Proceedings of the 12th
KACC, October 1997

Matrix Pencil을 이용한 모델 저차화의 새로운 접근방법

A New Approach to Model Reduction Using Matrix Pencil Method

°권혁성*, 정정주**, 서병설*

*한양대학교 전자통신공학과(Tel :+82-2-290-0364; Fax :+82-2-281-9912; E-mail:drifty@apollo.hanyang.ac.kr)
**한양대학교 전자전기공학부(Tel :+82-2-290-1724; Fax :+82-2-298-1796; E-mail:cchung@email.hanyang.ac.kr)

Abstracts This paper proposes a new approach of balanced model reduction using matrix pencil. The algorithm presented in this paper is to convert full-rank high-order system into rank-deficient system using perturbation made by matrix pencil method. Then the system can be truncated to a low-order system that we want via balanced realization. We discuss the comparision with other methods and the various observations by simulations.

Keywords matrix pencil, model reduction, balanced realization, balanced model reduction

1. 서론

모델 저차화는 고차의 모델을 경제적 혹은 시스템 구현상의 문제로 유사 특성을 지니는 저차의 모델로 근사화시키는 방법으로 여러 각도에서 연구되어 왔다. 일반적으로 모델 저차화의 개념은 본래의 모델과 저차화 모델의 차의 크기가 정해진 한계치 이내에서 설계되도록 하는 것이다. 많이 사용되는 방법으로는 "balanced model reduction"과 "optimal Hankel norm approximation" 등이 있다[1][2].

Balanced model reduction은 시스템행렬, 입력행렬, 출력행렬 등에 관련된 Lyapunov 방정식의 해를 이용하여 balanced realization 시킨 후에 시스템의 출력에 영향을 주는 크기에 따라 재배열한 후 truncation을 행하는 방법으로 Moore[3]에 의해 처음 제안되었다. 이어서 Pernebo와 Silverman[4]이 안정도 측정에 대한 연구를 했으며, Enns[5]는 모델링 오차에 대한 접근으로 주파수 가중치를 도입했다. 또한 Fernando와 Nicholson[6], 그리고 Liu와 Anderson[7]은 singular perturbation approximation에 적용했다.

Optimal Hankel norm approximation은 anticausal 시스템과 all-pass dilation을 사용하여 McMillan 차수에 따라 저차화시키는 방법으로 Glover[8]에 의해 많은 발전을 가져왔다. 현재에는 기존 방법에 대한 개선 외에도 불확실성을 고려하여 LMI(linear matrix inequality)를 사용하는 등의 다양한 접근이 이루어지고 있다[9].

본 논문에서 사용되는 matrix pencil 방법은 Beke와 Boley[10]에 의해 처음 시도된 방법으로 perturbation에 의해 제어불능 혹은 관측불능한 모드가 발생했을 때의 모델을 가정하여 저차화시키는 방법이다. 본 논문은 matrix pencil 방법에 의해 발생된 perturbation을 balanced model reduction에 적용하는 새로운 접근방법에 대한 연구로 기존방법에 대해 위상과 조건계수(condition number)에 관한 비교가 수행되었다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 Beke와 Boley가 제안한 기존의 matrix pencil 방법에 대한 모델 저차화 방법이고, 3장에서는 본 논문에서 제안된 matrix pencil에 의한 perturbation을 적용한 balanced model reduction 방법에 대한 연구이다. 4장은 그에 따른 모의실험을 통한 다른 방법과의 비교를 다루고 있으며, 5장에서는 결론과 앞으로의 연구방향을 제시한다.

2. Matrix Pencil 방법

본 장은 [10]에서 제안되었던 기존의 matrix pencil을 모델 저차화에 사용하는 방법으로 deficient pencil의 설정과 그에 따른 perturbation의 정의, 모델 저차화에의 적용, 그리고 안정성 판정을 다룬다.

