

조정가능한 파라미터를 가지는 H^∞ 출력제한 제어를 이용한 자승적 안정화

Quadratic Stabilization by H^∞ Output Feedback Controllers with Adjustable Parameters

°강성규, 이갑래, 김종해, 박홍배

경북대학교 전자전기공학부

(Tel : +82-53-950-5548; Fax : +82-53-950-5505; E-mail : naru@palgong.kyungpook.ac.kr)

Abstracts In this paper, we deal with a quadratic stabilization by H^∞ output feedback controllers with adjustable parameters. The designed controller contains a contractive time-varying gain which can be used to adjust the responses of the resulting closed-loop system. The free parameter expressed as time-varying gain is chosen so that a Lyapunov function of the closed-loop system descends as fast as possible. A numerical example is given to show the validity of proposed method.

Keywords Quadratic stabilization, output feedback, adjustable parameter, time-varying gain, Lyapunov function

1. 서론

최근 H^∞ 제어기 설계에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 1989년 Doyle 등[2]은 H^∞ 제어기 설계기법에 대해 해석적 해를 제시함으로써 이를 응용한 많은 논문이 발표되고 있다. Kimura 등[5]에 의해서 구해진 제어기는 파라미터를 가지고 있으며, 많은 논문[1,4,6]에서 이러한 파라미터를 0으로 두고 중심제어를 이용하여 페루프 시스템을 안정하도록 한다. 그러나 이러한 파라미터를 이용하여 좀 더 나은 성능을 가지도록 하는 것이 가능하다[7]. 일반적으로 제어기는 상태제한 제어기와 출력제한 제어기로 구분할 수 있는데 상태제한 제어기는 모든 상태가 측정 가능하다는 가정 하에서 이루어진다. 그러나 이러한 가정을 만족시키기 위해서는 많은 비용과 복잡성을 유발시키므로 실제 시스템에 적용하기에는 적당하지 않다. 이에 따라 출력제한 제어기의 확장이 필요하다. 자승적 안정화 문제는 페루프 시스템이 모든 가능한 불확실성에 대해 안정성을 보장하는 제어기와 리아푸노프 함수를 찾는 것이다. 노음 한계치를 가지는 선형 불확실성 시스템에 대한 자승적 안정화는 Petersen[6]과 Khargonekar 등[4]에 의해 제안되었다. 그러나 출력제한 제어기에서의 파라미터를 이용한 성능향상에 대한 연구는 없다.

본 논문에서는 조정가능한 파라미터를 가지는 H^∞ 출력제한 제어기를 통한 자승적 안정화를 다룬다. 제안한 제어기는 최종적인 페루프 시스템의 응답을 조정하는데 사용되는 수축성(contractive)의 시변 이득을 가지고 있으며 이러한 시변 이득으로 표현된 파라미터는 페루프 시스템의 리아푸노프 함수를 가장 빠르게 감소시키도록 선택한다. 또한 예제를 통하여 조정가능한 파라미터를 가지는 출력제한 제어기의 타당성을 검증한다.

2. 예비지식

이 장에서는 본 논문에 필요한 정의, 자승적 안정화, 선형분수변환 및 체인분산표현(chain scattering description)에 대해 알아본다.

2.1 자승적 안정화

파라미터 불확실성 ΔA 를 가지는 선형 불확실성 시스템

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A]x(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

이 리아푸노프 함수 $V(x) = x^T P x$ 의 미분치가

$$L(x, t) = \dot{V} = 2x^T P [A + \Delta A]x \leq -\alpha \|x\|^2 \quad (2.2)$$

을 만족하는 양한정 행렬 P 와 양수 α 가 존재한다면 자승적으로 안정하다.

2.2 선형분수변환

선형분수변환은 표준블럭선도의 전달함수를 나타내고 $F(\cdot, \cdot)$ 로 표현되며 제어시스템에서 다양한 궤환구조를 표준화하는 수단으로서 크게 위 선형분수변환과 아래 선형분수변환으로 나눌 수 있다.

위 선형분수변환은 그림 1과 같으며 여기서 w 는 명령신호, 교란, 센서잡음신호 등의 외부입력이며, z 는 제어될 출력이다. w 로부터 z 로의 전달함수 $F_w(P, \Delta)$ 는

$$F_w \left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \Delta \right) \triangleq P_{22} + P_{21} \Delta (I - P_{11} \Delta)^{-1} P_{12} \quad (2.3)$$

이고, 여기서 $\det(I - P_{11} \Delta) \neq 0$ 이다.

