

비이상적 마스크로 인한 하다마드변환 스펙트럼 검파기 출력값의  
신호대 잡음비 감소의 해결방안

Compensation for the Decrease of Output SNR of Hadamard Transform  
Spectrometer with Nonideal Mask

°남지탁\*, 박진배\*, 주영훈\*\*, 윤태성\*\*\*

\*연세대학교 전기공학과 (Tel: +82-4-361-2773, E-mail: jbpark@control.yonsei.ac.kr)

\*\*군산대학교 제어계측공학과 (Tel: +82-654-469-4706, E-mail: yhjoo@ks.kunsan.ac.kr)

\*\*\*창원대학교 전기공학과(Tel; +82-551-68-7513)

**Abstracts** When we use Hadamard transform spectrometers (HTS), we can increase signal to noise ratio(SNR) by multiplexing which is done by masks. But if the mask has a single defective element, output-SNR decreases. In this paper the effect of a single defective element on the output-SNR is investigated. And a method of compensating for the defective mask element is presented.

**Keywords** Hadamard transform spectrometer, signal to noise ratio, mask, multiplexing

1. 서론

하다마드 분광계측기(HTS)는 초창기에 사용된 다검파기 분광계측기와 단일파장 분광계측기의 신호대 잡음비가 낮은 단점을 해결하고자 multiplexing기법을 이용한 분광계측기이다. 이 multiplexing기법에서는 광원으로부터 방사된 광선을 여러 주파수대역으로 분리하여 투과시키는 마스크가 사용된다. HTS의 가장 보편적인 형태를 블럭선도로 나타내보면 그림 1과 같이 된다. 그림 1의 스펙트로미터는 monochromator와 비슷한 구조를 가지고 있다. 하지만 측정하려는 특정한 스펙트럼 대역의 빛을 통과시키는데 있어서 단일한 slit를 사용하는 대신에 multiplexing기법을 적용할 수 있도록 하다마드 마스크를 사용한다는 점에서 차이를 보인다. 처음에는 마스크 방식으로서 기계식 이동마스크(movable mask)가 사용되었으나, 재밍(jamming)과 조정불량(misalignment)의 기계적 문제점을 갖고 있다. 때문에 HTS는 보편적인 관심을 끌지 못했다. 이런 단점을 보완하

고자 고정형 전자광학 마스크(stationary eletro-optical mask)가 소개되어 HTS는 푸리에 변환에 기초한 방법의 대체 방법으로 다시 관심의 대상이 되고 있다. HTS에 적용되는 multiplexing기법은 출력값의 SNR을 증가시키는데 도움을 준다. 하지만 마스크의 특정요소가 비이상적인 특성을 가진다면 SNR의 증가에 큰 도움을 주지 못한다. 특히 그 요소부위에 해당하는 빛의 에너지가 매우 큰 값을 가질 경우 큰 문제점을 가진다. 본 논문에서는 HTS에 적용되는 multiplexing기법에 의한 SNR의 향상 정도와 마스크가 한 요소에서 결함을 가질 때의 동작특성을 알아보고 그 문제점을 해결할 수 있는 보정방법을 소개한다.

2. 이상적인 다중송신 스펙트로미터

본 논문에서 기술한 모든 수식적 모델은 다음의 가정을 전제로 한다.

2.1 전제되는 가정

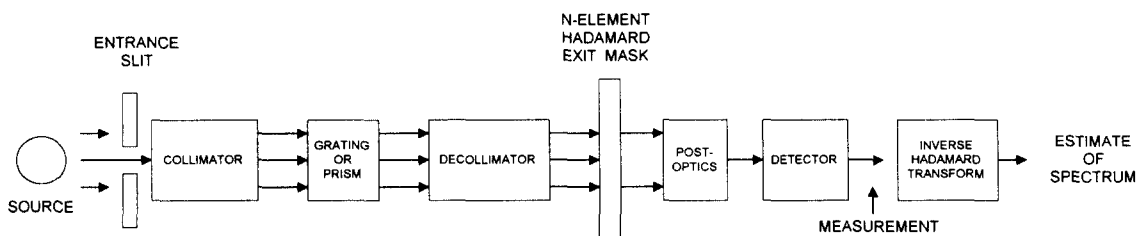


그림 1. 보편적인 HTS의 블럭선도.

Fig. 1. Block diagram of a common HTS.

