

스튜어트 플랫폼의 동역학적 최적설계를 위한 해석적인 표현

An Analytical Expression for a Dynamic Optimal Design
of the Stewart Platform

권병희, 손권*

* 부산대학교 기계공학과(Tel: 051-510-2308; Fax: 051-512-9835; E-mail: kson@hyowon.cc.pusan.ac.kr)

Abstracts This study was carried out to obtain an analytical expression for the specifications of the Stewart Platform that minimize the maximum force acting on the hydraulic cylinder. The position and orientation of the platform were calculated by means of the inverse kinematic analysis. The maximum force to be exerted on a cylinder was calculated using the Newton's second law for the case when the platform is moved along a horizontal axis with 0.6 g, the maximum translational acceleration possible. This paper suggests a mathematical model to minimize the maximum actuating force using radius and angle ratios as design variables. Finally, a fuzzy set for the minimum actuating force is proposed for this dynamic optimal design problem.

Keywords Stewart Platform, Mathematical Model, Dynamic Optimal Design, Fuzzy Set, Minimum Actuating Force

1. 서론

스튜어트[1]에 의해 제안된 스튜어트 플랫폼은 각 링크가 병렬로 연결되는 폐쇄연결구조로 되어 큰 하중을 구동시킬 수 있는 장점이 있다. 그러나 부하조건과 공간운동조건을 만족하는 최적 시스템 설계가 용이하지 않으며, 직선 작동기의 행정이 제한되기 때문에 운동영역에 한계가 있는 단점이 있다. 메카니즘적인 측면에서 스튜어트 플랫폼은 직렬형 매니플레이터에 비해 힘-무게비가 크고, 위치 정확도가 높으므로 고정밀 작업과 큰 힘을 요구하는 작업에 적합하다. 이 병렬형 매니플레이터의 구성요소는 하판, 상판, 그리고 6개의 액추에이터로 구성되어 있다. 이같은 병렬형 매니플레이터는 구조적으로 페루프의 형상을 가지고 있으므로 개루프형상을 가진 직렬형 매니플레이터 보다 구조적인 측면에서 보다 높은 강성도를 가진다. 그래서 무거운 물체의 조작이 용이하다. 그리고, 직렬형 매니플레이터의 경우 계산시 오차가 단말 효과기에서 계속 누적되는 반면에 병렬형 매니플레이터의 경우 오차가 누적되지 않아 정확도를 개선시킬 수 있다. 그러나 단점으로 작업공간이 직렬형 매니플레이터보다 제한된 영역을 가진다.

스튜어트 플랫폼의 동역학 해석은 스튜어트 플랫폼의 구동에 요구되는 힘 또는 토크를 구하는 것으로 실린더 설계뿐 아니라 플랫폼의 기하학적 형상설계와 밀접한 관계가 있다. 기존의 스튜어트 플랫폼의 최적설계에 관한 연구[2, 4]는 기구학적 최적설계에 중점을 두었으며, 동역학적 최적설계는 크게 고려되지 않았다. 본 연구에서는 스튜어트 플랫폼의 동역학적 해석을 통하여 플랫폼의 구동력과 플랫폼의 형상사이의 해석적인 표현으로 수식적인 모델을 제시하고자 한다. 플랫폼의 형상설계에 관련된 설계변수로 반경비와 각도비를 정의하고 이 두변수에 대하여 최대구동력을 구하는 함수를 제한하고, 동역학적 최적설계를 위해 구동력을 최소화하는 반경비와 각도비를 구하는 퍼지집합을 제안한다.

2. 스튜어트 플랫폼의 좌표계

그림 1은 병렬형 매니플레이터의 기하학적 형태를 간단하게 도식화한 것이다. 상판의 고정좌표계의 원점은 상판의 중심에 두고, x_p 축은 두 점 p_1, p_6 을 연결하는 선과 수직이 되도록 설정한다. p_1 과 p_2 사이의 각도는 θ_p 로 나타낸다. 상판에서 각 관절의 대칭적인 분포를 위해 p_1 과 p_3 및 p_3 와 p_5 사이각을 120° 로 하였다. 상판과 동일하게 하판의 좌표계를 설정하여 관성좌표계의 원점은 하판의 중심에 두고, x_b 축은 두 점 b_1, b_6 을 연결하는 선과 수직이 되도록 설정한다. b_1 과 b_2 사이의 각도는 θ_b 로 나타낸다. 하판에서 각 관절의 대칭적인 분포를 위해 b_1 과 b_3 및 b_3 와 b_5 의 사이각을 120° 로 하였다.