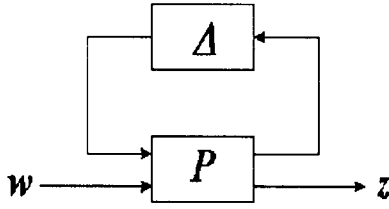


그림 1. 위 선형분수변환
Fig. 1. Upper LFT.

아래 선형분수변환은 그림 2와 같으며 u 는 제어신호, y 는 관측된 출력이다. w 로부터 z 로의 전달함수 $F_l(P, K)$ 는

$$F_l\left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, K\right) \triangleq P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (2.4)$$

이고, 여기서 $\det(I - P_{22}K) \neq 0$ 이다.

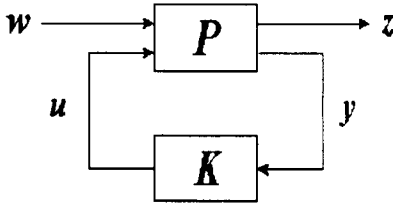


그림 2. 아래 선형분수변환
Fig. 2. Lower LFT.

2.3 체인분산표현

제어시스템에서 계환구조를 표준화하는 선형분수변환의 다른 표현으로서 체인분산표현이 있으며

$$HM(U, K) = [U_{11}K + U_{12}][U_{21}K + U_{22}]^{-1} \quad (2.5)$$

으로 나타나고, 여기서

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{12} - P_{11}P_{21}^{-1}P_{22} & P_{11}P_{21}^{-1} \\ -P_{21}^{-1}P_{22} & P_{21}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

이다.

3. H^∞ 출력제한 제어기의 파라미터화와 이를 통한 자승적 안정화 제어기 설계

H^∞ 출력제한 제어기의 파라미터화와 이를 통한 자승적 안정화 제어기 설계에 대해서 알아본다. 이를 위해 먼저 제어기를 파라미터화하고, 제어기 설계를 위한 등가시스템으로 변환한 다음 제어기를 설계한다.

3.1 H^∞ 출력제한 제어기의 파라미터화

파라미터 불확실성을 가지는 시스템의 식은

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B_2 + \Delta B)u(t) \\ y(t) &= (C_2 + \Delta C)x(t) + (D_{22} + \Delta D)u(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

이고, 이 식을 정합조건

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \\ \Delta C & \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \Delta(t) \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

을 이용한 등가적 표현식은

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + H_1u(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= E_1x(t) + E_2u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + H_2u(t) + D_{22}u(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

이며, 이때 불확실성 $\Delta(t)$ 는

$$\{\Delta(t) : \bar{\sigma}(\Delta(t)) \leq 1\} \quad (3.4)$$

이다.

H^∞ 출력제한 제어문제는 페루프 시스템을 내부적으로 안정화하고 페루프 전달함수의 H^∞ 노름이 1보다 작은 조건을 만족하는 출력제한 제어기

$$u = Ky \quad (3.5)$$

를 설계하는 것이다.

보조정리 1. 시스템 식 (3.3)에 대하여 $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$ 를 만족하는 허용가능한 제어기는

$$K_{sub}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right] \quad (3.6)$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned} \widehat{A}_\infty &= A + \gamma^{-2}B_1B_1'X_\infty + B_2F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ F_\infty &= -B_2'X_\infty \\ L_\infty &= -Y_\infty C_2' \\ Z_\infty &= (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

이며, X_∞ 와 Y_∞ 는 두개의 리카티 방정식

$$\begin{aligned} A'X_\infty + X_\infty A + X_\infty(\gamma^{-2}B_1B_1' - B_2B_2')X_\infty + C_1'C_1 &= 0 \\ AY_\infty + Y_\infty A' + Y_\infty(\gamma^{-2}C_1'C_1 - C_2'C_2)Y_\infty + B_1B_1' &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

를 만족하는 대칭행렬이다. 또한 이 제어기의 파라미터화는

$$\begin{aligned} K(s) &= F_l(M_\infty(s), Q(s)) \\ &= M_{\infty 11} + M_{\infty 12}Q(I - M_{\infty 22}Q)^{-1}M_{\infty 21} \end{aligned} \quad (3.9)$$

과 같이 나타나고, 여기서

$$M_\infty(s) = \begin{bmatrix} M_{\infty 11} & M_{\infty 12} \\ M_{\infty 21} & M_{\infty 22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} \widehat{A} & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right] \quad (3.10)$$

이다. ■

3.2 자승적 안정화 제어기 설계

본 절에서는 3.1절의 결과를 바탕으로 수축성의 시변 이득을 가지는 자승적 안정화 제어기를 구한다.