1) 측정값  $\eta_i$ 에 연관된 오차  $e_i$ 는 임의변수(random variable)이고 검파기에 입사되는 빛의 양과 무관하다.

2) 측정오차의 평균값은 영(zero)이다.

$$E[e_i] = 0$$

3) 서로 다른 측정에서 오차는 서로 독립(mutually independent)이다.

$$E[e_i e_j] = 0, \quad i \neq j$$

$$E[e_i^2] = \sigma^2, \quad i = j \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

다중송신 스펙트로미터의 동작은 그림 2와 같다.

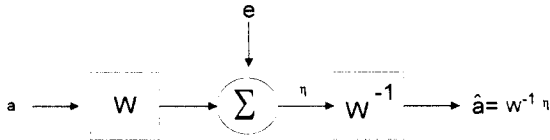


그림 2. Multiplexing 스펙트로미터의 블록선도.

Fig. 2. Block diagram of a multiplexing spectrometer.

N개의 요소를 갖는 마스크에 송신되는 각 스펙트럼별 에너지는 벡터  $a$ 로 표현된다.

$$a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]^T$$

행렬  $W$ 는 마스크를 나타내는  $N \times N$  행렬로서 신호벡터를 부호화한다. 예를 들어 행렬  $W$ 의 요소  $W_{ij}$ 의 값이 임의의 수  $c$ 라는 것은  $i$  번째 측정과정에서 마스크의  $j$  번째 요소의 optical transmittance의 값이  $c$ 라는 것을 나타낸다. 검파기 오차 벡터는 각각의 N번의 측정에서 오직 검파기에 의한 오차를 나타낸다.

$$e = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]^T$$

N번의 측정을 한 측정치 벡터는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \eta &= [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_N]^T \\ &= Wa + e \end{aligned} \quad (1)$$

측정치가 구해지면 실제 스펙트럼의 추정치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{a} &= [\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \dots \ \hat{a}_N]^T \\ &= W^{-1}\eta \\ &= W^{-1}(Wa + e) \\ &= a + W^{-1}e \end{aligned} \quad (2)$$

측정치와 실제치와의 오차는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \zeta &= \hat{a} - a \\ &= W^{-1}e \end{aligned}$$

즉,  $j$  번째 요소를 추정할 때의 오차는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \zeta_j &= \hat{a}_j - a_j \\ &= \sum_{i=1}^N \xi_{ji} e_i \end{aligned}$$

여기서  $\xi_{ji}$ 는 행렬  $W^{-1}$ 의  $ji$ 번째 요소를 나타낸다.

$j$ 번째 요소 추정치의 MSE (mean square error)는 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_j &= E[\zeta_j^2] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \xi_{ji} \xi_{jk} E[e_i e_k] \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^N \xi_{ji}^2$$

따라서 AMSE (average mean square error)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \epsilon_j \\ &= \frac{\sigma^2}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \xi_{ji}^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{N} \text{tr}(W^{-1}(W^{-1})^T) \\ &= \frac{\sigma^2}{N} \text{tr}((W^T W)^{-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\text{tr} \{ \}$ 은 행렬의 trace를 나타낸다.

### 3. Multiplexing 기법 적용시의 효과

Multiplexing 기법을 사용하지 않는 monochromator는 수식 (1)의 마스크 행렬  $W$ 을  $N \times N$  단위행렬  $I_N$ 으로 대치함으로써 표현할 수 있다. 이때의 AMSE는 식(3)으로부터 구해진다.

$$\begin{aligned} \epsilon^{(I)} &= \frac{\sigma^2}{N} \text{tr}((I_N^T I_N)^{-1}) \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Multiplexing 기법을 이용한 HTS (Hadamard Transform Spectrometer)는 마스크 행렬이 S-행렬 (simplex matrix)로 표현된다. 이 경우의 AMSE는 식(3)으로부터

$$\begin{aligned} \epsilon^{(S)} &= \frac{\sigma^2}{N} \text{tr}(S_N^{-1} (S_N^{-1})^T) \\ &= \frac{4N\sigma^2}{(N+1)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

스펙트로미터에서  $j$  번째 요소를 추정할 경우 SNR (Signal to Noise Ratio)은 다음과 같이 표현된다.

$$\text{SNR} = \frac{a_j}{\sqrt{E\{(\hat{a}_j - a_j)^2\}}} \quad (6)$$

SNR의 비교를 통해 multiplexing 기법의 효과를 알아본다. 다음의 식이 성립한다면 multiplexing 기법이 SNR을 증가시키는 효과를 가진다는 것을 의미한다.