2.1. Deficient Pencil

행렬 A, B에 대해 $(A-\lambda B)$ 같은 matrix pencil의 형태를 고려하자. 임의의 λ에 대해 $(A-\lambda B)$가 rank를 잃어버리지 않으면 nondeficient pencil, 잃어버리면 deficient pencil이다. 만일 perturbation E에 의해 nondeficient pencil $(A-\lambda B)$의 rank가 감소한다면 $(A+E-\lambda B)$는 deficient pencil이 된다.

matrix pencil을 사용하여 $n\times n$ 일반화 고유값 문제를 식 (2.1.1)로 정의할 수 있다.

$$[A, C]\nu = \lambda [B, D]\nu \qquad (2.1.1)$$

이 때의 $n\times(n-p)$ 행렬 C, D는 A, B의 열에 대해 직교 공간의 직교기저(orthonormal basis)로 구성된다. 식 (2.1.1)을 통해 구해지는 고유값와 고유벡터를 λ_i, $\nu_i=[x_i^T, y_i^T]$라 할 때 matrix pencil $(A-\lambda B)$를 deficient pencil로 만드는 perturbation E_i는 식 (2.1.2)로 구할 수 있다.

$$E_i := (\lambda_i B-A)\frac{x_i x_i^T}{||x_i||^2} = (C-\lambda_i D)\frac{y_i x_i^T}{||x_i||^2} \qquad (2.1.2)$$

2.2. 모델 저차화에의 적용

안정한 최소차수(minimal) 시스템 (F, G, H)에 대한 matrix pencil $(A-\lambda B)$에 대해 PBH 테스트를 사용할 수 있도록 $A=[F, G]^T$, $B=[I_p, 0]^T$ 혹은 $A=[F^T, H^T]^T$, $B=[I_p, 0]^T$로 정한다[11,12]. 이때 행렬 A를 구성하는 요소에 입력행렬 G를 사용할 것인가 아니면 출력행렬 H를 사용할 것인가의 문제는 Gramian으로 결정한다. 제어가능(Controllability) Gramian과 관측가능(Observability) Gramian의 trace를 비교하여 제어가능 Gramian이 더 작은 값을 가지면 입력행렬을 사용하고, 관측가능 Gramian이 더 작으면 출력행렬을 사용하여 A, B를 구성한다.

저차화를 위해 먼저 각 모드에 대한 perturbation의 크기를 구한다. 그 크기가 작은 순서대로 truncated 모드를 정해 저차화 모델의 차수를 정한다. perturbation 행렬을 구하기 위해 truncated 모드의 수 N에 대해 다음의 행렬을 구성한다.

$$T := diag\{T_1, T_2, \cdots, T_N\},\quad T_i := \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}$$
$$W := [Re(x_1), Im(x_1), \cdots, Re(x_N), Im(x_N)] \qquad (2.2.1)$$
$$U := [Re(y_1), Im(y_1), \cdots, Re(y_N), Im(y_N)]$$

식 (2.2.1)을 사용하여 residual을 $R := [0, (UT)^T]^T - CU$와 같이 정의하여 matrix pencil에 가해질 perturbation 행렬

$E_N := -R(W^TW)^{-1}W^T$를 구성한다. $(A+E_N-\lambda B)$는 deficient pencil이 되고 N개의 제어불능한 혹은 관측불능한 모드를 발생시킨다. 만일 제어불능한 모드를 발생시킨 경우라면 $E_N=[E_{N1}, E_{N2}]^T$에 대해 식 (2.2.2)를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} F^T+E_1^T \\ G^T+E_2^T \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} WT \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

이때 발생된 제어불능한 모드를 제거시키기 위해 상태함수식을 계산이 용이한 형태로 바꾼다. 이때 $QW=[S^T,0]^T$ (S는 정방 상부삼각행렬(square upper triangular matrix))를 만족하는 직교행렬 Q를 선택하여 perturbed 시스템을 식 (2.2.3)과 같이 변환시킨다. 직교행렬 Q는 다중 Householder 변환을 사용하여 구할 수 있다[13].

$$\begin{aligned} &\dot{z}=Q(F+E_1)Q^Tz+Q(G+E_2)u\ ;\quad y=HQ^Tz \\ &\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & 0 \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{G}_2 \end{bmatrix} u \\ &y=\begin{bmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

