

단일 구동부를 갖는 2축 도립 진자를 위한 제어기 구현

An Implementation of A Controller for A Double Inverted Pendulum
with A Single Actuator

* 남노현*, 이 건 영*

*광운대학교 전기공학과(Tel : +822-940-5142; Fax : +822-942-0107; E-mail : keonyi@daisy.kwangwoon.ac.kr)

Abstracts In this paper, the double inverted pendulum having a single actuator is built and the controller for the system is proposed.

The lower link is hinged on the plate to free for rotation in the x-z plane. The upper link is connected to the lower link through a DC motor. The double inverted pendulum built can be kept upright posture by controlling the position of the upper link even though the proposed inverted pendulum has no actuator in lower hinge. The algorithm to control the inverted pendulum is consisted of a state feedback controller within a linearizable range and a fuzzy logic controller coupled with a feedback linearization control for the rest of the range. Concept of the virtual work is employed to drive the linearized model for the state feedback controller. The feedback linearization controller drives a DC motor with the modified reference joint angle from the fuzzy controller which adjusts a upright posture of a proposed pendulum system. Finally, the experiments are conducted to show the validity of the proposed controller.

Keywords virtual work, fuzzy control, state feedback control

1. 서론

본 논문은 단일 구동부를 갖는 2축 도립 진자의 제어기에 대한 연구를 다룬다. 하단 링크는 x-z 평면상에서 회전이 자유로운 상태로 고정판에 연결되어 있으며, 상단 링크는 DC 모터를 통해 하단 링크에 연결되어 있다. 이 DC 모터는 상단 링크를 회전시켜 전체 도립진자의 자세를 제어하는데 이용된다.

제어 대상의 도립진자는 보행중인 두발 로봇트가 한발로 몸을 지탱하고 있는 자세를 모델링한 것이다(1). 즉, 바닥면 연결부는 발목관절을, DC 모터는 보행 로봇트의 무릎 관절 또는 허리의 역할을 모델링한 것이다.

제시된 제어대상을 제어하기 위한 제어기는 상부 관절 모터를 구동하기 위한 상태 피드백 제어기와, 모터가 없는 하단 연결부의 위치를 조절하기 위한 도립자세 교정용 퍼지 논리 제어기로(2) 구성된다.

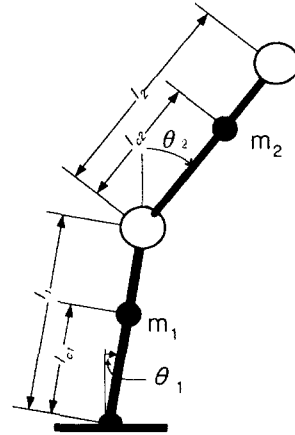


그림 1. 도립 진자 시스템의 구성도
Fig. 1 Schematic diagram of the double inverted pendulum system

2. 도립 진자 시스템

본 연구에서 제시된 도립 진자 시스템의 구성도는 그림 1과 같다. 하단 링크는 고정판 위에 제한된 범위 내에서(10°) 회전이 자유롭게 부착되어 있다. 이는 일정 구간에서 유연성을 갖는 동시에 이 구간의 이탈을 억제하는 발목 관절의 특성을 적용한 것이다. 링크의 위치는 하부 관절 및 상부 관절의 potentiometer에 의해 측정하며, PC에 접속된 D/A converter에 의해 DC 모터에 제어 입력을 인가하게 된다. 제시된 도립 진자 시스템의 파라미터는 표 1로 주어진다.

표 1은 도립 진자 시스템의 매개 변수와 상수 값으로, COG는 각 링크의 관절에서 무게중심까지의 거리를 나타내며, 링크1

표 1. 제어 시스템의 매개 변수
Fig. 1 Parameters of the controlled system

매개 변수	링크1	링크2
링크 길이(m)	0.2	0.2
COG 거리(m)	0.147	0.131
링크 무게(kg)	0.286	0.219
관성 계수(kg · m ²)	0.056	0.053

의 무게는 링크 자체의 무게와 모터의 무게를 합한 것이며, 링크 2는 링크만의 무게를 나타낸다. 관성 계수는 모터를 점 질량으로

로 간주하고 링크는 균일한 매질의 막대로 간주하여 산출하였다.

