Proceedings of the 12th
KACC, October 1997

정합조건을 만족하지 않는 불확정 비선형 시스템의 강인 안정화

Robust Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems without Matching Conditions

°주진만*, 최윤호**, 박진배*

*연세대학교 전기공학과(Tel: +82-2-361-2773; Fax: +82-2-392-4230; E-mail: jmjoo@control.yonsei.ac.kr)
**경기대학교 전자공학과(Tel: +82-331-40-7826; Fax: +82-331-255-8347; E-mail: yhchoi@kuic.kyonggi.ac.kr)

Abstracts This paper describes robust stabilization of nonlinear single-input uncertain systems without matching conditions. We consider nonlinear systems with a vector of unknown constant parameters perturbed about a known value. The approach utilizes the generalized controller canonical form to lump the unmatched uncertainties recursively into the matched ones. This can be achieved via nonlinear coordinate transformations which depend not only on the states of the nonlinear system but also on the control input. Then the dynamic robust control law is derived and the stability result is also presented.

Keywords Matching Conditions, Generalized Controller Canonical Form, Dynamic Control Law

1. 서론

비선형 시스템의 제어 이론의 하나로 미분 기하학(differential geometric)적인 접근 방법을 이용한 피드백 선형화 기법은 그동안 해결하지 못했던 여러가지 문제들을 해결하면서 많은 발전을 이루어 왔다. 그러나 시스템 모델의 파라미터 불확실성, 모델화되지 않은 시스템 동특성(unmodelled system dynamics) 등에 대한 제어 시스템의 강인성 문제가 주요 문제로 대두됨에 따라 시스템 모델의 정확한 지식이 요구되는 피드백 선형화 기법은 좌표 변환과 입력 변환에 의한 시스템의 선형성을 유지하기가 어려워 제어 시스템의 안정성을 보장하기가 어렵다. 따라서 이러한 단점들을 보완하기 위한 연구들이 활발하게 이루어지고 있다. 시스템 불확실성의 구조를 알고 있는 파라미터 불확실성에 대해서는 불확실성이 정합조건(matching condition)을 만족하는 경우 리아프노프 방법에 근거하여 연속 상태 피드백을 이용한 초기의 제어방법[3]과 피드백 선형화에 의해 시스템을 선형 시스템으로 좌표 변환한 후 리아프노프 방법에 근거한 강인 제어기를 설계하는 방법[5, 8, 11]이 있고 정합조건을 일반화하여 일반 정합조건(generalized matching condition)을 만족하는 경우에 대한 제어설계 방법[10]과 삼각 정합조건(triangular matching condition)을 만족하는 경우 비선형 시스템의 불확실성을 좌표 변환을 통해서 사용하기 쉬운 다른 좌표계의 비선형 시스템으로 변환하고 여기에 적응 제어기법을 도입한 방법[9] 등이 활발히 연구되고 있다. 또한 정합조건을 만족하지 않는 경우에 시스템의 불확실성을 정합조건을 만족하는 항(matched uncertainty)과 정합조건을 만족하지 않는 항(unmatched uncertainty)으로 분리하여 정합조건을 만족하지 않는 불확실성의 크기가 충분히 작다면 안정된 제어기를 설계할 수 있다는 방법[1, 2]이 있다. 그러나 이러한 방법은 제약조건이 많아서 실제로 적용하기가 매우 어렵다. 따라서 본 논문에서는 정합조건을 만족하지 않는 불확실성을 가진 시스템에 대하여 강인 안정화 제어기를 설계하고자 한다. 설계 과정은 주어진 비선형 상태 방정식에서 출력 함수를 정의 하여 정의된 출력함수에 의해서 시스템의 상대 차수(relative degree)가 시스템의 차수와 같을 경우는 최종적으로 정적(static) 제어기가 설계되고 상대 차수가 시스템 차수보다 작을 경우 동적(dynamic) 제어기가 설계된다. 본 논문에서는 동적 제어기를 설계하는 것을 목적으로 한다. 주어진 출력 함수로부터 새로운 좌표로의 변환을 위한 좌표 변환 함수가 결정되는데, 이때 각 좌표 변환 함수에서 나타난 불확실성을 보상하기 위한 가상(fictitious) 제어 입력이 함께 설계되고 이를 이용해 다시 다음의 새로운 좌표 변환 함수를 연속적으로 구하고 최종적으로 동적 강인 제어기를 설계할 수 있게 된다. 이러한 방법은 Fliess가 제안한 generalized controller canonical form[4]으로 시스템을 좌표 변환하는 방법을 확장 적용한 것이다. 각 좌표 변환 함수 결정 단계에서 설계되는 가상 제어 입력은 연속 함수이어야 하고, 불확실성을 보상할 수 있어야 하며, 연속적인 설계 과정을 만족할 수 있도록 충분한 차수의 연속 미분을 갖는 함수이어야 한다.