식 (2.2.3)에 의해 상태변수 z_1에 해당하는 모드는 모두 제어불능한 상태가 되어 식 (2.2.4)의 등가인 상태함수식으로 정해질 수 있다.

$$\dot{z}_2 = \hat{F}_{22}z_2 + \hat{G}_2u\ ;\quad y = \hat{H}_2z_2 \tag{2.2.4}$$

2.3. 안정도 판정

Matrix pencil을 이용한 저차화 방법의 안정도 판정은 공칭모델의 극점의 위치와 perturbed 모델의 극점의 위치 차이로 판단할 수 있다. Bauer-Fike 정리[13]에 따라 식 (2.1.1)에서 정의된 고유벡터 v로 구성되는 행렬 $V:=[v_1,\cdots,v_N]$의 조건계수 K ($K=\|V\|\|V^{-1}\|$)와 공칭모델의 극점 λ, 그리고 pertrubed 모델의 극점 μ에 대해 perturbation의 크기 $\|E\|$는 식 (2.2.5)와 같은 관계식을 갖는다.

$$|\mu-\lambda| \le K\|E\| \tag{2.2.5}$$

공칭모델이 안정하다고 가정하면 perturbed 모델이 안정하기 위해서 $|\mu-\lambda|$의 크기가 허수축에 제일 가까운 공칭모델의 극점과 허수축과의 거리 d보다 작아야 한다. 따라서 안정도 판정식은 식 (2.2.6)과 같다.

$$K\|E\| < d \tag{2.2.6}$$

3. 새로운 접근 방법

이 장에서는 2장에서 제안되었던 방법에서 matrix pencil을 이용하여 perturbation을 만든 후, truncation을 위해 사용되는 Householder 변환을 사용하지 않고 balanced realization을 사용하여 모델 저차화를 수행하는 새로운 접근방법을 제안한다.

3.1. Perturbation을 이용한 balanced model reduction

보조정리 1 : perturbation에 의해 제어불능한 상태가 발생한 안정한 시스템 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$에 대해 balanced realization을 수행하는 변환행렬이 존재하고 그에 따른 저차화 모델을 구할 수 있다.

증명 : perturbation에 의해 제어불능한 상태가 발생한 시스템 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$에 대한 Lyapunov 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{A}P+P\hat{A}^*+\hat{B}\hat{B}^*=0 \\ \hat{A}^*Q+Q\hat{A}+\hat{C}^*\hat{C}=0 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

방정식의 해인 positive semi-definite 행렬 P와 positive definite 행렬 Q에 대해 다음을 만족하는 T_1을 구할 수 있다.

$$T_1PT_1^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

$$(T_1^*)^{-1}QT_1^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{3.1.3}$$

식 (3.1.3)에서의 Q_{11}에 대해 LDL^T 분해에 따라 다음을 만족하는 unitary 행렬 U_1이 존재한다.

$$U_1Q_{11}U_1^* = \Sigma_1^2 \quad where\ \ \Sigma_1>0 \tag{3.1.4}$$

이 때 T_2를 다음과 같이 정의한다.

$$(T_2^*)^{-1} = \begin{bmatrix} U_1 & \\ & I \end{bmatrix} \tag{3.1.5}$$

T_2를 식 (3.1.3)에 적용하면,

$$R=(T_2^*)^{-1}(T_1^*)^{-1}Q\,T_1^{-1}T_2^{-1}=\begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}^*{}_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{3.1.6}$$

를 얻을 수 있고, T_3를 다음과 같이 정의함에 따라

$$(T_3^*)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{Q}^*{}_{12} & I \end{bmatrix} \tag{3.1.7}$$

식 (3.1.6)는 식 (3.1.8)로 변환된다.

$$\begin{aligned} &(T_3^*)^{-1}RT_3^{-1} \\ &=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{Q}^*{}_{12}\Sigma_1^{-2} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}^*{}_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\hat{Q}_{12}\Sigma_1^{-2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & 0 \\ 0 & Q_{22}-\hat{Q}^*{}_{12}\hat{Q}_{12}\Sigma_1^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \hat{Q}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