2.1 제어 대상 모델링 및 문제 설정

제어 대상을 모델링하기 위하여 라그랑지 방정식을 이용하였다[3].

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau_i, \quad i=1,2 \quad (1)$$

$$L = T - V \quad (2)$$

여기서 T 및 V 는 각각 도립진자의 운동에너지 및 위치에너지를 나타내며, L 은 라그랑지안이다.

식 (1), (2)로부터 다음과 같은 동적 방정식을 얻는다.

$$D(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) = \tau \quad (3)$$

여기서 θ 는 좌표 벡터, $D(\theta)$ 및 $C(\theta, \dot{\theta})$ 는 관성 행렬 및 구심력과 코리올리력의 항이고, $g(\theta)$ 는 중력항이다. 토크 τ_i 는 각 관절의 제어 입력으로, τ_1 은 구동장치가 없으므로 '0'이다. τ_2 는 θ_2 의 위치를 적절히 조절하여 θ_1 의 자세를 조정함으로써 제어 대상의 무게중심이 안정한 위치에 유지하기 위한 제어 입력 토크이다.

2.2 제어 알고리즘

제시된 2링크 도립진자는 비선형성을 갖으며, 더욱이 하부 관절에는 추진기가 없으므로 제어 입력이 없다. 이를 제어하기 위해서 목표 도립 자세를 가질 때의 θ_1, θ_2 에서 선형화 하여, 상부 관절의 위치 θ_2 를 제어하는 상태 피드백 제어를 이용하였다. 또한 하부 관절의 자세 제어는 상부 관절의 자세를 제어함으로써 이루어지는데, 이는 가상 일(Virtual Work[4])의 관점에서 해석되듯이, θ_2 를 움직이는 유효 토크에 의해 θ_1 을 반대방향으로 회전시키는 토크가 발생하므로 가능해진다. 그러나 가상 일은 하부 링크의 무게중심과 상부링크의 무게중심의 x-축 상의 위치가 서로 다른 부호인 경우에 전체 도립 진자를 세우는 토크로서 유효하다. 즉, 각 링크의 무게중심이 동일 부호인 경우는 전체 무게중심이 더욱 기울어져 하단 링크는 제한된 위치(10°)에 도달한다. 이 경우, 퍼지 논리를 이용하여 θ_2 의 위치를 앞서의 제어기로 제어 가능한 위치까지 이동시킨다.

2링크 도립진자의 동적 방정식은 (3)으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$d_{11}\ddot{\theta}_1 + d_{12}\ddot{\theta}_2 + 2h\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h\dot{\theta}_2^2 + b_1\dot{\theta}_1 + g_1 = \tau_1 \quad (18)$$

$$d_{21}\ddot{\theta}_1 + d_{22}\ddot{\theta}_2 - h\dot{\theta}_1^2 + b_2\dot{\theta}_2 + g_2 = \tau_2 \quad (19)$$

여기서,

$$d_{11} = m_1 l_1^2 + m_2(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2) + I_1 + I_2$$

$$d_{12} = d_{21} = m_2(l_2^2 + l_1 l_2 \cos \theta_2) + I_2$$

$$d_{22} = m_2 l_2^2 + I_2$$

$$h = -m_2 l_1 l_2 \sin \theta_2$$

$$g_1 = -(m_1 l_1 + m_2 l_1)g \sin \theta_1 - m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$g_2 = -m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$I_1 = \left(\frac{1}{3} m_{L1} + M_2\right) l_1^2, \quad I_2 = \left(\frac{1}{3} m_{L2} + M_2\right) l_2^2$$

$$b_1 = 0.003, \quad b_2 = 0.036(\text{마찰계수})$$

마찰 계수의 산출은 실제 장치의 움직임과 시뮬레이션에 적절한 마찰 계수를 적용하여 움직임을 비교한 값으로 마찰 계수를 산출하였다.