2. 문제설정

설명의 편의를 위해서 다음과 같은 2차의 단일 입력 불확정 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = f(x,\alpha) + g(x)u. \tag{1}$$

여기서 $f(x,\alpha)$와 $g(x)$는 다양체(manifold) $M \subset \mathbb{R}^2$에서 정의된 C^∞ 벡터 필드(vector field), u는 $u \in \mathbb{R}$인 제어입력이며 $f(0,\alpha) = 0$, $g(0) \neq 0$을 만족한다. 벡터 α는 $\alpha \in \mathbb{R}^p$를 만족하는 미지의 파라미터 벡터이며, 공칭 파라미터 벡터 α_n이 알려져 있다고 가정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha = \alpha_n + \delta\alpha. \tag{2}$$

식 (2)를 이용하여 식 (1)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x) + \Delta f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) + \Delta f_2(x) + g_2(x)u. \end{aligned} \tag{3}$$

또한 식 (3)에서 불확실성이 없는 공칭 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) + g_2(x)u. \end{aligned} \tag{4}$$

정의 1 (Matching Condition) 식 (3)의 불확실성은 다음과 같은 미지의 함수 $\delta(x)$가 존재하여 식 (5)가 성립할 때 정합조건을 만족한다고 한다[5, 8].

$$\Delta f(x) = \delta(x)g(x). \tag{5}$$

가정 1 식 (3)의 불확실성은 정합조건을 만족하지 않는다.

가정 2 (Controllability) 공칭 시스템 (4)는 controllable 하다. 즉 다음의 조건을 만족한다[7, 9].

$$\mathrm{rank}\{g, ad_f g\} = 2.$$

여기서 $ad_f g$는 $[f, g]$로 정의되는 Lie bracket이다.

가정 3 (Linear parametrization) 파라미터 벡터 α는 식 (1)에 다음과 같이 선형적으로 존재한다.

$$f(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \zeta_i(x)$$

여기서 $\zeta_i(x)$는 다양체 $M \subset \mathbb{R}^2$에서 정의되는 C^∞ 함수이다.

본 논문에서는 가정 1–3을 만족하는 시스템 (3)에 대하여 동적 강인 안정화 제어기를 설계하고자 한다.

3. 강인 안정화 제어기 설계

시스템의 불확실성이 정합조건을 만족할 경우 distribution $\{g\}$가 involutive하기 때문에 가정 2를 만족할 경우 시스템은 입력-상태 선형화(input-state linearization) 가능하고, [5] 또는 [11]의 결과를 이용하여 정적 제어기를 설계할 수 있다. 그러나 시스템이 입력-상태 선형화 가능하더라도 불확실성이 정합조건을 만족하지 않으면 변환된 새로운 좌표계에서 불확실성이 제어 입력의 range space에 속하지 않기 때문에 전체 제어 시스템의 안정도를 보장할 수 없다. 따라서 본 논문에서는 식 (3)의 상대 차수가 1이 되게 하는 출력함수를 정의하고 그것으로부터 정합조건을 만족하지 않는 불확실성을 보상하는 가상 제어입력을 포함한 좌표 변환(coordinate transformation)을 정의하고 변환된 새로운 좌표계에서 동적 제어기를 설계하는 방법을 제시한다.

3.1 Coordinate transform

식 (3)에 대해서 출력을 $y = x_1$으로 하면 시스템은 상대 차수 1을 갖고, [10]에 의해 정합조건이나 일반 정합조건을 모두 만족하지 않는다. 상대 차수가 시스템의 차수 보다 작을 경우에는 전체 시스템의 안정도는 zero dynamics의 안정도에 영향을 받는다. 따라서 다음의 가정이 필요하게 된다.

가정 4 식 (3)에서 x_1을 출력으로 하는 입-출력 시스템의 zero dynamics는 점근 안정(asymptotically stable)하다.

다음과 같이 새로운 상태변수 z_1을 정의하자.

$$z_1 = x_1 - x_1^d. \tag{6}$$

여기서 x_1^d는 x_1에 대한 원하는 출력이며 안정화 문제를 다루고 있으므로 $x_1^d = 0$으로 둔다. 식 (6)을 시간에 대해서 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 \\ &= f_1(x) + \Delta f_1(x) + g_1(x)u. \end{aligned} \tag{7}$$

식 (7)에서 불확실성 $\Delta f_1(x)$에 대한 bounding function을 다음과 같이 정의하자.

$$\rho_1(z_1) \geq \|\Delta f_1(x)\|. \tag{8}$$

그러면 식 (8)을 이용하여 식 (7)의 불확실성을 보상하는 가상 제어 입력을 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$v_1 = \mathrm{sgn}(z_1)\rho_1(z_1). \tag{9a}$$

여기서 $\mathrm{sgn}(\cdot)$은 signum 함수이다.