식 (3.1.8)에 대해 unitary 행렬 U_2가

$$U_2\hat{Q}_{22}U_2^* = \Sigma_2 \tag{3.1.9}$$

와 같이 존재하므로, T_4를 다음과 같이 정하면,

$$T_4 = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} & \\ & U_2 \end{bmatrix} \tag{3.1.10}$$

최종적인 변환행렬은 다음과 같다.

$$T = T_4T_3T_2T_1 \tag{3.1.11}$$

식 (3.1.11)의 변환행렬에 따라 balanced realization을 수행하면

$$TPT^*=\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & 0 \end{bmatrix},\quad (T^*)^{-1}QT^{-1}=\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \tag{3.1.12}$$

이고, 그에 따른 시스템은 식 (3.1.13)으로 나타난다.

$$T\hat{A}T^{-1}=\begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & 0 \\ 0 & \overline{A}_{22} \end{bmatrix},\ T\hat{B}=\begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \hat{C}T^{-1}=[\ \overline{C}_1\ \ 0] \tag{3.1.13}$$

최종적인 상태함수식은 $(\overline{A}_{11}, \overline{B}_1, \overline{C}_1)$이다. ■

정리 2 : 제어불능한 상태변수가 발생한 안정한 perturbed 시스템에 대해 Householder 변환을 통한 저차화 모델의 전달함수와 balanced realization을 통한 저차화 모델의 전달함수는 일치한다.

증명 : Householder 변환을 통해 변화된 시스템을 다음과 같이 나타내면 식 (3.1.14)와 같다[10].

$$QAQ^T=\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix},\ QB=\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix},\ CQ^T=[\ \hat{C}_1\ \ \hat{C}_2] \tag{3.1.14}$$

Householder 변환은 유사변환(similarity transformation)이기 때문에, 본래의 모델에 대해 변환행렬 Q에 따르는 전달함수의 변화는 없으며, 제어불능한 상태변수가 존재함에 따라 저차화 후의 전

달함수는 다음과 같다.

$$G = CQ^T(sI - QAQ^T)^{-1}QB$$
$$= [\ \hat{C}_1\ \ \hat{C}_2]\left[sI - \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$
$$= \hat{C}_2(sI - \hat{A}_{22})^{-1}\hat{B}_2$$

Balanced realization을 적용한 경우에도 변환행렬 T가 유사변환이므로 변환 후의 전달함수 변화는 없다. 저차화 후의 전달함수는 다음과 같이 변화한다.

$$G = CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB$$
$$= [\ \bar{C}_1\ \ 0]\begin{bmatrix} sI - \bar{A}_{11} & 0 \\ 0 & sI - \bar{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.16)$$
$$= \bar{C}_1(sI - \bar{A}_{11})^{-1}\bar{B}_1$$

유사변환의 성질에 따라 두 방법의 변환행렬에 의한 전달함수와 본래의 전달함수와 같고 식 (3.1.15)과 식 (3.1.16)에 따라 저차화 모델의 전달함수 또한 같기 때문에 두 방법에 의한 저차화 모델의 전달함수는 일치한다. ■

따름정리 3 : perturbation에 의해 관측불능한 상태변수가 발생한 시스템은 (보조정리 1)의 상대(dual)관계식으로 구할 수 있다.

3.2. 모델링 오차

입력에만 perturbation이 주어져서 제어불능한 상태가 발생했을 때의 시스템에 대해 식 (3.1.11)에서 구한 변환행렬 T를 공칭모델에 적용하면 식 (3.2.1)을 얻을 수 있다.

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix},\ TB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix},\ CT^{-1} = [\ \bar{C}_1\ \ 0] \quad (3.2.1)$$

식 (3.1.12)와 (3.2.1)의 전달함수식을 구해 모델링오차를 구하면

$$|G - G_r| = |\ \bar{C}_1(sI - \bar{A}_{11})^{-1}(\ \bar{B}_1 - \hat{B}_1)| \quad (3.2.2)$$

와 같고, 변환행렬 T와 perturbation을 다음과 같이 정의하면

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

식 (3.2.2)의 모델링 오차는 다음과 같이 변화한다.

$$|G - G_r| = |\ \bar{C}_1(sI - \bar{A}_{11})^{-1}(T_{11}E_1 + T_{12}E_2)| \quad (3.2.4)$$

$T_{11}E_1 + T_{12}E_2$ 를 E_T로 하여 모델링 오차의 2-놈(norm) 형태로 나타내면[10], 최종적인 모델링 오차는 다음과 같다.

$$\|G - G_r\|_2^2 = trace(E_T^T \Sigma_1 E_T) \quad (3.2.5)$$

Σ_1은 식 (3.1.11)에서 정의된 바와 같다.