제시된 시스템에서, θ_1 을 회전시키는 제어입력 τ_1 은 없다. 따

라서, θ_1 을 움직이기 위해서는 적절히 θ_2 를 움직여, 가상일(Virtual Work)의 관점에서 τ_{2eff} 를 발생시켜 θ_1 을 움직이게 한다.

가상일은 링크 2의 무게 중심 m_2 가 제어 토크 τ_2 의 인가에도 불구하고 관성의 법칙에 의해 그 위치를 유지하려는 성질에 의해 발생한다.

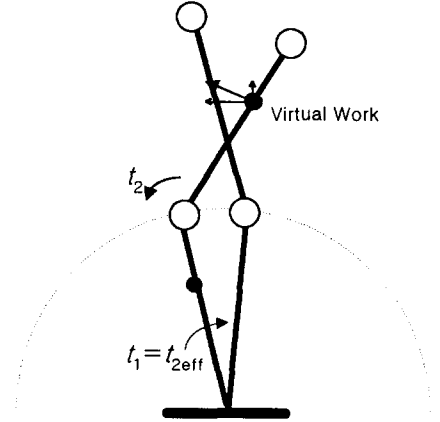


그림 2. 도립진자의 가상일

Fig. 2. The virtual work of the inverted pendulum

그림 2에서 볼 수 있듯이, τ_1 은 τ_{2eff} 이다. 따라서 식(5)에서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_{2eff} &= -(\tau_2 - d_{21}\ddot{\theta}_1 - d_{22}\ddot{\theta}_2 + h\dot{\theta}_1^2 - b_2\dot{\theta}_2 - g_2) \\ &= d_{21}\ddot{\theta}_1 + d_{22}\ddot{\theta}_2 - h\dot{\theta}_1^2 + b_2\dot{\theta}_2 + g_2 - \tau_2 \end{aligned} \quad (7)$$

(6)을 (4)에 대입하여 정리하면

$$(d_{11} - d_{21})\ddot{\theta}_1 + (d_{12} - d_{22})\ddot{\theta}_2 + f(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, h) + g_1 - g_2 = -\tau_2 \quad (8)$$

$$d_{21}\ddot{\theta}_1 + d_{22}\ddot{\theta}_2 - h\dot{\theta}_1^2 + b_2\dot{\theta}_2 + g_2 = \tau_2 \quad (9)$$

여기서,

$$f(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, h) = 2h\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h\dot{\theta}_1^2 + h\dot{\theta}_2^2 + b_1\dot{\theta}_1 - b_2\dot{\theta}_2$$

상태 피드백 제어를 위하여, 식(7), (8)에 대해 $\theta_1 = \theta_2 \cong 0$ 인 부근에서 선형화를 하였다. θ_1, θ_2 는 0에 근사한 경우이므로 $2h\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2, h\dot{\theta}_1^2, h\dot{\theta}_2^2$ 항은 0으로 간주할 수 있다. 제시된 도립진자의 상태 방정식은

$$X = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{라 하면,}$$

$$\dot{X} = AX + B\tau \quad (9)$$

식(9)과 같이 기술할 수 있다.

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a_4 b_1}{t} & -\frac{a_4 g_1 - a_2 g_2}{t} & \frac{a_4 b_2 + a_2 b_2}{t} & -\frac{a_2 g_2}{t} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_3 b_1}{t} & -\frac{a_3 g_1 - a_1 g_2}{t} & -\frac{a_3 b_2 + a_1 b_2}{t} & \frac{a_1 g_2}{t} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{a_4 + a_2}{t} \\ 0 \\ \frac{a_1 + a_3}{t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = m_1 l_{c1} + m_2 (l_1 + l_2) + I_1$$

$$a_2 = m_2 l_1 l_{c2}$$

$$a_3 = m_2 (l_{c2} + l_1 l_{c2}) + I_2$$

$$a_4 = m_2 l_{c2} + I_2$$

$$g_1 = -(m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g$$

$$g_2 = -m_2 g l_{c2}$$

$$t = a_1 a_4 - a_2 a_3$$

현재의 도립 진자 시스템은 두 개의 근이 우반면에 위치하므로 불안정한 상태이다. 따라서, 상태 피드백 이득을 주어 시스템을 안정화하였다.

