Proceedings of the 12th
KACC, October 1997

시간 지연이 존재하는 시스템에 대한 제어기의 매개변수에 관한 해석.

Analysis on the paramters of the controllers for time-delay systems.

°박영일*, 이석원**, 정영창***

* 호서대학교 전자공학과(Tel : 0418-40-5429)
** 호서대학교 제어계측공학과(Tel : 0418-40-5482, Fax : 0418-40-5480, E-mail : swlee@dogsuri.hoseo.ac.kr)
*** 호서대학교 전자공학과(Tel : 0418-40-5422, Fax : 0418-40-5198)

Abstract This paper is concerned with the controllers for time-delay systems which has an integrator. It is known that high performance can be obtained for the systems response and load disturbance rejection by adjusting the only three prarameters of the modified Smith predictor. In the case of the time-delay systems with repeated poles, good performance cannot be obtained with the modified Smith predictor. But superior performance can be obtained through the intentional delay parameters mismatch. The calculating method for the approximation delay parameter values is proposed. Simulation results show the improved response characteristics with the proposed delay parameter values.

Keywords time-delay, Smith predictor, integrator, repeated pole, parameter mismatchs.

1. 서론

실제의 물리적인 시스템에서 시간 지연이 무시못할 정도로 크게 존재하는 경우가 자주 발생하는데, 이 시간 지연은 전체 시스템의 안정도에 대한 해석과 제어기 설계를 어렵게 한다.

이런 점을 극복하기 위해 Smith는 제어기를 설계하는데 있어서 시간 지연의 영향을 받지 않도록 하는 구조를 제안했다[5]. 그러나, 이 구조에서 사용되는 수학적 모델의 매개변수는 실제 시스템과 완전히 일치해야 한다는 제약이 따르고[7], 또한 불안정한 시스템에 대해서는 안정화하도록 제어를 할 수 없고, 시스템에 적분기가 존재하는 경우에는 부하외란에 대한 정상 상태 오차가 항상 발생하게 된다[1,6]. 이런 단점을 해결하기 위해 Watanabe 등은 Smith predictor와는 다른 수학적 모델을 사용하는 제어방법을 제안했다. 그러나, 이 제안된 방법은 시간 지연이 큰 값을 가질때 기준입력과 부하외란에 대한 응답이 심하게 진동하거나, 또는 시스템의 응답속도가 늦어지는 경향이 있다[1]. 그래서, Astrom은 기준입력에 대한 응답과 부하외란에 대한 응답을 분리시켜서 각각의 응답특성을 개선할 수 있도록 했다[1]. 그렇지만, 만일 시스템의 이득을 모른다고 하면 설계자가 결정해야 할 매개변수가 6개나 된다[3].

Matausek은 부하외란에 의한 정상 상태 오차를 완전히 제거하고, 또한 시스템의 과도 응답속도가 뒤떨어지지 않으면서도 결정해야할 매개변수 수를 단지 3개로 줄여 줄 수 있는 변형된 Smith predictor를 제안했다. 또한 이 제안된 구조는 모델과 시스템의 표현식이 일치하지 않아도 만족할 만한 성능을 보인다[3].

본 논문에서는 시스템과 모델이 일치하지 않는 변형된 Smith predictor에서, 시스템에 중복된 극점이 존재할 경우에는 전체 시스템에 대한 응답이 만족할 만한 성능을 갖지 못함을 시뮬레이션을 통해 보이고, 중복된 극점으로 인한 모델과의 매개변수 불일치를 보상할 수 있는 시간 지연 매개변수의 값을 근사적으로 구할 수 있음을 제시한다. 그리고, 이 근사치를 적용할 때 전체 시스템에 대한 응답특성이 개선됨을 시뮬레이션을 통해 보인다.