3.3. 설계 절차

[절차 1] 시스템에 대한 matrix pencil을 구성한 후 각 모드에 대한 perturbation을 구한다.

[절차 2] perturbation의 크기에 따라 저차화 모델의 차수를 정한다.

[절차 3] 정해진 차수에 따라 perturbation 행렬을 구성하여 공칭모델에 가한다.

[절차 4] perturbation 행렬에 따른 극점의 변화에 따라 안정성을 판별한다.

[절차 5] perturbed 모델에 대해 balanced realization을 수행한 후 정해진 차수에 맞게 truncation한다.

4. 모의실험

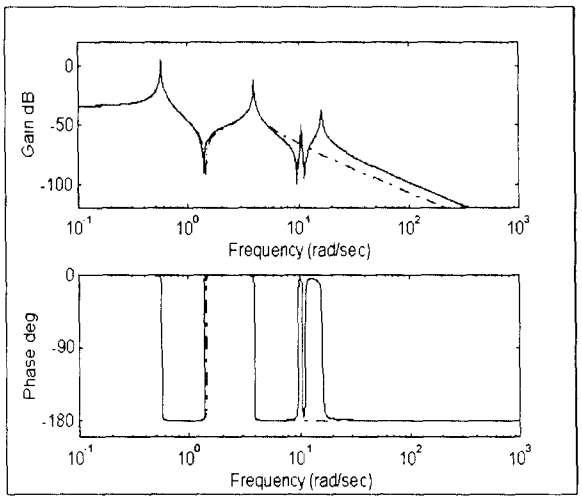
다음과 같은 flexible 구조를 가지는 8차모델을 고려해보자[2].

$$g = \sum_{i=1}^{4} k_i \frac{\omega_i^2}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2} \quad (4.1.1)$$

(표 1) 공칭모델에 대한 계수 설정

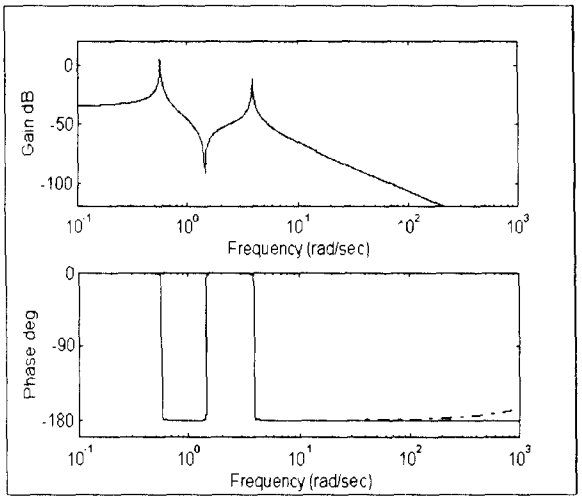
i	ω_i	ζ_i	k_i
1	0.56806689746895	0.00096819582773	0.01651378989774
2	3.94093897440699	0.00100229920475	0.00257034576009
3	10.58229653714164	0.00100167293203	0.00002188016252
4	16.19234386986640	0.01000472824082	0.00027927762861

식 (4.1.1)의 공칭모델을 본 논문의 방법을 사용해 4차의 모델로 저차화시킨 후에 원래의 공칭모델에 대해 Bode선도로 비교하면 (그림 1)과 같다.



(그림 1) 공칭모델(실선)과 본 논문의 방법에 의한 저차화모델(일점쇄선)

일반적인 balanced model reduction에 대해서도 같은 4차의 저차화모델을 구하고 본 논문의 방법을 통한 저차화모델과 비교한 결과는 (그림 2)와 같다.