2.2.1 상태 피드백 제어

불안정한 제어 대상에 대하여 제어 토오크를 다음과 같이 $\tau = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]X + \gamma$ 로 주어 우반면의 근을 안정한 위치로 이동시킨다.

$$\dot{X} = AX + B([k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]X + \gamma)$$

$$= [A + Bk]X + B\gamma \quad (10)$$

여기서, $[A + Bk]X$ 의 특성근이 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < 0$ 을 만족하는 k 를 산출하기 위하여,

$$\det(sI - A - Bk) = (s + \lambda)^4$$

라 놓은 후, 양변을 전개하여 계수를 비교하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \\ L_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p \\ B_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_p \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$L^T = A_p k^T + B_p$$

식(11)을 k^T 에 대하여 정리하면

$$k^T = A_p^{-1}L - A_p^{-1}B_p \quad (12)$$

와 같이 k 를 얻을 수 있다. $\lambda = 5$ 인 경우

$$(s + 5.0021 \pm 0.002164i)(s + 4.9979 \pm 0.0021i)$$

과 같은 최적근을 얻었으며,

$$(1.7459, 9.1604, 0.5494, 2.1708)$$

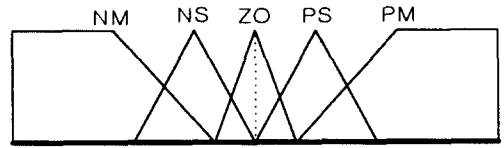
의 상태 피드백 이득 k 를 산출하였다.

2.2.2 퍼지 논리 제어기

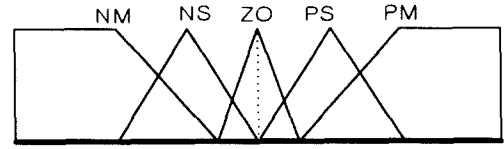
퍼지 논리 제어를 위한 소속함수들이 그림 3과 같다. 각 소속함수들의 배열은 전형적인 삼각형법을 사용하였다. 그러나, 퍼지화된 입력 변수의 소속함수를 선형적으로 구성할 경우, 미세한 제어가 요구되는 목표점 부근에서 오차에 의한 진동을 계속하거나 안정 제어 범위를 벗어나는 경우가 발생한다. 이에 대해, 퍼지화된 입력 θ_1 와 θ_2 의 소속함수를 그림 3과 같이 ZO점 부근에서 밀집시킴으로써 목표점부근의 미세한 제어를 고려하였다. 제어 입력에 대한 소속함수는 그림 4와 같으며, 무게 중심법에 의

표 2. 퍼지 제어 규칙

$\theta_1 \backslash \theta_2$	NM	NS	ZO	PS	PM
NM	PM	PM	PM	PS	ZO
NS	PM	PM	PS	ZO	NS
ZO	PM	PS	ZO	NS	NM
PS	PS	ZO	NS	NM	NM
PM	ZO	NS	NM	NM	NM



(a)



(b)

그림 3. (a) θ_1 의 소속함수 (b) θ_2 의 소속함수

Fig. 3.(a) The membership function of θ_1

(b) The membership function of θ_2

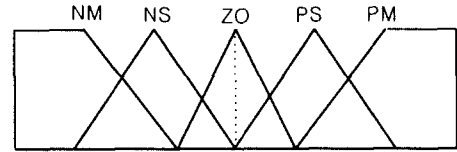


그림 4. 제어 입력의 소속함수

Fig. 4. The membership function of the controlled input

해 디퍼지화 결과 민감한 제어 입력을 얻을 수 있게 하였다[6].

표 2는 퍼지 논리 제어기에 사용된 제어 규칙들이다. 총 25가지의 규칙들이 관절1의 위치와 관절 2의 위치에 대하여 정의되었다.