첨언 본 논문의 방법을 2차 이상의 시스템에 적용할 경우에, 앞서 언급한 바와 같이 가상 제어 입력 (9a)는 충분한 차수에 대해 연속 미분을 갖는 함수이어야 하므로 식 (9a)를 개선하여 다음과 같은 함수를 사용한다[6].

$$v_1 = \mathrm{sgn}(z_1)(1 - e^{-\sigma_1|z_1|})\rho_1(z_1). \tag{9b}$$

여기서 σ_1는 제어 성능에 영향을 미치는 설계 파라미터이다. ◁

두 번째 좌표 변환을 위한 상태 변수 z_2는 식 (7)의 불확실성을 식 (9b)의 제어 입력으로 대치하여 구할 수 있다.

$$z_2 \triangleq f_1(x) + g_1(x)u + v_1. \tag{10}$$

식 (10)을 다시 시간에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{z}_2 = \dot{f}_1(x) + \dot{g}_1(x)u + g_1(x)\dot{u} + \dot{v}_1. \tag{11}$$

식 (11)을 전개하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 =& \frac{\partial f_1}{\partial x_1}[f_1(x) + g_1(x)u + v_1] \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}[f_2(x) + \Delta f_2(x) + g_2(x)u] \\ &+ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}[f_1(x) + g_1(x)u + v_1]u \\ &+ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}[f_2(x) + \Delta f_2(x) + g_2(x)u]u \\ &+ \frac{\partial v_1}{\partial z_1}[f_1(x) + g_1(x)u + v_1] \\ &+ g_1(x)\dot{u}. \end{aligned} \tag{12}$$

식 (12)에서 불확실성을 포함하는 항만을 다음과 같이 정의하고

$$\eta = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Delta f_2(x) + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\Delta f_2(x)u$$

나머지 항들을 $F(x, u, \dot{u}, v_1)$로 정의하면 식 (7), (10), (12)에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= F(x, u, \dot{u}, v_1) + \eta. \end{aligned} \tag{13}$$

3.2 Dynamic robust stabilization

식 (13)에서 $F(x,u,\dot{u},v_1)$를 다음과 같이 두면 $\dot{u}$에 대한 상미분 방정식이 되며 동적 강인 제어 법칙을 구성하는 방정식이 된다[4].

$$F(x,u,\dot{u},v_1) = v. \tag{14}$$

여기서 v는 앞으로 설계되어야할 부가의 제어 입력이다. 식 (14)에 의해 식 (13)은 식 (15)로 나타낼 수 있다.

$$\dot{z} = Az + bv + b\eta. \tag{15}$$

여기서 (A,b)는 Brunovsky canonical form을 이루고 있다. 이제 식 (3)과 같은 시스템을 안정화하는 문제는 식 (15)와 같은 선형 시스템에 외란이 포함된 시스템을 안정화하는 문제로 귀착된다. 제어 입력 v를 공칭 선형 시스템을 안정화하기 위한 상태궤환 항과 외란의 영향을 보상하기 위한 제어 입력으로 나타내면 다음과 같다.

$$v = Kz + v_2. \tag{16}$$

가정 5 주어진 행렬 (A,b)에 대해 다음의 행렬이 안정한 1×2 벡터 K가 존재한다.

$$A_c = A + bK.$$

식 (16)에 의해 식 (15)의 시스템은

$$\dot{z} = A_c z + bv_2 + b\eta \tag{17}$$

와 같다. 불확실성 η에 대한 bounding function을 다음과 같이 정의 하자.

$$\rho_2(z_2) \geq \left\| \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Delta f_2(x) + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\Delta f_2(x)u \right\|. \tag{18}$$

다음 정리에 의해 식 (3)의 시스템은 점근 안정하다.