$$\frac{\text{multiplexing 적용시 SNR}}{\text{multiplexing을 적용치 않을 때 SNR}} > 1$$

식(6)으로부터 위의 부등식의 왼쪽항은

$$\left[ \frac{\epsilon_{\text{multiplexing 적용시}}}{\epsilon_{\text{multiplexing을 적용치 않을 때}}} \right]^{\frac{1}{2}} \text{와 같은 값을 가진다는 것을 알 수 있다.}$$

Multiplexing 적용시의 AMSE와 적용치 않을 때의 AMSE의 비의 제곱근 값은 다음과 같다.

$$\left[ \frac{\epsilon^{(I)}}{\epsilon^{(S)}} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{N+1}{2\sqrt{N}} \cong \frac{\sqrt{N}}{2}$$

따라서 N의 수가 커질수록 SNR의 값이 증가함을 알 수 있다. 따라서 마스크를 이용한 multiplexing 기법은 SNR을 증가시키는데 도움을 준다는 것을 알 수 있다.

#### 3.1 마스크가 비이상적일 경우의 multiplexing

마스크가 비이상적이라는 것은 마스크의 어떤 한 요소에 결함이 있어서 그 요소에 해당하는 transmittance 값이 마스크 고유의 값이 아닌 다른 값을 가지는 것을 의미한다. 이

경우 multiplexing 기법에 의한 SNR 증가에 어떤 영향을 주는가를 살펴본다. 비이상적인 마스크를 가지는 multiplexing 스펙트로미터는 그림 3의 블럭선도와 같다.

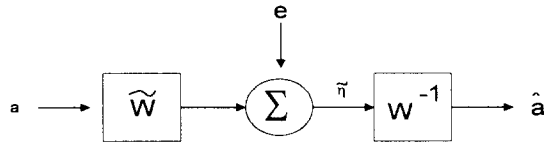


그림 3. 비이상적인 마스크를 가진 multiplexing 스펙트로미터의 블럭선도.

Fig. 3. Block diagram of a multiplexing spectrometer with a defective mask element.

이때 마스크 행렬  $W$ 는  $\tilde{W}$ 로 표현된다.  $\tilde{W}$ 는 1번째 요소에서  $W$ 의 값과는 다른 transmittance  $c$ ,  $0 \leq c \leq 1$ 의 값을 갖고 나머지는  $W$ 의 요소와 같은 값을 갖는다. 즉 1번째 요소가 불완전하다는 것을 나타낸다.

$$\tilde{W} = [\tilde{W}_{ij}]$$

여기서,

$$\tilde{W}_{ij} = \begin{cases} W_{ij}, & j \neq 1: i = 1, \dots, N \\ c, & j = 1: i = 1, \dots, N \end{cases}$$

$\tilde{W}$ 는 또다른 방법으로 표현될 수 있다.

$$\tilde{W} = W + \Gamma$$

여기서  $\Gamma = [\gamma_{ij}]$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq 1: i = 1, \dots, N \\ c - W_{ij}, & j = 1: i = 1, \dots, N \end{cases}$$

따라서 측정값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \tilde{W}a + e \\ &= (W + \Gamma)a + e \\ &= Wa + a_1\psi + e \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $\psi = [\psi_1 \dots \psi_N]^T$

$$\psi_i = \gamma_{ii}$$

식(7)을 식(1)과 비교해 보면 마스크의 결함으로 인한 오차인  $a_1\psi$ 항이 추가됨을 알 수 있다. 이러한 오차는 결함이 있는 마스크의 요소에 투과되는 빛의 강도가 강할수록 커짐을 알 수 있다. 이러한 경우에 스펙트럼의 추정치  $\hat{a}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{a} &= W^{-1} \tilde{\eta} \\ &= W^{-1}(Wa + a_1\psi + e) \\ &= a + a_1W^{-1}\psi + W^{-1}e \end{aligned}$$

따라서 오차벡터는 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \zeta &= \hat{a} - a \\ &= a_1W^{-1}\psi + W^{-1}e \end{aligned}$$

구체적으로  $j$ 번째 요소 추정시 오차는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \zeta_j &= \hat{a}_j - a_j \\ &= a_1 \sum_{i=1}^N \xi_{ji} \psi_i + \sum_{i=1}^N \xi_{ji} e_i \end{aligned}$$

