

방사 기저 함수 회로망을 이용한 혼돈 비선형 시스템의 직접 적응 제어

Direct Adaptive Control of Chaotic Nonlinear Systems  
Using a Radial Basis Function Network

°김근범\*, 박광성\*, 주진만\*, 최윤호\*\*, 박진배\*

\* 연세대학교 전기공학과(Tel: (02)361-2773; Fax: (02)392-4230; E-mail: kbkim@control.yonsei.ac.kr)

\*\* 경기대학교 전자공학과(Tel: (0331)40-7826; Fax: (0331)40-7645; E-mail: yhchoi@kuic.kyonggi.ac.kr)

**Abstract** Due to the unpredictability and irregularity, the behaviors of chaotic systems are considered as undesirable phenomena to be avoided or controlled. Thus in this paper, to control systems showing chaotic behaviors, a direct adaptive control method using a radial basis function network (RBFN) as an excellent alternative of multi-layered feed-forward networks is presented. Compared with an indirect scheme, a direct one does not need the estimation of the controlled process and gives fast control effects. Through simulations on the two representative continuous-time chaotic systems, Duffing and Lorenz systems, validity of the proposed control scheme is shown.

**Keywords** Chaos Control, Chaotic Systems, RBF network (RBFN), Direct Adaptive Control, Intelligent Control

1. 서론

혼돈 현상은 내부적으로는 결정론적 규칙에 의해 지배되나 강한 비선형성으로 인해 외부적으로 몹시 불규칙한 동태를 보이는 현상으로서 일반적으로 시스템의 성능을 저해하는 바람직하지 못한 현상으로 받아들여지고 있다[3]. 따라서 이의 제어 혹은 억제에 위한 여러 가지 다양한 방법의 시도들이 있었다. 혼돈 시스템에 대한 최초의 제환 제어 기법인 OGY 방법[5]은 시스템의 접근 가능한 매개변수에 작은 섭동을 부가하여 시스템의 불안정한 주기 궤도를 안정화 시키는 것으로써 시스템의 매개변수에 접근이 용이하지 않을 경우 효과를 볼 수 없는 단점이 있다. 또한 기존의 공학적인 제환 제어 방법을 이용하여 혼돈 시스템을 제어하는 연구도 있었으나[2], 제환 이득값을 매우 크게 주어야 하는 문제가 있었다. 반면 비선형적이고 불확실한 시스템에 강인한 특성을 가지는 지능 제어 기법을 이용하여 혼돈 비선형 시스템을 제어한 연구[4,10]는 다른 방법들에 비해 효과적인 결과를 보였다. 한편 간단한 구조를 지니면서도 빠른 수렴특성을 지니는 방사 기저 함수 회로망(radial basis function network: RBFN)의 우수한 성능으로 인해 다층 전향 신경회로망(multilayered feedforward neural networks)을 RBFN으로 대체하려는 시도들이 이루어지고 있고 비선형 시스템의 제어에 사용된 연구도 보고되고 있다[9].

따라서 본 논문에서는 RBFN의 우수한 적응력과 빠른 수렴 특성을 이용하여 대표적인 비선형 시스템인 혼돈 시스템에 대해, 동정(identification) 과정을 필요로 하지 않는 직접 적응 제어 시스템을 설계하고자 한다. 또한 두 가지 연속 시간 혼돈 시스템인 Duffing 시스템과 Lorenz 시스템에 대한 모의 실험을 통해 설계된 제어 시스템의 제어 성능을 평가한다.

2. 제어 대상 혼돈 비선형 시스템

본 논문에서 제어하고자 하는 혼돈 시스템은 대표적인 연속 시간 혼돈 시스템인 Duffing 시스템과 Lorenz 시스템이다.

2.1 Duffing 시스템

Duffing 방정식은 역학 문제에서 많이 관찰되는 강력 스프링 효과를 설명하기 위해 유도되었고 식 (1)과 같은 2 차 미분 방정식으로 표현된다[2].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -p_1x_1 - p_2x_2 - x_1^3 + p \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (1)$$

식 (1)의 Duffing 방정식은 매개변수값에 따라 평형점이나 주기 궤도로 수렴하기도 하고 혼돈적인 동태를 보이기도 하며 혼돈

특성을 가지게 하는 매개변수 집합중 하나인  $\{p_1, p_2, \omega, q\} = \{-1.1, 0.4, 1.8, 1.8\}$ 에 대한  $x_1$ 의 궤적은 그림 1과 같다.