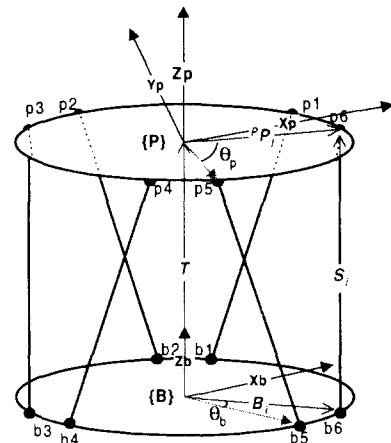


그림 1 스튜어트 플랫폼의 좌표계
Fig. 1 The coordinate system of the Stewart Platform

상판의 고정좌표계에 대해 실린더에 연결되는 볼조인트의 위치벡터는 다음과 같다.

$${}^u P_i = [r_p \cos(A_{Pi}) \quad r_p \sin(A_{Pi}) \quad 0]^T \tag{1}$$

$$A_{Pi} = 60^\circ i - \frac{\theta_p}{2} \quad (i = 1, 3, 5)$$

$$A_{Pi} = A_{Pi-1} + \theta_p \quad (i = 2, 4, 6)$$

하판에서 불조인트의 위치도 같은 방법으로 구할 수 있다.

$$B_i = [r_B \cos(A_{Bi}) \quad r_B \sin(A_{Bi}) \quad 0]^T \quad (2)$$

$$A_{Bi} = 60^\circ i - \frac{\theta_b}{2} \quad (i = 1, 3, 5)$$

$$A_{Bi} = A_{Bi-1} + \theta_b \quad (i = 2, 4, 6)$$

여기서 r_B 와 r_P 는 하판과 상판의 반지름을 나타낸다.

$x(\alpha) - y'(\beta) - z''(\gamma)$ 의 오일러각을 이용하여 관성좌표계에 대한 상판의 방위를 회전행렬 R 로 나타내었다[3].

$$R = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} C_\beta C_\gamma & -C_\beta S_\gamma & S_\beta \\ C_\alpha S_\gamma + S_\alpha S_\beta C_\gamma & C_\alpha C_\gamma - S_\alpha S_\beta S_\gamma & -S_\alpha C_\beta \\ S_\alpha S_\gamma - C_\alpha S_\beta C_\gamma & S_\alpha C_\gamma + C_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\alpha C_\beta \end{bmatrix}$$

관성좌표계에 대한 상판의 위치는 벡터 T 로 표시할 때, T 는 관성좌표계의 원점에서부터 상판의 고정좌표계의 원점까지의 벡터이다.

$$T = [T_x \quad T_y \quad T_z]^T \quad (4)$$

2.1 실린더 좌표계

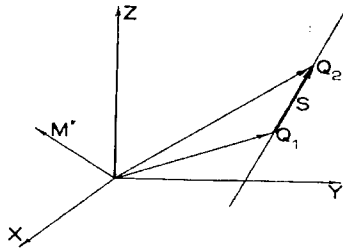


그림 2 Plücker 좌표계

Fig. 2 The Plücker coordinate system

상판을 지지하는 6개의 실린더는 Plücker 좌표계[2]를 이용하여 표시하였다. Plücker 좌표계는 그림 2와 같이 직선 위의 임의의 두점으로부터 아래의 식으로 결정된다.

$$S = Q_2 - Q_1 \quad (5)$$

$$M' = Q_1 \times Q_2 = Q_1 \times S = Q_2 \times S \quad (6)$$

여기서 벡터 S 는 직선 위에 있고, 벡터 M' 는 직선과 원점을 포함하는 평면에 수직이다. 벡터 M' 는 벡터 S 의 원점에 대한 모멘트이다. 이들 두 벡터는 직선 Plücker 좌표계의 6성분 벡터 U 로 조합된다.

$$U = [S_x \quad S_y \quad S_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T \quad (7)$$

Plücker 좌표계를 벡터 S 의 크기로 정규화하여 표시하면 다음과 같다.

$$s = \frac{S}{|S|} \quad (8)$$

$$M = \frac{M'}{|S|} \quad (9)$$

여기서 $|S| = \sqrt{S \cdot S}$ 이고, 벡터 s 는 직선 방향의 단위벡터이며, 벡터 M 은 원점에 대하여 직선을 따라 단위 힘이 가해질

때의 모멘트이다.