정리 1 식 (15)의 평형점 $z=0$는 제어입력 v_2가 다음을 만족하면 점근 안정(asymptotically stable)하다.

$$v_2 = \begin{cases} -\rho_2(z_2), & z^TPb \geq 0 \\ \rho_2(z_2), & z^TPb < 0 \end{cases} \tag{19}$$

여기서 P는 다음의 주어진 대칭 양한정(symmetric positive definite) 행렬 Q에 대한 리아프노프 방정식의 유일한 대칭 양한정 해이다.

$$PA_c + A_c^TP + Q = 0. \tag{20}$$

증명: 다음과 같은 리아프노프 함수를 고려하자.

$$V(z) = z^TPz. \tag{21}$$

식 (21)을 미분하고 식 (20)을 이용하면,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2z^TPA_c + 2z^TPbv_2 + 2z^TPb\eta \\ &= -z^TQz + 2z^TP(bv_2 + b\eta). \end{aligned} \tag{22}$$

식 (22)에서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\|b\eta\| = \|\eta\| \leq \rho_2. \tag{23}$$

따라서 다음 식이 성립하고,

$$-\rho_2 \leq \eta \leq \rho_2. \tag{24}$$

결과적으로 다음을 만족함을 알 수 있다.

$$\dot{V} \leq \begin{cases} -z^TQz + 2z^TPb(v_2+\rho_2), & z^TPb \geq 0 \\ -z^TQz + 2|z^TPb|(v_2-\rho_2), & z^TPb < 0 \end{cases} \tag{25}$$

그러므로 식 (19)의 제어 입력에 의해 식 (26)이 성립함을 알 수 있다.

$$\dot{V} \leq -z^TQz < 0. \tag{26}$$

즉 제어 입력 v_2와 식 (14), (16)에 의해 시스템 (3)은 점근 안정하다. ■

4. 예제

본 논문에서 제시한 제어 설계 방법의 효용성을 보이기 위하여 다음과 같은 불확정 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha_1 x_1^2 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{27}$$

여기서 α_1과 α_2는 미지의 파라미터이다. 시스템 (27)은 가정 1과 3을 만족하고

$$\text{rank}\{g, ad_fg\} = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2x_1\alpha_1 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

으로 부터 가정 2도 역시 만족함을 알 수 있다. 3절에서 설명되어진 것과 같이 x_1을 출력 함수로 선택하면 가정 4도 만족함을 알 수 있다. 첫 번째 좌표 변환 함수를 다음과 같이 정의 하자.

$$z_1 \triangleq x_1.$$

시간에 대해 z_1을 미분하면

$$\dot{z}_1 = -\alpha_1^n x_1^2 + 2x_2 + u - \delta\alpha_1 x_1^2 \tag{28}$$

가 되고 식 (28)의 불확실성에 대한 bounding function은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\rho_1(z_1) = \sup_{\alpha_1} |\delta\alpha_1|\,|x_1^2|. \tag{29}$$

식 (29)에서 $\sup_{\alpha_1}|\delta\alpha_1|$는 사전에 알려져 있지 않은 값이다. 강인 제어기 설계 시에 공칭 파라미터에 대해서 얼마만큼의 불확실성을 고려할 것인가를 나타내는 값이므로, 만약 50%의 불확실성을 고려한다고 할 경우 $\sup_{\alpha_1}|\delta\alpha_1| = 0.5\alpha_1^n$으로 나타낼 수 있다. 식 (9b)를 이용하여 식 (28)의 불확실성을 보상하면 두 번째 좌표 변환 함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$z_2 \triangleq -\alpha_1^n x_1^2 + 2x_2 + u + v_1. \tag{30}$$

식 (30)을 다시 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = &-2\alpha_1^n x_1(-\alpha_1^n x_1^2 + 2x_2 + u + v_1) \\ &+ 2(\alpha_2^n x_1 - x_2 + \delta\alpha_2 x_1) \\ &+ \dot{u} + \frac{\partial v_1}{\partial z_1}(-\alpha_1^n x_1^2 + 2x_2 + u + v_1). \end{aligned} \tag{31}$$

식 (31)의 불확실성에 대한 bounding function ρ_2는 다음과 같다.

$$\rho_2 = \sup_{\alpha_2} |\delta\alpha_2|\,|2x_1|.$$

이제 식 (14), (16), (19)를 이용하면 식 (27)의 시스템을 점근 안정하게 하는 동적 강인 제어기를 설계할 수 있다.

그림 1은 미지의 파라미터의 공칭값이 각각 $\alpha_1^n = 1$, $\alpha_2^n = 1$일 때 50%의 불확실성을 고려한 경우의 상태변수들의 궤적이며 그림 2는 이때의 동적 강인 제어기의 출력값이다. 그림에서와 같이 정합조건을 만족하지 않는 불확실성에 대해서 상대적으로 큰 파라미터의 변동에도 불구하고 상태 변수들의 안정화가 잘 이루어 짐을 확인할 수 있다.