3. 시뮬레이션 및 실험

2링크 도립 진자의 자세 제어를 위하여 제시한 제어기의 타당성을 검증하기 위하여 제어 대상의 수학적 모델에 대한 시뮬레이션을 수행하였다. 제어 대상 및 제어기 프로그램은 C-언어로 작성되었으며, 모델링에 사용된 상수값(표1)들은 제작된 장치의 규격을 사용하였다. 본 연구에서 제시된 제어기는 퍼지 제어기와 상태 피드백 제어기로 구성되어 있는데, 초기 상태(그림 5(a))에서 도립 진자는 퍼지 제어기에 의해 선형화 구간으로 진입되고(그림 5(b)(c)), 선형화 구간에서는 상태 피드백 제어기에 의해 완전히 도립하게 된다(그림 5(d)(e)).

그림 6은 퍼지 제어기의 한번의 선형 구간 진입 시도에 의해 각 링크를 선형화 구간으로 진입시키고 이어서 선형 피드백 제어기에 의해 수직으로 도립 진자를 도립시키는 과정을 그래프화 한 것이다. 초기 조건으로 $\theta_1 = -5^\circ$, $\theta_2 = 10^\circ$ 로 하였으며, 상태

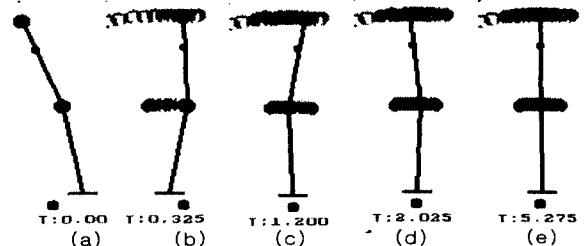


그림 5. 도립 진자의 도립 과정

Fig. 5. The upright processing of the inverted pendulum

피드백 제어기의 영점을 결정하는 $\lambda=5$ 으로 하였다.

그림 7은 링크의 초기 각도가 $\theta_1=-10^\circ$, $\theta_2=-25^\circ$ 인 경우의 시뮬레이션 결과이다. 퍼지제어기가 링크를 선형화 구간으로 진입시키나 링크의 진입 속도가 커서 선형화 구간을 이탈하게 되고 다시 퍼지 제어기에 의해 재 진입되어 최종적으로 상태 피드백 제어기에 의해 도립 되는 결과를 보여준다. 이 때, 제어기의 스위칭 구간은 퍼지 제어기에서 상태 피드백 제어기로의 전환 구간은 $-2^\circ < \theta_1, \theta_2 < 2^\circ$ 이며, 각 링크가 $-8^\circ > \theta_1, \theta_2$ 이거나 $\theta_1, \theta_2 < 8^\circ$ 인 구간 밖으로 벗어나면 다시 퍼지 제어기에 의해 제어된다.[5]

그림 8은 실 제작된 도립 진자 시스템이다. 각 링크의 위치는 Potentiometer에 의해 검출되어 A/D Converter를 통해 PC에 전달되며, 이에 대한 제어 입력은 D/A Converter를 통해 Amplifier에서 증폭되어 상부 관절에 위치한 DC 모터에 전달되게 된다.

그림 9는 도립 진자 시스템의 실험 결과이다. 전체적으로 링크가 심한 진동을 하여 계속적인 실험이 불충분하였다. 이는 위치 검출을 하는 Potentiometer에 심한 noise가 발생하며 샘플링 주기가 짧아 링크의 각속도가 매우 심하게 변화하기 때문이다. 이에 대한 대책으로서 회로에 noise 제거 필터를 제시하였으며, 소프트웨어 측면에서는 butterworth 필터를 제시하였다. 그림 9에서 넓은 각도에 분포한 점선은 노이즈를 포함한 각도이며 중앙의 진한 실선은 butterworth를 적용하여 노이즈를 상당 부분 제거한 링크의 각도 변화이다. 이로써 향상된 제어 결과를 얻을 수 있었다.

4. 결 론

본 연구에서 제시된 2링크 도립 진자는 이동중인 두발 보행 로봇의 보행 자세를 모델링한 것이며, 이를 제어하기 위하여 상태 피드백 - 퍼지 제어기를 제시하였다. 시뮬레이션을 통하여 제어 대상의 자세를 수직 도립 하도록 제어하였으며, 실험을 통하여 노이즈 제거에 대한 향후 과제를 얻게 되었다.