(그림 2) balanced model reduction에 의한 저차화모델(일점쇄선)과 본 논문의 방법에 대한 저차화 모델(실선).

(그림 2)에서 알 수 있듯이 본 논문의 방법을 사용하여 모델저차화를 수행했을 경우 일반적인 balanced model reduction과 전달함수의 크기와 위상에서 비슷한 결과를 얻었다. 차이점은 고주파수 부분에서의 위상이 본 논문의 방법을 사용했을 경우에 좀

더 공칭모델에 가깝게 나타났다.

[10]에서 제안되었던 matrix pencil 방법과의 비교에서는 (정리 2)에서도 보였듯이 전달함수의 경우 본 논문의 방법과 일치함을 알 수 있다. 반면에 시스템행렬의 조건계수에서 차이를 나타내는데 그 결과는 (표 2)와 같다.

(표 2) 각 방법에 대한 저차화 모델의 조건계수

저차화 방법	조건계수
matrix pencil 방법	3.940941
balanced model reduction	1.000590
본 논문의 방법	1.000571

(표 2)의 결과에 따라 조건계수가 기존의 matrix pencil 방법에서 나온 수치에 비해 본 논문의 방법의 수치가 더 작음을 알 수 있고, 기존의 balanced model reduction과의 비교에서는 거의 일치함을 알 수 있다.

본 예제의 결과를 통해서 본 논문의 방법이 balanced model reduction에 대해서는 고주파측의 위상에서, matrix pencil 방법에 대해서는 조건계수에 대해 이점을 가지고 있음을 알 수 있다.

관찰 및 토의

1. matrix pencil을 사용하는 방법은 적용모델의 시스템 행렬의 구조에 따라 특성을 달리한다. 시스템 행렬의 구조에 따라 perturbation의 구조 또한 달라지기 때문에 본 논문의 방법의 적용에 대해 시스템 행렬을 어떻게 구성하느냐가 매우 중요하다. 예를 들어 4장의 모의실험에서, controllable canonical form으로 시스템을 구성했을 때에는 matrix pencil을 사용한 방법을 적용할 수 없지만, parallel form으로 구성했을 때에는 적용이 가능하다. 그 예로 전달함수식을 상태함수식으로 변환시킬 때 MATLAB의 "tf2ss.m"을 사용하게 되면 시스템행렬에 대해 ill-conditioned 고유벡터 행렬을 구성한다. "tf2ss.m"에 의해 변환된 상태함수식은 controllable 혹은 observable canonical 형태로 나타나서 perturbation에 매우 민감해지므로 고차의 시스템에 이용하는 것은 수치적인 문제를 발생시킬 수 있다[14]. 본 논문의 모의실험에서는 "parallel.m"을 사용하여 이 문제를 해결했다.

2. 본 논문의 모의실험의 경우, 주어진 데이터에 대해 "tf2ss.m"으로 구성한 시스템 행렬의 경우 조건계수의 값이 1.1860×10^{5}로 매우 크게 나온 반면, "parallel.m"에 의해 구성된 시스템행렬의 조건계수는 16.1932로 작게 나왔다. 조건계수가 작은 시스템의 경우 식 (2.2.6)에 의해 perturbation에 좀더 강인하게 되는 장점이 있다.

3. 식 (2.2.6)에 따라 안정도를 유지하는 범위에서 조건계수가 상당히 큰 경우에는 상대적으로 매우 작은 perturbation만이 허용되기 때문에 문제가 발생한다고 추정된다. 그러므로 조건계수가 큰 ill-conditioned 시스템에서 본 논문의 방법을 적용하기 위해 먼저 조건계수가 작은 well-conditioned 시스템으로 변환하는 것이 필요하다.

4. 일반적인 balanced model reduction에서는 상태함수식이 공칭모델의 시스템행렬의 구조에 관계 없이 일정하므로 공칭모델의 조건계수에 영향을 받지 않는다. 따라서 matrix pencil을 이용하여 perturbation을 구한 후 [10]에서 제안되었던 Householder 변환을 사용하는 것보다 본 논문에서 제안된 balanced realization을 사용하는 경우가 (표 2)에서 알 수 있듯이 더 well-conditioned하다.