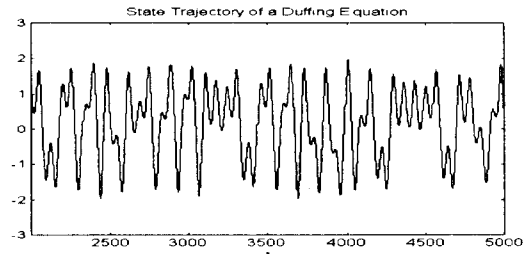


그림 1 Duffing 방정식의 상태 궤적  
Fig. 1 State trajectory of a Duffing equation

그림 1의 궤적은 매우 불규칙한 형태를 지니지만 일정한 영역을 벗어나지 않는 스트레인지 어트랙터(strange attractor)를 형성한다. 그림 2는 Duffing 방정식에 대한 스트레인지 어트랙터를 나타낸다.

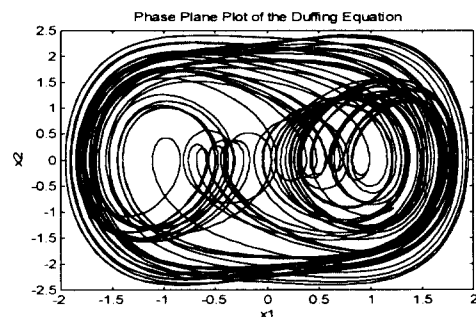


그림 2 Duffing 방정식의 스트레인지 어트랙터  
Fig. 2 Strange attractor of a Duffing equation

2.2 Lorenz 시스템

대기 중에서 발생하는 대류 현상의 간략화 모델로서 제시된 Lorenz 방정식은 식 (2)와 같이 3 개의 상태변수에 관한 비선형 미분 방정식으로 표현된다[7].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (2)$$

Lorenz 방정식은  $\{\sigma, r, b\} = \{10, 28, 8/3\}$ 의 매개변수값들에 대해 그림 3과 같은 불규칙한 궤적을 형성하고 이에 대한 스트레인지 어트랙터는 그림 4와 같다. Lorenz 방정식은  $r > 1$ 에 대해  $x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}$ ,  $z^* = r-1$ 의 고정점을 갖는다[7].

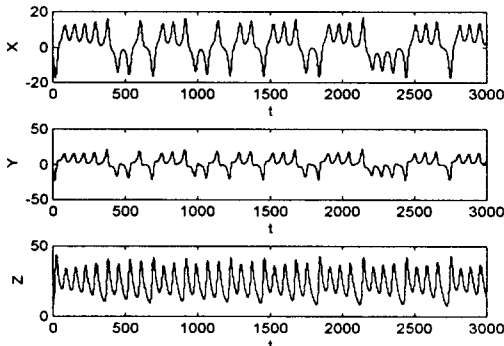


그림 3 Lorenz 방정식의 상태 궤적  
Fig. 3 State trajectory of a Lorenz equation

Phase Plane Plot of the Lorenz Equation

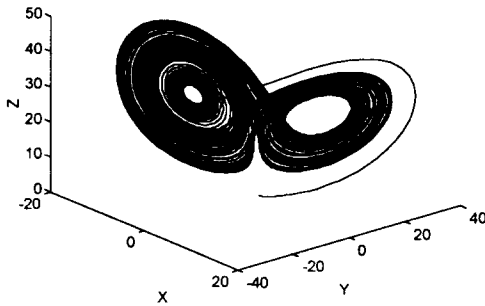


그림 4 Lorenz 방정식의 스트레인지 어트랙터  
Fig. 4 Strange attractor of a Lorenz equation

### 3. 방사 기저 함수 회로망을 이용한 직접 적용 제어

#### 3.1 방사 기저 함수 회로망

다차원 공간에서의 비선형 데이터들에 대한 강한 보간(strict interpolation)에 사용되어 왔던 RBFN은 일단 적절한 중심값을 결정하기만 하면 풀어야 할 문제가 출력층의 연결강도에 대한 선형 방정식으로 간단해지고 최적화나 함수 근사화 문제에 적용되었을 경우 빠른 수렴특성을 갖는 장점이 있다. RBFN은 이러한 우수한 특성들로 인해 연결강도에 대해 비선형적인 관계를 갖는 다층 전향 신경 회로망을 대신하여 시스템 모델링 및 제어 등에 적용되어 좋은 결과를 얻은바 있다[9]. RBFN은 일반적으로 입력층과 하나의 은닉층(hidden layer) 그리고 출력층으로 구성된다.  $N$ 개의 입력( $x_k, k=1, \dots, N$ )과 1개의 출력( $y$ )으로 구성된 간단한 MISO(multiple-input single-output) RBFN의 구조는 그림 5와 같다. 그림 5에서  $w_k, k=1, \dots, N$ 는 은닉층의 각 노드와 출력 노드 사이의 연결 강도이고,  $\phi_k, k=1, \dots, N$ 은 은닉층의 각 노드에 대한 방사 기저 함수이다. 본 논문에서는 식 (3)과 같은 가우시안 기저 함수 (Gaussian basis function)를 사용한다.