벡터 s 와 M 으로 정규화된 Plücker 좌표 U 를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$U = [s_x \quad s_y \quad s_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T \quad (10)$$

2.2 실린더 길이, 방향 및 모멘트

그림 1에서의 실린더 벡터 S_i 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_i = T + (R^P P_i) - B_i \quad (11)$$

실린더의 길이 σ_i 는 벡터 S_i 의 크기로 다음과 같다.

$$\sigma_i = |S_i| = \sqrt{S_i \cdot S_i} \quad (12)$$

관성좌표계를 기준으로 한 실린더의 방향은 S_i 방향의 단위벡터 s_i 이다.

$$s_i = \frac{S_i}{\sigma_i} \quad (13)$$

실린더의 관성좌표계의 원점에 대하여 정규화된 모멘트 M_i 는 식 (6)에 대입하면 다음과 같다.

$$M_i = B_i \times s_i = [T + R^P P_i] \times s_i \quad (14)$$

식 (12), (13), (14)는 관성좌표계를 기준으로 한 실린더의 길이, 방향 및 모멘트이다.

상판의 고정 좌표계를 기준으로 한 실린더의 벡터 방정식은 관성좌표계를 기준으로 유도하였던 방법과 같이 유도할 수 있다.

3. 기구학 및 동역학 해석

플랫폼의 기구학 해석은 역기구학과 순기구학 두 가지가 있으나 순기구학의 문제는 본 연구와 직접적인 관련이 없다. 역기구학 문제는 부하의 위치와 방향으로부터 작동기의 길이를 결정하는 것으로, 이는 상판이 특정한 운동을 하기 위해서 각 작동기에 가해지는 힘을 계산하는 경우에 사용되어진다. 앞 절에서 유도하였던 실린더 길이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 = & T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + r_P^2 + r_B^2 \\ & + 2(\alpha_x P_{ix} + \beta_x P_{iy})(T_x - B_{ix}) \\ & + 2(\alpha_y P_{ix} + \beta_y P_{iy})(T_y - B_{iy}) \\ & + 2(\alpha_z P_{ix} + \beta_z P_{iy})T_z - 2(T_x B_{ix} + T_y B_{iy}) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $i=1, 2, \dots, 6$ 이다.

스튜어트 플랫폼의 구동에 요구되는 힘 또는 토크를 구하는 것은 실린더 설계뿐 아니라 플랫폼의 기하학적 형상설계와 밀접한 관계가 있다. 플랫폼에는 실린더의 구동력, 중력과 외력이 작용한다. 실린더의 무게는 플랫폼에 비해 미소하므로 실린더의 질량은 무시한다[4]. 뉴턴 제2법칙을 사용하여 힘의 평형방정식과 모멘트 평형방정식을 구하면 다음과 같다.

$${}^P F_G + {}^P F_E + \sum_{i=0}^6 {}^P F_i = m {}^P a \quad (16)$$

$$\sum_{i=0}^6 {}^P T_i = {}^P \dot{H}_I - {}^P T_E \quad (17)$$

여기서 ${}^P F_G$ 는 중력 ($m {}^P g$), ${}^P F_E$ 는 외력, $\sum_{i=0}^6 {}^P F_i$ 는 i 번째 실린더의 구동력, $\sum_{i=0}^6 {}^P T_i$ 는 구동 토크, ${}^P \dot{H}_I$ 는 관성 텐서, ${}^P T_E$ 는 외부에서 가한 토크를 나타낸다.

식 (16)과 (17)을 결합하여 다음의 6×6 행렬로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P_{S_{1x}} & P_{S_{2x}} & \cdots & P_{S_{6x}} \\ P_{S_{1y}} & P_{S_{2y}} & \cdots & P_{S_{6y}} \\ P_{S_{1z}} & P_{S_{2z}} & \cdots & P_{S_{6z}} \\ P_{M_{1x}} & P_{M_{2x}} & \cdots & P_{M_{6x}} \\ P_{M_{1y}} & P_{M_{2y}} & \cdots & P_{M_{6y}} \\ P_{M_{1z}} & P_{M_{2z}} & \cdots & P_{M_{6z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m({}^P a_x - {}^P g_x) - {}^P F_{Ex} \\ m({}^P a_y - {}^P g_y) - {}^P F_{Ey} \\ m({}^P a_z - {}^P g_z) - {}^P F_{Ez} \\ {}^P \dot{H}_x - {}^P T_{Ex} \\ {}^P \dot{H}_y - {}^P T_{Ey} \\ {}^P \dot{H}_z - {}^P T_{Ez} \end{bmatrix} \quad (18)$$

4. 각도비와 반경비에 따른 최대구동력

이 장에서는 임의의 반경비를 가진 스튜어트 플랫폼의 상·하 판과 실린더를 연결하는 볼조인트의 각도와 플랫폼의 최대구동력의 연관관계를 나타내는 수식적 모델을 제안한다.