5. [10]에 따르면 matrix pencil을 이용하는 방법이 일반적인 balanced model reduction보다 좀더 위상이 잘 맞는다는 결과가 나와있다. 수식적인 유도과정에 의해 증명된 것은 아니고 실험적인 결과에 의한 결과이다. 두 방법에 의한 전달함수의 위상차이는 영점(transmission zero)에 의한 이유가 크다. 저차화시 극점의 위치이동보다 영점의 위치이동이 크기 때문이다.

6. [10]의 예제 1을 사용하여 8차의 JPL 모델을 6차의 모델로 저차화시킬 때 matrix pencil을 사용한 방법의 경우에는 최소위상 플랜트로 나왔으나, 일반적인 balanced model reduction의 경우에는 비최소위상 플랜트가 나왔다. 이 문제 역시 저차화방법에 따른 영점의 위치변화에 의한 차이라 할 수 있다.

5. 결론 및 앞으로의 연구방향

본 논문에서는 matrix pencil 방법을 사용하여 작은 perturbation에 대해서 시스템이 제어불능 혹은 관측불능하게 될 때, 상태변수에 대한 perturbation을 인위적으로 조정한 후 시스템의 차수를 낮추어 balanced realization을 이용하는 저차화 방법을 제안했다. 그에 따른 해석으로 기존의 matrix pencil 방법과의 비교와 함께, 시스템의 조건계수에 따른 본 방법의 적용방향을 논하였다.

모의실험에서는 8차의 flexible 시스템을 적용한 비교실험을 통하여 본 논문의 방법이 balanced model reduction에 대해서는 고주파측에서의 위상에서, matrix pencil 방법에 대해서는 조건계수에 대해 이점을 가지고 있음을 보였다.

신달함수의 위상특성과 영점의 위치변화, 그리고 조건계수에 따른 적용 시스템의 범위지정은 앞으로의 연구과제로 남아 있다.

참고 문헌

[1] Kemin Zhou, John Doyle and Keith Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996

[2] M. Green and D.J.N. Limbeer, *Linear Robust Control*, Prentice Hall, 1995

[3] B.C. Moore, "Principle Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction," *IEEE AC-26*, No.1, pp.17-32, 1981

[4] L. Pernebo and L.M. Silverman, "Model Reduction via Balanced State Space Representations," *IEEE AC-27*, No.2, pp.382-387, 1982

[5] Dale Enns, "Model Reduction for Control System Design," Ph.D. dissertation, Dept. Aeronaut. & Astronaut., Stanford Univ., 1984

[6] K.V. Fernando and H. Nicholson, "Singular Perturbational Model Reduction of Balanced Systems," *IEEE AC-27*, No.2, pp.466-468, 1982

[7] Y. Liu and B.D.O. Andeson, "Singular Perturbation Approximation of Balanced Systems," *Int. J. Control*, Vol.50, No.4, pp.1379-1405, 1989

[8] Keith Glover, "All Optimal Hankel Norm Approximations of Linear Multivariable Systems and their L_∞-Error Bounds," *Int. J. Control*, Vol.39, No.6, pp.1115-1193, 1984

[9] C.L. Beck, J. Doyle, and K. Glover, "Model Reduction of Multidimensional uncertain Systems," *IEEE AC-41*, No.10, pp.1466-1477, 1996

[10] H.W. Beke and D. Boley, "Model Reduction Via Matrix Pencil Approach," Technical Report #TR 93-45, Dept. of Computer Science, University of Minnesota, Minneapolis, June 1993

[11] D. Boley, "Estimating the Sensitivity of the Algebraic Structure of Pencils with Simple Eigenvalue Estimates," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol.11, No.4, pp.632-643, 1990

[12] Thomas Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, 1980

[13] G.H. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, Jones Hpkins University Press, 1989

[14] A. Grace, A.J. Laub, J.N. Little, and C.M. Thompson, *Control System Toolbox*, The MathWorks Inc., 1992