$$\phi(\|x - c\|) = \exp\left\{-\|x - c\|^2 / 2\sigma^2\right\} \quad (3)$$

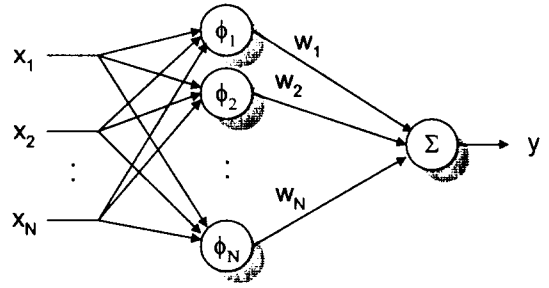


그림 5 간단한 MISO RBFN의 구조  
Fig. 5 Structure of a simple MISO RBFN

여기서  $x$ 는 입력 벡터,  $c$ 는 가우시안 기저 함수의 중심,  $\sigma$ 는 기저 함수의 폭(width)이다. 결국 그림 5의 RBFN의 출력  $y$ 는 식 (4)와 같은 선형 회귀 방정식(linear regression equation)으로 표현 된다.

$$y = \sum_{k=1}^N w_k \phi_k(\|x - c_k\|) + w_0 \quad (4)$$

일반적으로 RBFN의 성능은 기저 함수들의 중심 위치에 가장 큰 영향을 받는다[1]. 기저 함수의 중심 위치는 보통 입력 데이터들이 존재하는 공간 내에서의 적절한 샘플링을 통해 얻어지고 출력층의 연결 강도는 임의의 작은 값으로 초기화한다. RBFN의 연결 강도에 대한 선형화 특성을 위해 중심 위치는 일단 고정된 후에는 갱신을 하지 않지만 문제에 따라 경사 하강법 (gradient descent method) 등의 방법으로 갱신할 수 있다. 본 논문에서는 혼돈 시스템에 대한 제어의 과정에서 중심 위치와 연결 강도를 식 (5)에 의해 갱신한다.

$$\Delta w_k = \eta_w \cdot e \cdot \phi_k(\|x - c_k\|) \quad (5a)$$

$$\Delta c_k = -\eta_c \cdot e \cdot w_k \cdot \phi_k(\|x - c_k\|) \cdot (x - c_k) / \sigma^2 \quad (5b)$$

여기서  $\eta_w, \eta_c$ 는 각각 중심과 연결 강도에 대한 학습률이다.

#### 3.2 RBFN을 이용한 혼돈 비선형 시스템의 직접 적용 제어

RBFN을 이용하여 혼돈 비선형 시스템을 제어할 직접 적용 제어 시스템의 구조는 그림 6과 같다.

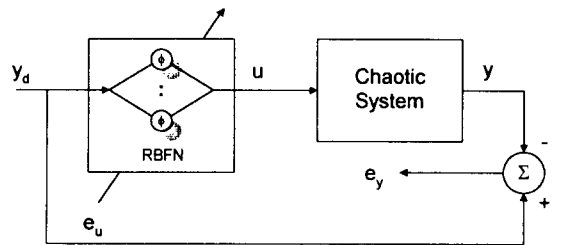


그림 6 RBFN을 이용한 직접 적용 제어 시스템의 구조  
Fig. 6 Structure of a direct adaptive control system using RBFN

식 (5)와 그림 6에서 알 수 있듯이 RBFN의 중심 위치 및 출력층의 연결 강도 갱신을 위해서는 RBFN 출력단에서의 오차를 필요로 한다. 그러나 외부에서 얻을 수 있는 정보는 기준 신호  $y_d$ 와 시스템의 출력 신호  $y$  그리고 두 신호 사이의 차이인 시스템의 출력 오차  $e_y (= y_d - y)$ 이다. 따라서 시스템의 출력 오차를 RBFN의 출력단 오차로 변환해야 하는 문제가 발생한다. 이러한 문제를 해결하기 위해 Psaltis 등[6]은 제어 대상 시스템을 회로망의 출력단에 덧붙여진 하나의 부가적인 층으로 생각하여 시스템의 출력 오차와 시스템의 Jacobian이 곱해진 값을