정리 1. [4] 시스템 식 (3.1)을 안정화하고 $\|T_{zw}\|_{\infty} \leq 1$ 일 필요 충분조건은

$$\|F_l(G(s), K(s))\|_{\infty} < 1 \quad (3.11)$$

을 만족하는 내부적으로 안정한 제어기 $K(s)$ 가 존재하는 것이다. 또한 w 부터 z 까지의 페루프 전달함수는

$$\begin{aligned} F_l(G(s), K(s)) &= F_l(G(s), F_l(M_{\infty}(s), Q(s))) \\ &= F_l(\theta(s), Q(s)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

이고, 여기서 $\theta(s)$ 는 $G(s)$ 와 $M_{\infty}(s)$ 의 레드헤퍼곱(Redheffer product)

$$\begin{aligned} \theta(s) &= C_l(G(s), M_{\infty}(s)) \\ &= \begin{bmatrix} \widehat{A}_{\infty} & Z_{\infty}L_{\infty}C_2 & Z_{\infty}L_{\infty}H_2 - Z_{\infty}B_2 \\ -B_2F_{\infty} & A & H_1 \\ -E_2F_{\infty} & E_1 & 0 \\ C_2 & C_2 & H_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

으로 표현된다. ■

정리 1을 통하여 파라미터화된 내부적으로 안정한 제어기 $K(s)$ 를 페루프 시스템에 적용하면 식 (3.13)은

$$\begin{aligned} \theta_{11}(s) &= G_{11} + G_{12}M_{11}(I - G_{22}M_{11})^{-1}G_{21} \\ \theta_{12}(s) &= G_{12}(I - M_{11}G_{22})^{-1}M_{12} \\ \theta_{21}(s) &= M_{21}(I - G_{22}M_{11})^{-1}G_{21} \\ \theta_{22}(s) &= M_{22} + M_{21}(I - G_{22}M_{11})^{-1}G_{22}M_{12} \end{aligned} \quad (3.14)$$

에 의해 나타난다. 또한 $0 < \varepsilon < 1$ 인 임의의 ε 을 이용하여 시스템을 다시 정의하면

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ \eta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix} \theta(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \xi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \widehat{A}_{\infty} & Z_{\infty}L_{\infty}C_2 & Z_{\infty}L_{\infty}H_2 - \varepsilon Z_{\infty}B_2 \\ -B_2F_{\infty} & A & H_1 \\ -E_2F_{\infty} & E_1 & 0 \\ \varepsilon C_2 & \varepsilon C_2 & \varepsilon H_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \xi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \xi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

로 나타난다. 불확실성이 포함된 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \overline{A}x + \overline{B}\xi \\ \eta(t) &= \overline{C}x + \overline{D}\xi \\ \xi(t) &= \overline{D}(t)\eta \end{aligned} \quad (3.16)$$

으로 표현되고 여기서

$$\overline{D}(t) = \begin{bmatrix} \overline{D}(t) & 0 \\ 0 & \overline{D}_Q(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

이다.

정리 2. 시스템 식 (3.16)과 등가시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_d x + D_d \xi \\ \eta &= E_d x + H_d \xi \\ \xi &= \Delta_Q(t)\eta, \quad \|\Delta_Q(t)\| \leq 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

으로 표현되고, 여기서 A_d, D_d, E_d, H_d 는 각각

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_d & D_d \\ E_d & H_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{A}_{\infty} & Z_{\infty}L_{\infty}C_2 & -\varepsilon Z_{\infty}B_2 \\ -B_2F_{\infty} & A & \varepsilon B_2 \\ \varepsilon C_2 & \varepsilon C_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} Z_{\infty}L_{\infty}H_2 \\ H_1 \\ \varepsilon H_2 \end{bmatrix} \Delta t \begin{bmatrix} -E_2F_{\infty} & E_1 & \varepsilon E_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

으로 표현된다.

증명)

식 (3.16)은

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

으로 나타낼 수 있으며, 이와 등가시스템으로

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left\{ A + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} k_1 (I - D_{11}k_1)^{-1} [C_{11} \ C_{12}] \right\} x \\ &+ \left\{ \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} k_1 [(I - D_{11}k_1)^{-1} D_{21}] \right\} u_2 \\ y_2 &= \{ [C_{21} \ C_{22}] + D_{21}k_1 (I - D_{11}k_1)^{-1} [C_{11} \ C_{12}] \} x \\ &+ \{ D_{22} + D_{21}k_1 (I - D_{11}k_1)^{-1} D_{12} \} u_2 \\ u_2 &= k_2 y_2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

으로 나타낼 수 있다. ■

자승적 안정화의 정의에 따라 시스템 식(3.18)은

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2x^T P A_d x + 2x^T P D_d \Delta_Q(t) (I - H_d \Delta_Q(t))^{-1} E_d x \\ &\leq -\alpha \|x\|^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

를 만족하는 양한정 행렬 P 가 존재한다. 이러한 조정이 가능한 이득을 이용하는 방법으로서 리아푸노프 함수의 최대감소 조절방법(steepest descent tuning law)을 사용하여

$$\Delta_{Q_{opt}}(t) = \arg \min_{\Delta_Q} \dot{V}(t) \quad (3.23)$$

를 만족하는 Δ_Q 를 구한다. 식 (3.23)의 해는 [9]에서 주어진다.