2. 시간 지연이 존재하는 시스템에 대한 제어기

2.1 Smith predictor

<그림1>은 Smith predictor의 제어 구조를 나타내고 있는 블럭도이다. 이 제어 구조의 특징은 제어기의 주변을 감싸고 있는 루프에 제어하고자 하는 시스템과 매개변수가 완전히 일치하는 수학적 모델을 사용하는데 있다. 그 결과 제어기를 설계하는데 있어, 전체 시스템에 대한 폐루프의 특성방정식에 존재하는 시간 지연의 영향을 제거했다[6]. <그림1>에서 기준입력과 부하외란에 대한 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1(s) = \frac{G_pT_pH}{1+G_mH-G_mT_mH+G_pT_pH} \tag{1}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = G_2(s) = \frac{G_pT_p(1+G_mH-G_mT_mH)}{1+G_mH-G_mT_mH+G_pT_pH} \tag{2}$$

여기서 R(s)는 기준입력이고, D(s)는 부하외란이며, Y(s)는 시스템의 출력이다. 그리고 G_p는 제어하고자 하는 시스템이고, G_m은 시스템과 일치하는 수학적인 모델이다. 또한 T_p는 시스템의 시간 지연 요소를 나타내며, T_m는 모델의 시간 지연 요소이다. 그리고, H는 제어기를 나타낸다.

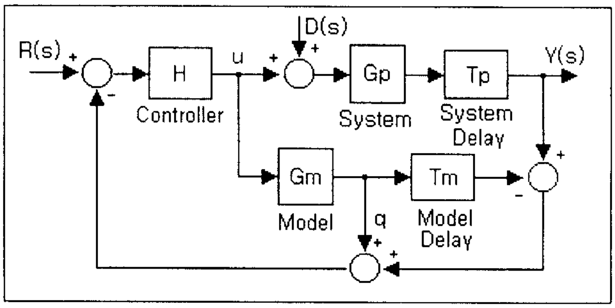

그림 1. Smith predictor의 구조.
Fig.1 Smith predictor scheme.

모델과 시스템의 관계가 다음 식을 만족할 경우에는

$$G_mT_m = G_pT_p \qquad (3)$$

식(1)과 식(2)는 각각 식(4)와 식(5)로 간단히 표현된다.

$$G_1(s) = \frac{G_pH}{1+G_mH}\,T_p \qquad (4)$$

$$G_2(s) = \frac{[1+G_mH(1-T_m)]G_pT_p}{1+G_mH} \qquad (5)$$

여기서 식(1)과 식(4)를 비교해보면 시간 지연의 영향을 특성 방정식에서 제거할 수 있음을 알 수 있다. 결국 Smith predictor는 시간 지연이 존재하는 시스템을 시간 지연이 없는 시스템처럼 제어기 H를 설계할 수 있도록 했다.

그러나, 이 제안된 방법은 적분기가 있는 시스템에 대해서는 부하외란에 대한 정상 상태 오차를 항상 제거하지 못한다는 단점이 있다. 그래서, Watanabe 등은 <그림1>의 신호 q를 식(6)과 같은 q′로 제안하여 적분기가 존재하는 시스템에서 부하외란에 의한 정상상태 오차를 제거할 수 있도록 했다[6].

$$q' = \frac{1}{1+sT_m}\,q \qquad (4)$$

그러나, 여전히 시간 지연의 매개변수 Tp와 Tm이 일치하지 않을 경우에는 정상 상태 오차가 존재하게 된다. 또한 기준입력에 대한 응답속도가 늦어지는 단점이 있다[1].

이 단점을 해결하기 위해 Astrom는 기준입력과 부하외란에 대한 응답을 분리시켜 응답속도를 개선시키는 제어기를 제안했다. 그러나, 이 제어기는 시스템의 이득을 포함해서 응답에서 물리적 특징을 나타내고 있는 매개변수 3개와 물리적 의미를 갖고 있지 않은 매개변수 3개를 모두 합쳐 설계자가 결정해야할 매개변수가 6개나 된다[3]

2.2 Matausek이 제안한 변형된 Smith predictor

<그림2>는 적분기와 긴 시간 지연이 존재하는 시스템에 대해 부하외란에 대한 정상 상태 오차를 제거하며, 결정해야할 매개변수 수를 줄인 변형된 Smith predictor의 구조를 보여주고 있다. 이 제안된 구조는 모델의 식이 이상적인 적분기만으로 표현하는, 즉 시스템과 모델의 식이 일치하지 않더라도 시스템의 식이 모델에 근사화되도록 하는 특성이 있다[3].

여기서 K_0는 상수인데, K_0가 있는 루프를 첨가한것이 Smith predictor와 다른 점이다. $K_0=0$이면 Smith predictor와 같은 구조를 갖는다. 그리고, 제어기 H는 단순 비례제어기이다.