이 제어기는 추가적인 하드웨어, 소프트웨어의 개선을 통하여 두발 보행 로봇의 보행 자세 제어에 활용될 수 있으며, 추후 과제로는 실제 장치의 정확한 마찰 계수 산출과 효과적인 노이즈 제거가 요구된다.

[참 고 문 헌]

- [1] K.Y. Yi and Yuan F. Zheng, "Biped Locomotion by Reduced Ankle Power," Proceeding IEEE ICRA'96, Vol. 1, pp. 584-589, 1996.
- [2] C.C. Lee, "Fuzzy Logic in Control System: Fuzzy Logic Controller-Part I, II," IEEE Trans. Sys. Man Cybernetics, Vol. 20, No.2, pp. 404-435, 1990
- [3] M. Spong, M. Vidyasagar, Robot Dynamics and Control, Wie Wiley, 1989
- [4] K. Furuta, "Attitude control of a triple inverted pendulum," Int. J. Control, Vol. 39, No. 6, pp. 1351-1365, 1984
- [5] C. E. Lin, Y. R. Sheu, "A Hybrid- Control Approach for Pendulum-Car Control," IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 39, No. 3, pp. 208-214, 1992
- [6] 조영삼, 박진현, "퍼지 제어를 이용한 도립진자 제어에 관한 연구," '94 하계 학술 대회 논문집, pp. 750-752, 1994

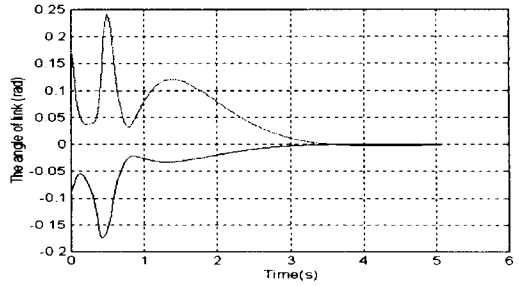


그림 6. 도립 진자의 직접 도립

Fig. 6. The direct uprising of the inverted pendulum

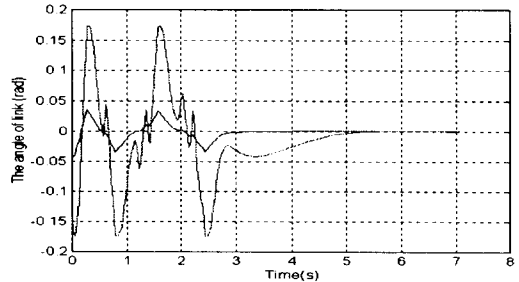


그림 7. 도립 진자의 제시도에 의한 도립

Fig. 7. The uprising retrieval of the inverted pendulum

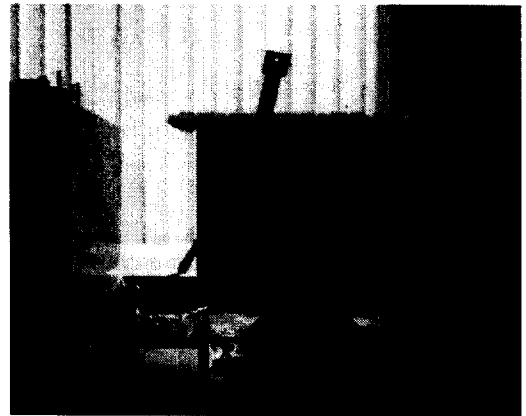


그림 8. 도립 진자 시스템

Fig. 8. The double inverted pendulum system

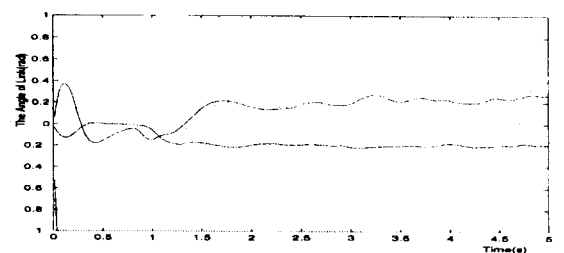


그림 9. 실험 결과 및 노이즈 대책

Fig. 9. The Result and the countermeasure for noises