최대구동력은 가속도 0.6 g (610 mm/s²)로 플랫폼이 X축으로 병진운동할 때, 식 (10)을 이용하여 구한 플랫폼의 6개의 실린더 구동력중 가장 큰 값으로 정의한다.

반경비와 각도비의 정의는 다음과 같다.

$$\text{반경비} : \bar{r} = \frac{r_P}{r_B}, \quad 0 < \bar{r} \leq 1$$

$$\text{각도비} : \bar{\theta} = \frac{\theta_P}{\theta_B}, \quad 0 < \bar{\theta} < 1$$

4.1 시뮬레이션 결과

반경비를 0.1에서 1까지 0.1씩 증가시키고, 각도비를 0.1에서 0.9까지 0.1씩 증가시켜 각각의 반경비와 각도비에 대한 최대구동력을 구하였다. 그림 3은 시뮬레이션 결과를 3차원 공간상에 나타낸 그림이다.

그림 4와 5에서 반경비에 대한 최대구동력의 변화는 각도비에 대한 최대구동력의 변화에 비해 크지 않다. 각도비가 작을수록 최대구동력이 작아지는 것을 볼 수 있다. 반경비에 대한 최대구동력의 변화는 크지 않지만, 약 0.7부근에서 최소값을 가짐을 볼 수 있다.

4.2 수학적 모델링

최대구동력을 반경비와 각도비를 변수로 하는 함수로 기술이 가능하다면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$F_{\max} = f(\bar{r}, \bar{\theta}) \quad (19)$$

그림 4에서 반경비에 따른 최대구동력의 변화가 매 각도비에 대해 유사한 형태를 보이고, 그림 5에서 최대구동력이 각도비가 증가하면 반경비와 관계없이 동일한 경향으로 증가하는 형태를 보임을 알 수 있다. 따라서 최대구동력의 함수에서 반경비에 관한 함수와 각도비에 관한 함수를 따로 분리할 수 있다고 가정한다. 즉,

$$f(\bar{r}, \bar{\theta}) = g(\bar{r})h(\bar{\theta})$$

그림 8에서 반경비에 따른 최대구동력의 변화는 포물선의 형태를 취하므로 반경비에 관한 함수는 다음과 같이 2차 다항식으로 나타낼 수 있다고 가정한다.

$$g(\bar{r}) = a\bar{r}^2 + b\bar{r} + c \quad (20)$$

함수 $h(\bar{\theta})$ 는 각도비를 0.1에서 0.9까지 0.1씩 증가시켜 구한 최대구동력의 시뮬레이션 결과를 사용하여 9 절점 라그랑지 보간법으로 나타내었다.

$$h(\bar{\theta}) = \sum_{k=0}^8 \left[\frac{\prod_{i=0, i \neq k}^8 (\bar{\theta} - \bar{\theta}_i)}{\prod_{i=0, i \neq k}^8 (\bar{\theta}_k - \bar{\theta}_i)} F(\bar{\theta}_k) \right] \quad (21)$$

그림 6은 그림 3의 모든 절점에 대해 $f(\bar{r}, \bar{\theta})$ 의 값을 추정한 결과를 3차원 공간상에 나타낸 그림이다. 이때 $\bar{\theta} = 0.1$ 인 경우의 시뮬레이션 결과를 토대로 $g(\bar{r})$ 의 계수 a, b, c의 값을 정하고, $\bar{r} = 1$ 인 경우 $\bar{\theta} = 0.1$ 에서 0.9까지의 시뮬레이션 결과를 이용하여 얻은 $h(\bar{\theta})$ 를 $f(\bar{r}, \bar{\theta})$ 의 값의 추정에 사용하였다.