회로망으로 역전과시키는 특별 학습 방법 (specialized learning scheme)을 제안하였다. 그러나 시스템의 Jacobian 이 시간에 따라 바뀌는 값의 범위가 매우 크므로 학습률을 충분히 작게 주어야 하고 이는 학습 속도가 느려짐을 의미하므로 유효 시간내에 제어 효과를 얻기 힘들게 된다. 한편 Venugopal 등[8]은 신경 회로망 제어기의 출력층과 제어 대상 시스템 사이에 하나의 이득층 (gain layer)을 두고 이것이 시스템의 역 동력학(inverse dynamics)을 선형 근사화할 수 있도록 이득층의 값을 학습시킴으로써 시스템의 출력오차를 회로망의 출력오차로 사용할 수 있도록 하였다.

본 논문에서는 이러한 이득층 방법을 이용하여 그림 7 과 같이 제어기의 출력과 시스템의 입력 사이에 이득층(g)을 삽입하고 매 시간에 대한 시스템의 오차  $e_y$  를 이용해 이득값과 RBFN의 중심 및 연결 강도를 갱신한다.

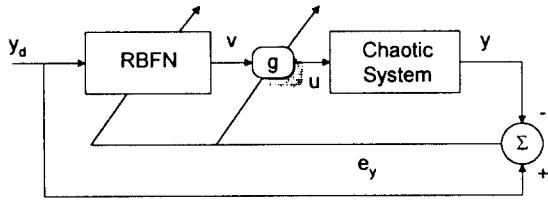


그림 7 이득층을 사용한 직접 적응 제어 시스템의 구조  
Fig. 7 Structure of a direct adaptive control system using a gain layer

이 경우 시간  $k$ 에서의 이득을  $g(k)$ 라 하면 이득층에 대한 갱신은 식 (6)과 같이 표현된다.

$$g(k) = g(k-1) + \Delta g(k) \quad (6)$$

최소화할 오차 함수를  $e_y^2/2$ 로 정의하고 이득층의 학습률을  $\eta_g$ 라 하면 식 (6)에서 이득 변화량  $\Delta g(k)$ 는 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Delta g(k) &= -\eta_g \cdot \frac{\partial \left( \frac{1}{2} e_y^2 \right)}{\partial g(k)} \\ &= -\eta_g \cdot \frac{\partial \left( \frac{1}{2} e_y^2 \right)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial g(k)} \\ &= \eta_g \cdot e_y \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \cdot v \end{aligned} \quad (7)$$

#### 4. 모의 실험 및 결과 고찰

제안된 제어 시스템을 두 개의 연속시간 혼돈 비선형 시스템인 Duffing 시스템과 Lorenz 시스템에 적용하여 모의 실험을 수행하였다.

##### 4.1 Duffing 시스템

Duffing 시스템의 추적 제어(tracking control)를 위한 기준 입력은 그림 8 과 같은 Duffing 방정식의 1 주기 해로 설정하였다. 제어를 위한 RBFN의 중심의 위치는 그림 7의 기준 입력값을 최대치와 최소치 사이에서 균등하게 분할한 값들로 설정하였고 은닉층의 노드 개수는 10 개로 하였다. 출력층의 연결 강도와 이득층의 초기 이득값은 각각 -0.1과 0.1 사이의 임의의 값과 -0.5와 0.5 사이의 임의의 값으로 설정하였다. 중심, 연결 강도, 이득층에 대한 학습률은 각각  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-7}$ 로 하였다. 또한 식 (1)의 Duffing 시스템에 대한 두 상태 변수의 초기치는 모두 0으로 하였다. 시스템으로 하여금 완전한 혼돈 특성을 보이도록 하기 위해 시스템을 가동한 후 2000 번의 반복(iteration)이

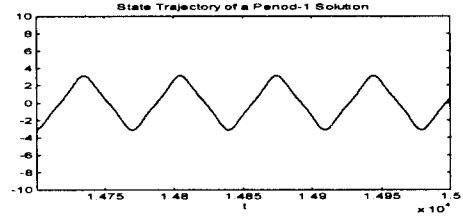


그림 8 Duffing 시스템의 추적 제어를 위한 기준 입력 (Duffing 방정식의 1 주기 해)  
Fig. 8 Reference input for tracking control of a Duffing system (Period-1 solution of a Duffing equation)

지난 후에 제어를 시작하였다. 제어 과정에서 중심과 연결 강도의 학습은 식 (5)를 이용하였다.