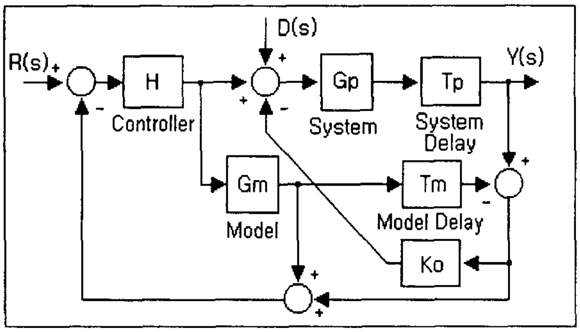

그림 2. 변형된 Smith predictor의 구조.

Fig.2 Modified Smith predictor scheme.

변형된 Smith predictor의 기준입력에 대한 전달함수는 식(7)과 같고, 부하외란에 대한 전달함수는 식(8)과 같다

$$G_1(s) = \frac{G_pT_pH(1+K_oG_mT_m)}{(1+G_mH-G_mT_mH+G_pT_pH)+K_oG_pT_p(1+G_mH)} \qquad (7)$$

$$G_2(s) = \frac{G_pT_p(1+G_mH-G_mT_mH)}{(1+G_mH-G_mT_mH+G_pT_pH)+K_oG_pT_p(1+G_mH)} \qquad (8)$$

여기서 식(3)의 조건이 성립된다면 전체 시스템의 특성방정식 F(s)는 다음과 같이 된다.

$$F(s) = (1+G_mH)(1+K_oG_pT_p) \qquad (9)$$

윗 식을 식(7)과 식(8)의 분모에 대입하여 정리하면 아래와 같이 간략하게 된다.

$$G_1(s) = \frac{G_pH}{1+G_mH}\,T_p \qquad (10)$$

$$G_2(s) = \frac{G_pT_p(1+G_mH-G_mT_mH)}{(1+G_mH)(1+K_oG_pT_p)} \qquad (11)$$

따라서, 식(10)은 Smith preditor의 전달함수와 같으므로 쉽게 제어기를 설계할 수 있다. 이때 시스템과 시스템의 지연 요소를 다음과 같이 표현하고,

$$G_p = \frac{K_p}{s(\tau_ps+1)} \qquad (12)$$

$$T_p = e^{-\theta_ps} \qquad (13)$$

모델과 모델의 지연 요소를 다음과 같이 표현한다면

$$G_m = \frac{K_m}{s} \qquad (14)$$

$$T_m = e^{-\theta_ms} \qquad (15)$$

제어기 H의 비례계수 k_p와 피드백에 첨가되어 있는 이득상수 K_0는 다음과 같이 결정된다[3].

$$k_p = \frac{1}{K_m\tau_m} \qquad (16)$$

$$K_o = \frac{1}{2K_m\theta_m} \qquad (17)$$

결국 결정되어야 할 매개변수는 K_m, θ_m 그리고 τ_m. 즉, 설계자가 결정해야 할 매개변수 수는 단지 3개이면 된다. 이때 τ_m은 시스템의 영향력이 큰 시정수, G_p가 식(12)인 경우에는 τ_p와 일치시킨다[3].

위의 공식들을 사용하여 설계된 변형된 Smith predictor는 시스템과 모델 식의 매개변수가 일치하지 않을 때에도 만족할만한 응답 특성을 보이고 있다. 그러나, 중복된 극점이 존재하는 시스템에 대해는 응답특성이 만족스럽지 못하게 된다. 또한 모델의 시간 지연 요소가 시스템의 지연 요소와 같지 않을 때 오히려 더 좋은 응답특성을 보이게 된다.

3. 중복된 극점이 존재하는 시스템에 대한 제어기

3.1 매개변수 불일치의 효과

적분기와 시간 지연이 존재하는 시스템에서, 식(3)의 조건이 만족되면 시스템의 응답특성이 당연히 향상되지만, 식(3)의 조건을 만족하지 않을 때에도 모델의 지연 요소의 매개변수 값을 시스템의 그것과 일치시키지 않고 다른 적당한 값으로 결정하면 응답특성이 더 좋게 나타난다.