그림 7은 반경비가 0.5일 때 각도비에 따른 최대구동력의 실제 계산값과 추정값을 나타내며, 그림 8은 각도비가 0.1일 때 반경비에 따른 실제 계산값과 추정값을 나타낸다. 그림 7에서 각도비가 0.5보다 커지면 실제값과 추정값의 차이가 증가하는 것을 볼 수 있다. 그러나 각도비가 0.5를 넘어가면 필요한 구동력은 제곱에 비례하여 증가하기 때문에 실제 설계에서 각도비를 0.5 이상으로 선정하는 경우는 발생하지 않는다.

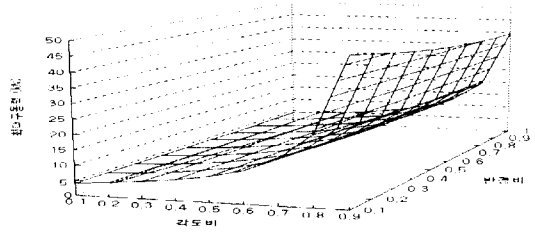


그림 3 최대구동력의 시뮬레이션 결과
Fig. 3 Simulated maximum actuating force

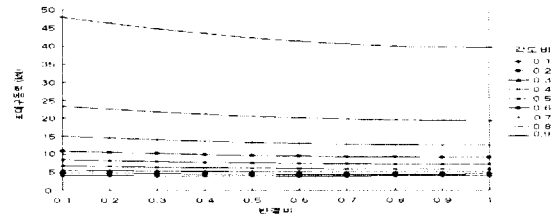


그림 4 반경비에 따른 최대구동력
Fig. 4 The maximum actuating force versus \bar{r}

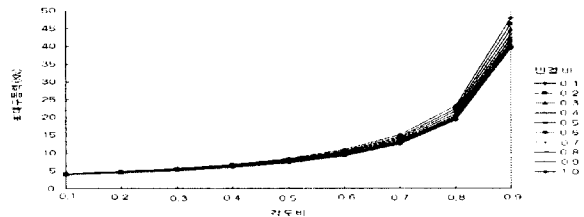


그림 5 각도비에 따른 최대구동력
Fig. 5 The maximum actuating force versus $\bar{\theta}$

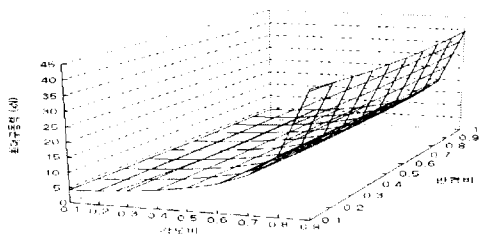


그림 6 $f(\bar{r}, \bar{\theta})$ 에 의한 추정 결과
Fig. 6 Predicted maximum force using $f(\bar{r}, \bar{\theta})$

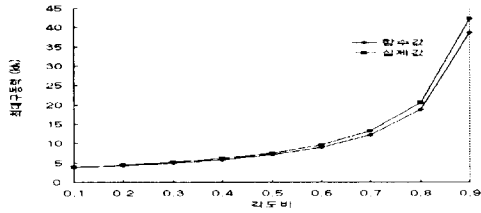


그림 7 $\bar{r}=0.5$ 일 때 최대구동력의 비교
Fig. 7 Comparison of maximum actuating force for $\bar{r}=0.5$

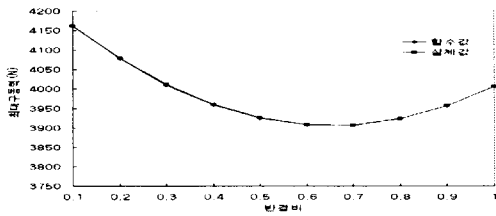


그림 8 $\bar{\theta}=0.1$ 일 때 최대구동력의 비교
Fig. 8 Comparison of maximum actuating force for $\bar{\theta}=0.1$

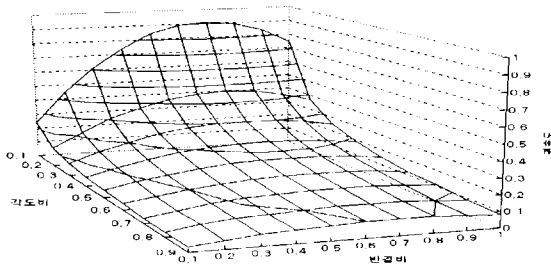


그림 9 반경비와 각도비에 따른 회속도
Fig. 9 The membership grade versus \bar{r} and $\bar{\theta}$