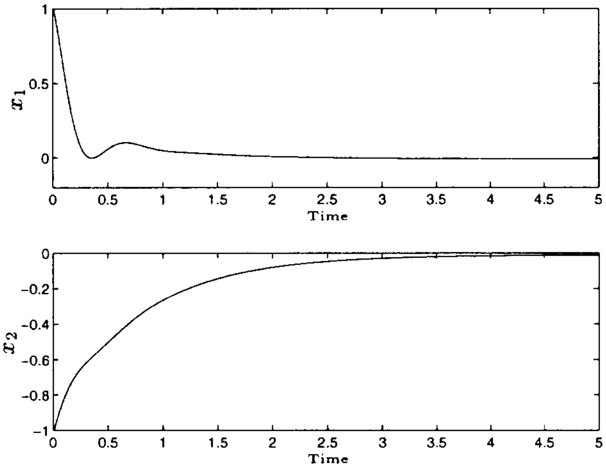

그림 1: 상태 변수의 궤적

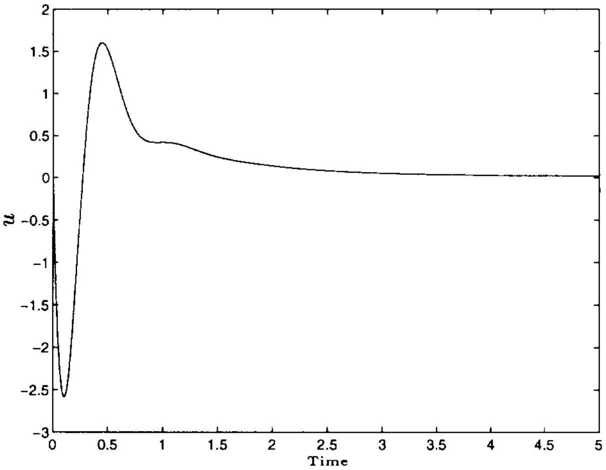

그림 2: 제어 입력

5. 결론

본 논문에서는 정합조건을 만족하지 않는 불확실성이 존재하는 비선형 시스템에 대하여 dynamic 강인 안정화 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 제시된 방법은 정의된 출력 함수로부터 연속적인 좌표 변환 함수를 결정하는데, 각 좌표 변환 함수에서 나타나는 불확실성을 보상하기 위한 가상 제어 입력이 함께 설계되고 이를 이용하여 다시 다음의 새로운 좌표 변환 함수를 결정하게 된다. 이러한 좌표 변환 함수를 이용하여 정합조건을 만족하지 않는 불확실성을 갖는 비선형 시스템을 새로운 좌표계에서는 정합조건을 만족하는 불확실성을 갖는 선형 시스템으로 변환하고 리아프노프 방법에 근거하여 강인 제어 입력을 설계하고 최종적으로 동적 강인 제어기를 설계하였다. 또한 본 논문에서 제시된 방법은 설계 과정에서 알 수 있듯이 고차의 시스템으로 확장 적용이 가능하다.

참고문헌

[1] B. R. Barmish and G. Leitmann, "On Ultimate Boundedness Control of Uncertain Systems in the Absence of Matching Assumptions," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-27, no. 1, pp. 153–158, 1982.

[2] Y. H. Chen and G. Leitmann, "Robustness of Uncertain Systems in the Absence of Matching Assumptions," *Int. J. Control*, vol. 45, no. 5, pp. 1527–1542, 1987.

[3] Martin J. Corless and G. Leitmann, "Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, no. 5, pp. 1139–1144, 1981.

[4] M. Fliess, "Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Nonlinear Dynamics," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, no. 9, pp. 994–1001, 1990.

[5] Y. Hashimoto, H. Wu and K. Mizukami, "Exponential Stabilization of SISO Nonlinear Systems with Uncertainties," *Proc. 35th CDC, Kobe, Japan*, pp. 1033–1038, 1996.

[6] R. A. Hull and Zhihua Qu, "Dynamic Robust Recursive Control Design and Its Application to a Nonlinear Missile Autopilot," *Proc. American Control Conference*, pp. 833–837, 1997.

[7] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd edition, Springer-Verlag, London, 1995.

[8] G. Leitmann, "Guaranteed Asymptotic Stability for Some Linear Systems With Bounded Uncertainties," *Trans. of the ASME*, vol. 101, pp. 212–216, 1979.

[9] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear Control Design*, Prentice-Hall, 1995.

[10] Zhihua Qu, "Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems Under Generalized Matching Conditions," *Automatica*, vol. 29, no. 4, pp. 985–998, 1993.

[11] D. A. Schoenwald and Ü. Özgüner, "Robust Stabilization of Nonlinear Systems with Parametric Uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, no. 8, pp. 1751–1755, 1994.