적분기와 중복근이 존재하는 시스템의 식을 다음과 같이 가정한다.

$$G_p = \frac{K_p}{s(\tau_ps+1)^n} \qquad (18)$$

변형된 Smith predictor에서는 식(14)와 같은 모델의 식을 사용하며 시스템과 모델의 시간 지연 요소는 서로 일치한다고 즉,

$T_m=T_p$임을 가정하고 있다. 그러므로 항상

$$G_m T_m \neq G_p T_t \tag{19}$$

이다. 그리고, τ_m은 G_p가 식(18)일 경우에 다음과 같이된다.

$$\tau_m = n \cdot \tau_p \tag{20}$$

또한 식(18)에서의 K_p 값은 실험적으로 구할 수 있지만[3], 다음과 같이 가정한다.

$$K_m = K_p = 1 \tag{21}$$

제어기 H의 비례상수 k_p와 이득상수 K_o는 식(16)과 식(17)에 의해 구한다.

모델의 시간 지연 매개변수를 시스템과 불일치시켜 식(3)의 조건이 성립하도록 하기 위해 θ_p와 값이 다른 θ_m을 다음과 같이 가정한다.

$$\theta_m = \alpha_m + \theta_t \tag{22}$$

여기서 α_m은 시스템과 모델의 시간 지연의 불일치 정도를 나타낸다. 따라서 식(19)의 좌변을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} G_m T_m &= \frac{1}{s} e^{-\theta_m s} \\ &= \frac{1}{s}(e^{-\alpha_m s} \cdot e^{-\theta_p s}) \end{aligned} \tag{23}$$

식(23)의 괄호에 있는 $e^{-\alpha_m s}$을 다음 식과 같은 근사식으로 표현한다[2].

$$e^{-\alpha_m s} \simeq \frac{1}{(\frac{\alpha_m}{n}s+1)^n} \tag{24}$$

그러면, 식(23)은 식(24)에 의해 다음과 같이 근사화 된다.

$$G_m T_m \simeq \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(\frac{\alpha_m}{n}s+1)^n} \cdot e^{-\theta_p s} \tag{25}$$

따라서 제어기의 성능을 개선시키기 위한 식(3)의 조건을 근사적으로 만족시키기 위해서는 다음과 같은 조건이 성립해야 한다.

$$\tau_p = \frac{\alpha_m}{n} \tag{26}$$

즉,

$$\alpha_m = n \cdot \tau_p \tag{27}$$

따라서, 결국식(22)의 θ_m을 아래와 같이 근사적으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta_m &= \alpha_m + \theta_p \\ &= n \cdot \tau_p + \theta_t \end{aligned} \tag{28}$$

결론적으로 모델의 시간 지연의 매개변수를 시스템의 그것과 일치시키지 않고 식(28)과같이 불일치하는 값을 갖도록 취하면, 시스템과 모델의 불일치에 대한 영향을 보상함으로써 식(3)의 조건을 만족시킬 수 있다. 따라서 전체 시스템의 폐루프의 특성 방정식을 간략화 시킴으로써 좀더 개선된 시스템의 응답특성을 기대할 수 있다.

3.2 시뮬레이션 결과

다음과 같은 시스템을 예로들었다.

$$G_p = \frac{1}{s(s+1)^2} \tag{29}$$

Matausek에의해 제안된 변형된 Smith predictor는 모델이 시스템과 불일치해도 기준입력에 대한 응답속도가 빠르고, 부하외란에 의한 정상 상태 오차를 제거할 수 있는 것으로 알려져 있다[3]. 하지만, 식(29)와 같이 시스템에 중복된 극점이 존재하면 <그림3>처럼 시스템의 응답특성이 좋지않음을 알 수 있다. 여기서 $K_p=K_m=1$이고, 식(30)에서 $\tau_p=1$이고 $\tau_m=2$이다. 그리고, $\theta_m=\theta_p=5$로 가정한다.

<그림4>는 본 논문에서 제안하는 식(28)을 이용하여 계산한 시간 지연 값을 적용한 결과이다. 모델의 시간 지연 매개변수 θ_m이 시스템의 값($\theta_p=5$)보다 $\alpha_m(=2)$만큼 클 때 더 좋은 시스템 응답특성을 얻을 수 있음을 <그림4>를 통해 알 수 있다. 여기서, 식(29)에서 $n=2$, $\tau_p=1$ 이므로 $\tau_m=2$이고, $\alpha_m=2$이다. 따라서, $\theta_m=7$ 이다.