5. 퍼지 집합을 이용한 최적설계

5.1 반경비에 대한 귀속함수

그림 8에서 최대구동력은 반경비가 약 0.7에서 최소값을 가지는 포물선형 현상이다. 이를 기초로 반경비에 대한 귀속함수 μ_r 를 반경비가 0.7에서 최대귀속도 1을 가지는 2차 다항식으로 표시할 수 있다고 가정한다. 그리고 반경비가 0일 때에는 플랫폼의 설계가 불가능하므로 귀속도를 0으로 가정한다. 이상의 경계 조건으로 귀속함수 μ_r 의 계수를 결정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu_r = -2.04 \bar{r}^2 + 2.86 \bar{r}, \quad 0 \leq \mu_r \leq 1 \quad (22)$$

5.2 각도비에 대한 귀속함수

그림 7에서 $\bar{\theta}$ 값이 증가하면 최대구동력은 커지므로 각도비에 대한 귀속함수 μ_θ 는 0에 가까워지고, $\bar{\theta} = \bar{\theta}_{\min}$ 일 때 최대구동력은 가장 작으므로 귀속도는 1의 값을 가진다.

$$\mu_\theta = \frac{\bar{\theta}_{\min}}{\bar{\theta}}, \quad 0 \leq \mu_\theta \leq 1 \quad (23)$$

여기서 $\bar{\theta}_{\min}$ 은 볼조인트 사이의 간섭이 일어나지 않는 최소 각도비를 나타낸다.

5.3 퍼지 집합

“구동력을 최소화하는 반경비 각도비”를 제한조건으로 한 퍼지 집합[5, 6]을 MAF(minimum actuating force)로 정의하고 귀속함수를 \bar{r} 과 $\bar{\theta}$ 에 대한 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$MAF = \{ (\bar{r}, \bar{\theta}), \mu_{MAF}(\bar{r}, \bar{\theta}) \} \quad (24)$$

$$\mu_{MAF} = \mu_r \cdot \mu_\theta = (-2.04 \bar{r}^2 + 2.86 \bar{r}) \frac{\bar{\theta}_{\min}}{\bar{\theta}} \quad (25)$$

여기서 귀속함수 μ_{MAF} 는 $\mu_r \cdot \mu_\theta$ 으로 정의하였으며 $0 \leq \mu_{MAF} \leq 1$ 이다. μ_{MAF} 의 값이 1에 가까울수록 동역학적 최적설계에 접근하고 있다는 것을 의미한다. 그림 9는 식 (25)에 의한 귀속함수를 3차원 공간상에 나타낸 것이다.

6. 결론

본 연구에서는 6자유도 운동재현기로 사용되는 스투어트 플랫폼의 기구학 해석과 동역학 해석을 수행하여, 반경비와 각도비를 변수로 하는 최대구동력의 수학적인 모델과 동역학적 최적설계를 위한 퍼지 집합을 제안하였다. 스투어트 플랫폼이 0.6 g의 가속도로 병진운동할 때, 실린더의 구동력중 가장 큰 값을 최대구동력으로 정의하였고, 뉴턴 제2법칙으로 유도한 연립방정식의 수치해를 구하여 최대구동력을 결정하였다. 플랫폼 상판의 하판에 대한 반경비는 0.7 부근의 값, 그리고 각도비는 간섭이 일어나지 않는 범위에서 내에서 최소값을 선정하면 귀속도가 1에 근접함을 알 수 있다.

참고문헌

- [1] G. Stewart, "A Platform with Six Degrees of Freedom", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 180, Part 1, No. 5, pp. 371-386, 1965-1966
- [2] E. F. Fichter, "A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction", *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 2, Summer 1986.
- [3] John J. Craig, "Introduction to Robotics", Addison Wesley
- [4] W. Q. D. Do and D. C. H. Yang, "Inverse Dynamics of Platform Type of Manipulation Structure", *The American of Mechanical Engineers*, pp. 86-94, 1986
- [5] 엄정국, "퍼지이론 - 기초와 응용입문-", 전영사, 1991
- [6] 이광형, 오길록, "퍼지 이론 및 응용", 홍릉과학출판사, 1991
- [7] 이병주, 김희국, 허금강, "스튜어트 플랫폼 메카니즘의 기구학적/동역학적 최적설계", *제어·자동화·시스템 공학회지*, 제 2권 제 1호, 1996