15000 번의 반복 후 기준 입력과 시스템의 실제 출력은 그림 9와 같다. 결과를 통해서 비교적 작은 크기의 회로망을 이용해 혼돈 비선형 시스템에 대해 만족할 만한 제어 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그림 10은 제어 신호의 형태와 시간에 따른 이득층의 이득값의 변화를 나타낸다.

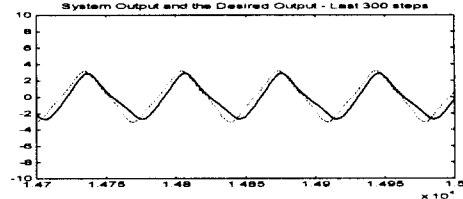


그림 9 Duffing 시스템의 제어 결과 (점선: 기준 입력; 실선: 시스템 출력)  
Fig. 9 Result of the control of a Duffing system (dotted: reference input; solid: system output)

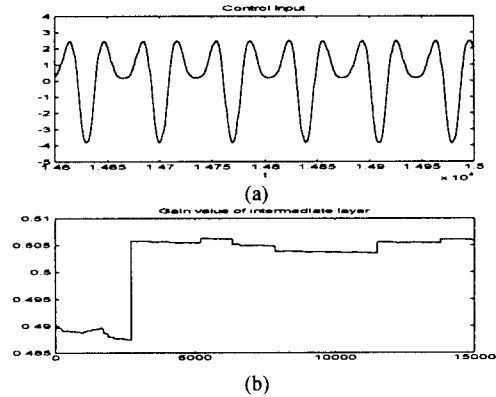


그림 10 (a) 제어 입력 (b) 이득층의 이득값  
Fig. 10 (a) Control input (b) Gain value of a gain layer

그림 10을 통해, 이득층의 이득값을 적절히 설정함으로써 비교적 작은 크기의 RBFN과 간단한 제어 신호로써 복잡한 비선형 시스템에 대한 제어가 가능함을 알 수 있다.

##### 4.2 Lorenz 시스템

Lorenz 시스템의 조절 제어(regulation control)를 위한 기준 입력은 다음과 같은 Lorenz 방정식의 평형점으로 설정하였다.

$$x^* = y^* = -8.4853, \quad z^* = 27$$

RBFN의 중심 위치는 기준 입력값 근처에서 임의로 샘플링한 값을 사용하였고 이의 학습을 위해 역시 식 (5)를 이용하였다.

노드 개수는 40 개로 하였고 출력층의 연결 강도와 이득층의 이득값은 모두 0 과 1 사이의 임의의 값으로 초기화하였다. 중심, 연결 강도, 이득층에 대한 학습률은 각각  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-10}$  으로 하였다. 식 (2)의 Lorenz 시스템의 세 상태 변수  $x, y, z$  의 초기치는 각각 0.1673, 0.5656, 0.9854 의 값을 선택하였고 시스템으로 하여금 완전한 혼돈 현상을 지니도록 하기 위해 2000 번의 반복 후에 제어를 시작하였다.

30000 번의 반복 후의 세 변수  $x, y, z$  에 대한 기준 입력과 시스템의 실제 출력은 그림 11 과 같다.

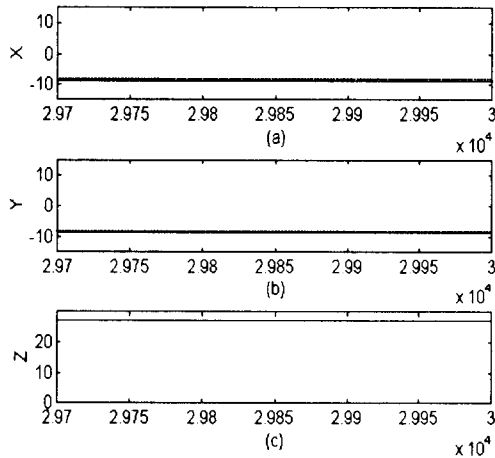


그림 11 Lorenz 시스템의 제어 결과  
(a) 상태변수  $x$  (b) 상태변수  $y$  (c) 상태변수  $z$   
(점선: 기준 입력; 실선: 시스템 출력)

Fig. 11 Result of control of the Lorenz system  
(a) State variable  $x$  (b) State variable  $y$  (c) State variable  $z$   
(dotted: reference input; solid: system output)

제어 결과  $x, y, z$  가 기준점으로부터 각각 0.4549, 0.0982, -0.4389 만큼의 오차를 보였고 상당히 정확한 제어가 이루어졌음을 알 수 있다. Lorenz 시스템에 대한 제어 입력과 시간에 따른 이득층의 이득값의 변화는 그림 12 와 같다.