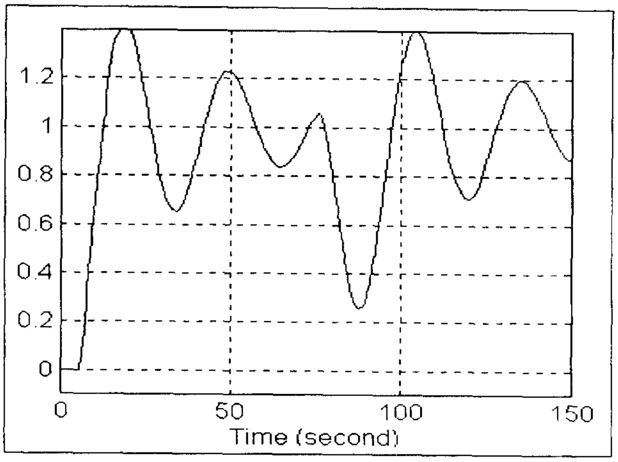

그림 3. 플랜트에 중복된 극점이 있을 경우의 변형된 Smith predictor의 응답
: $K_p=K_m=1$, $\tau_p=1$, $\tau_m=2$, $\theta_p=\theta_m=5$, $k_p=1/2$, $K_o=1/10$.

Fig.3 Response of modified Smith predictor with double pole.
: $K_p=K_m=1$, $\tau_p=1$, $\tau_m=2$, $\theta_p=\theta_m=5$, $k_p=1/2$, $K_o=1/10$.

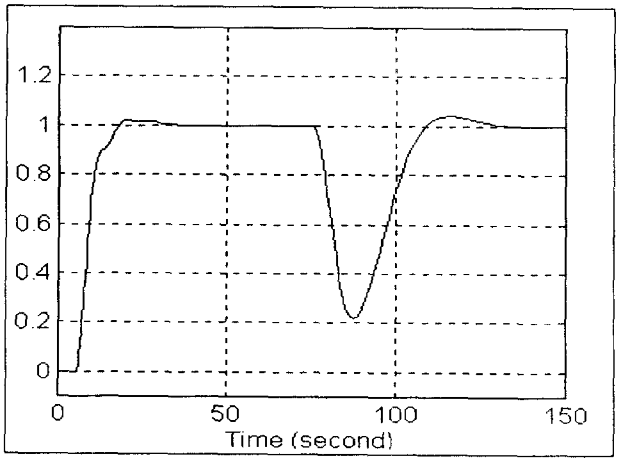

그림 4. 플랜트에 중복된 극점이 있을 경우의 변형된 Smith predictor의 응답
: $K_p=K_m=1$, $\tau_p=1$, $\tau_m=2$, $\theta_m=7$, $\theta_p=5$, $k_p=1/2$, $K_o=1/14$.

Fig.4 Response of modified Smith predictor with double pole
: $K_p=K_m=1$, $\tau_p=1$, $\tau_m=2$, $\theta_m=7$, $\theta_p=5$, $k_p=1/2$, $K_o=1/14$.

또 다른 예로서 다음과 같은 시스템에 적용하였다.

$$G_p = \frac{1}{s(s+1)^3} \tag{30}$$

여기서는 $n=3$, $\tau_p=1$이기 때문에 $\tau_m=3$이다. 이때 시간 지연 매개변수가 일치할 때($\theta_m=\theta_p=5$)의 응답특성은 <그림5>에 나타나있다. 그러나, 시간 지연의 매개변수를 불일치시킬 때는 식(27)과 식(28)에서 $\alpha_m=3$이고, $\theta_m=8$이다. 이 경우에 대한 시스템 응답은 <그림6>에 나타나있다.

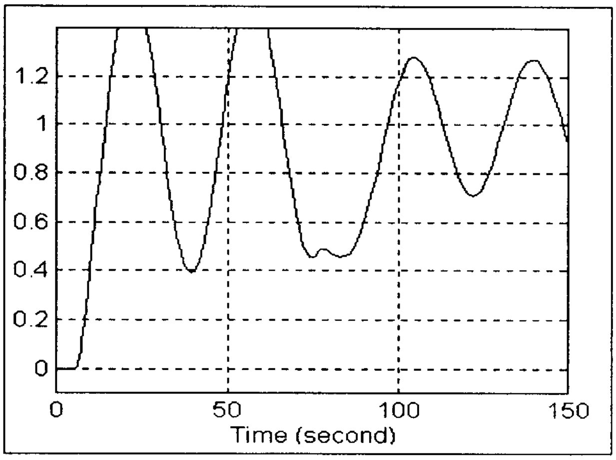

그림 5. 플랜트에 3개의 중복된 극점이 있을 경우의 변형된 Smith predictor의 응답

: $K_p=K_m=1$, $\tau_m=3$, $\tau_p=1$, $\theta_m=\theta_p=5$, $k_p=1/3$, $K_o=1/10$.