4. 예제

예제를 통하여 조정이 가능한 파라미터를 가지는 H^{∞} 출력제한 제어기의 타당성을 검증한다. 시스템이

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & & \\ -1 + \delta_1(t) & -1 + \frac{1}{2} \delta_2(t) & \\ & & \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \delta_2(t) \end{bmatrix} u(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = [2 + \delta_3(t) \quad 1 + \delta_3(t)] x(t)$$

와 같이 주어지고 불확실성이

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 \sin(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

와 같이 주어졌을 때 그림 3은 각각 중심제어기(central controller)와 조정가능한 파라미터를 가지는 조정제어기(tuning controller)를 통한 리아푸노프 함수의 감소치를 비교한 결과이며 그림 4는 조정제어기의 제어입력이다. 그림 3으로부터 파라미터를 가지는 제어기 설계방식이 더 빠른 감소, 즉 더 나은 성능을 가진다는 것을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 조정가능한 파라미터를 가지는 H^∞ 출력제어 제어를 이용한 자승적 안정화 방법을 제안하였다. 이를 위해 H^∞ 출력제어 제어를 파라미터화하고, 이 파라미터와 선형 분수변환을 이용하여 등가시스템으로 변형한 후 전체 폐루프 시스템을 안정화하였다. 본 논문에서 제안한 파라미터를 이용한 제어기가 파라미터를 0으로 둔 중심제어기보다 성능이 우수함을 예제를 통해 확인하였다.

- [1] B. R. Barmish, "Necessary and sufficient condition for quadratic stabilizability of an uncertain linear system," *J. Optimiz. Theory Appl.*, vol. 46, no. 4, pp. 399-408, 1985.
- [2] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargoneker, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H^2 and H^∞ control problem," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, Aug. 1989.
- [3] B. A. Francis, *A Course in H^∞ Control Theory*, Springer-Verlag, 1987.
- [4] P. P. Khargoneker, I. R. Petersen, and K. Zhou, "Robust stabilization of uncertain systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 35, no. 3, pp. 356-361, 1990.
- [5] H. Kimura and R. Kawatani, "Synthesis of H^∞ controllers based on conjugation," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 7-13, 1988.
- [6] I. R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems," *Systems and Control Letters*, vol. 8, pp. 351-357, 1987.
- [7] A. Packard "Gain scheduling via linear fractional transformation," *Systems and Control Letters*, vol. 22, pp. 79-92, 1994.
- [8] S. Ushida, S. Yamamoto, and H. Kimura, "Quadratic stabilization by H^∞ state feedback controllers with adjustable parameters," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 1003-1008, 1996.
- [9] S. Yamamoto and H. Kimura, "Quadratic stabilization by H^∞ controller with time-varying tuner," *Proc. 1996 IFAC 13th Triennial World Congress*, vol. D, pp. 189-194, 1996.

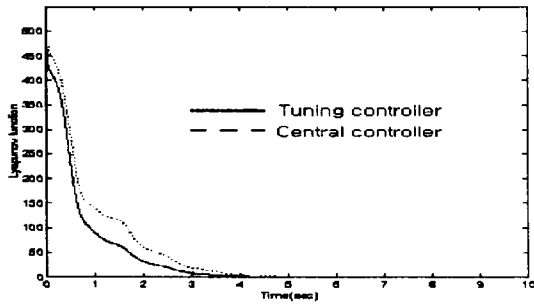


그림 3. 리아푸노프 함수의 시간응답
Fig. 3. Time responses of the Lyapunov function.

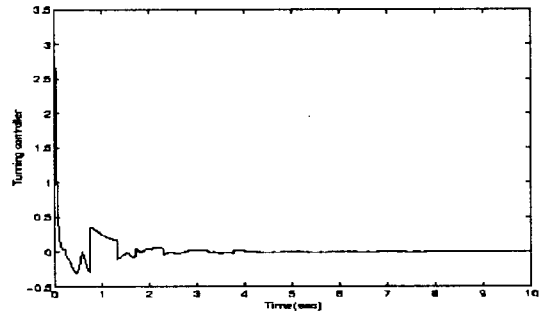


그림 4. 조정제어기의 제어입력
Fig. 4. Control input of tuning controller.