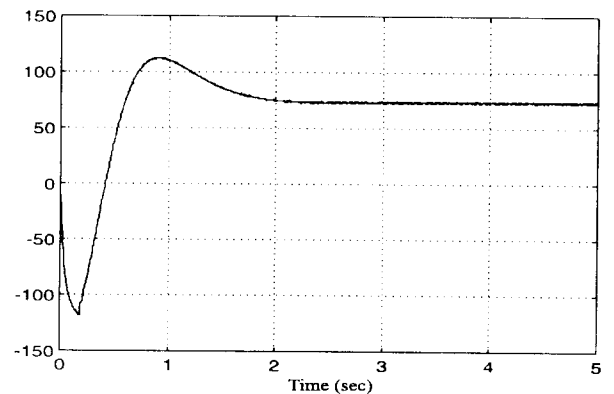


Fig. 4. 실제 입력 신호 τ