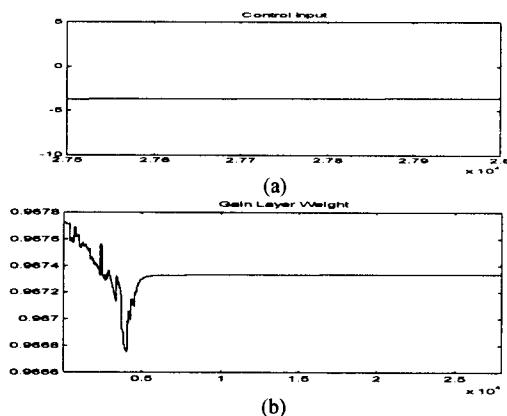


그림 12 (a) 제어 입력 (b) 이득층의 이득값  
Fig. 12 (a) Control input (b) Gain value of a gain-layer

Lorenz 시스템의 경우 시스템의 차수(상태 변수의 개수)가 크고 상태 변수들이 서로 비선형적으로 결합되어 있으므로 Duffing 시스템에 비해 더 큰 크기의 RBFN 과 더 많은 학습 시간이 필요함을 알 수 있다.

## 5. 결론

본 논문에서는 다층 전향 신경 회로망에 비해 크기가 작으면 시도 더 빠른 수렴 특성을 가지는 방사 기저 함수 회로망을 이용해 대표적인 비선형 시스템인 혼돈 시스템의 직접 적용 제어를 위한 제어 시스템을 설계하였다. 직접 적용 제어는 간접 적용 제어에 비해 제어 대상 시스템의 모델링이나 동정 과정이 필요 없으므로 더 빠른 제어 효과를 얻을 수 있는 장점이 있다. 연속 시간 혼돈 시스템인 Duffing 시스템과 Lorenz 시스템에 대한 모의 실험을 통해 제안된 제어 시스템이 복잡한 비선형 시스템을 효과적으로 제어할 수 있음을 입증하였다.

앞으로의 연구는 RBFN의 함수 근사화 기능을 이용하여 시스템에 대한 동정을 포함하는 간접 적용 제어 시스템의 설계가 될 것이다.

## 참고문헌

- [1] S. Chen, C. F. N. Cowan, and P. M. Grant, "Orthogonal Least Squares Learning Algorithm for Radial Basis Function Networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 2, no. 2, pp. 302-309, 1991.
- [2] G. Chen and X. Dong, "On Feedback Control of Chaotic Continuous-Time Systems," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 40, no. 9, pp. 591-601, 1993.
- [3] G. Chen and X. Dong, "From Chaos to Order - Perspectives and Methodologies in Controlling Chaotic Nonlinear Dynamical Systems," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 3, no. 6, pp. 1363-1409, 1993.
- [4] G. Chen and X. Dong, "Identification and Control of Chaotic Systems: An Artificial Neural Network Approach," *Proc. IEEE Int. Symposium Circuits and Systems*, Seattle, WA, pp. 1177-1182, 1995.
- [5] E. Ott, C. Grebogi, and A. Yorke, "Controlling Chaos," *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 11, pp. 1196-1199, 1990.
- [6] D. Psaltis, A. Sideris, and A. A. Yamamura, "A Multilayered Neural Network Controller," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 4, pp. 17-21, April 1988.
- [7] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [8] K. P. Venugopal, R. Sudhakar, and A. S. Pandya, "On-Line Learning Control of Autonomous Underwater Vehicles Using Feedforward Neural Networks," *IEEE J. Oceanic Eng.*, vol. 17, no. 4, pp. 308-319, 1992.
- [9] C. Xiaohong, G. Feng, and Q. Jixin, "Nonlinear Adaptive Control Based on RBF Networks and Multi-model Method," *Proc. American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico, pp. 1563-1567, June 1997.
- [10] 오기훈, 주진만, 박광성, 박진배, 최윤호, "신경 회로망을 이용한 혼돈 비선형 시스템의 지능 제어에 관한 연구," *Proc. 11th KACC*, pp. 453-456, October 1996.