Fig.4 Response of modified Smith predictor with triple pole

: $K_p=K_m=1$, $\tau_m=3$, $\tau_p=1$, $\theta_m=\theta_p=5$, $k_p=1/3$, $K_o=1/10$.

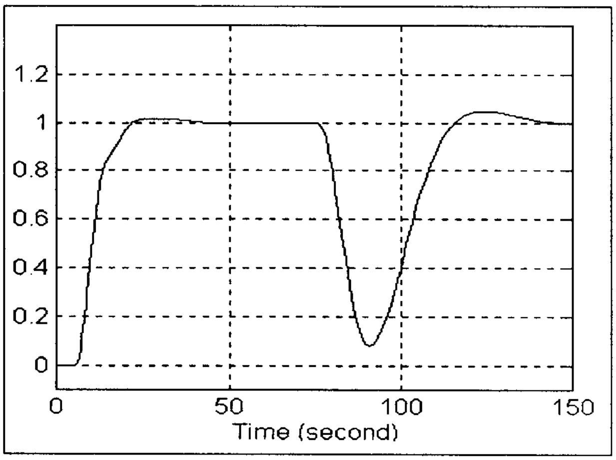

그림 6. 플랜트에 3개의 중복된 극점이 있을 경우의 변형된 Smith predictor의 응답

: $K_p=K_m=1$, $\tau_p=1$, $\tau_m=3$, $\theta_p=5$, $\theta_m=8$, $k_p=1/3$, $K_o=1/16$.

Fig.4 Response of modified Smith predictor with triple pole

: $K_p=K_m=1$, $\tau_p=1$, $\tau_m=3$, $\theta_p=5$, $\theta_m=8$, $k_p=1/3$, $K_o=1/16$.

4. 결론

본 논문에서는 시간 지연이 존재하는 시스템에 대한 제어기의 설계 문제를 다루었다. 변형된 Smith predictor는 모델과 시스템의 표현식이 일치하지 않을 때도 만족할 만한 응답특성을 보이고 있지만, 모델과 시스템의 시간 지연 매개변수가 일치하고 중복된 극점이 존재하는 시스템에 대해 적용한 변형된 Smith predictor의 응답특성은 만족할 만한 성능을 나타내 못한다.

이 경우 시간 지연 매개변수의 불일치를 통해 시스템과 모델의 불일치를 어느 정도 보상할 수 있음을 보이고, 또한 이때의 모델의 시간 지연 매개변수가 간단한 식을 통해 근사적으로 결정될 수 있음을 제시하였다. 그리고, 시뮬레이션을 통해 모델과 시스템의 시간 지연 매개변수가 불일치하게 되면 오히려 더 나은 응답특성이 나타남을 보였다.

참고문헌

[1] K. J. Astrom, C. C. Hang, and B. C. Lim, "A New Smith Predictor for Controlling a Proces with an Integrator and Long Dead-Time", *IEEE Trans. Automt. Contr.*, vol. 39, no. 2, pp. 343-345, 1994.

[2] A. Terry Bahill, "A Simple Adaptive Smith-Predictor for Controlling Time-Delay Systems", *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 5, pp. 16-22, 1983.

[3] M. R. Matausek and A. D. Micic, "A Modified Smith Predictor for Controlling a Process with an Integrator and Long Dead-Time", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 8, pp. 1199-1203, 1996.

[4] Annraoi M. De Paor, "A Modified Smith Predictor and Controller for Unstable Processes with Time Delay", *Int. J. Control*, vol. 41, no. 4, pp. 1025-1036, 1985.

[6] O. J. Smith, "A Controller to Overcome Dead Time.", *ISA J.*, vol. 6, no. 2, pp. 28-33, Feb. 1959.

[6] Keiji Watanabe and Masami Ito, "A Process - Model Control for Linear Systems with Delay", *IEEE Trans. Automt. Contr.*, vol. ac-26, no. 6, pp. 1261-1269, Dec. 1981.

[7] J. E. Marshall, *Control of Time-Delay Systems*, Stevenage, United Kingdeom:Oeter Peregrinus Ltd., 1979