$j$ 번째 요소 추정시 MSE는 다음과 같다.

$$\epsilon_j = E[\zeta_j^2]$$

$$\begin{aligned} &= E\left[ \left( a_1 \sum_{i=1}^N \xi_{ji} \psi_i + \sum_{i=1}^N \xi_{ji} e_i \right) \right. \\ &\quad \left. \left( a_1 \sum_{k=1}^N \xi_{jk} \psi_k + \sum_{k=1}^N \xi_{jk} e_k \right) \right] \\ &= a_1^2 \left( \sum_{i=1}^N \xi_{ji} \psi_i \right)^2 + 2a_1 \sum_{i=1}^N \xi_{ji} \psi_i \sum_{k=1}^N \xi_{jk} E[e_k] \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \xi_{ji} \sum_{k=1}^N \xi_{jk} E[e_i e_k] \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)은 오차  $e$ 가 평균값이 0이고 서로 독립적이라는 가정에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon_j = a_1^2 \left[ \sum_{i=1}^N \xi_{ji} \psi_i \right]^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^N \xi_{ji}^2$$

그러므로 AMSE는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \epsilon_j \\ &= \frac{\sigma^2}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \xi_{ji}^2 + \frac{a_1^2}{N} \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N \xi_{ji} \psi_i \right]^2 \\ &= \epsilon_{det} + \epsilon_x \end{aligned}$$

여기서  $\epsilon_{det} = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \xi_{ji}^2$ 으로 검파기 오차에 의한

AMSE이고  $\epsilon_x = \frac{a_1^2}{N} \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N \xi_{ji} \psi_i \right]^2$ 으로 비이상적인 마스크로 인한 추가적인 오차항이다. 따라서  $\epsilon_x$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{a_1^2}{N} (W^{-1}\psi)^T W^{-1}\psi \\ &= \frac{a_1^2}{N} \text{tr}(W^{-1}\psi(W^{-1}\psi)^T) \\ &= \frac{a_1^2}{N} \text{tr}(W^{-1}\psi\psi^T(W^{-1})^T) \end{aligned} \quad (9)$$

#### 4. 마스크 행렬이 S-행렬인 HTS

S-행렬로 표현되는 마스크가 1번째 요소에서 비이상적인 특성을 보일 경우 즉, 1번째 요소의 마스크 값이 S-행렬의 1번째 요소값이 아닌 임의의  $c$ 라는 값을 가질 경우를 고려해보자. 먼저 마스크가 이상적이라 한다면 마스크 행렬  $W = S_N$ 으로 표현되고  $W^{-1} = S_N^{-1}$ 이 된다. 한편  $S_N^{-1}$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$S_N^{-1} = \frac{2}{N+1} [2S_N^T - J_N]$$

여기서  $J_N$ 은 모든 요소가 1인  $N \times N$  행렬이다. 하지만 1번째 요소가 불완전한 마스크는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{W} = W + \Gamma$$

이때 행렬  $W$ 는 S-행렬이고 행렬  $\Gamma$ 는 1번째 열을 제외하고는 모두 0으로 이루어진 행렬이다.

$\Gamma$ 의 요소  $\gamma_{ii}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= c - w_{ii} \quad i = 1, \dots, N \\ &= \psi_i \end{aligned}$$

여기서  $w_{ii}$ 은 S-행렬의 요소이므로 0 또는 1의 값을 가진다. 때문에 어떤 1에 대해서도  $\frac{N+1}{2}$ 개의  $c-1$ 값을 가지는  $\psi$  값이 존재하고 반면  $c$ 값을 가지는  $\frac{N-1}{2}$ 개의  $\psi$ 가 존재하게 된다. 따라서  $S_N^{-1}\psi$ 는  $\frac{2}{N+1} [c - \frac{N+1}{2}]$

의 값을 갖는 한개의 요소와  $\frac{2c}{N+1}$ 의 값을 갖는 N-1개의 요소로 이루어진다. 그러므로 식 (9)는 다음과 같이 된다.

$$\epsilon_x = \frac{4a_1^2}{N(N+1)^2} [Nc^2 - (N+1)c + \frac{(N+1)^2}{4}] \quad (10)$$

식 (10)의 최소값은  $c = \frac{N+1}{2N}$  일 때 이루어지고 그 값은

$$\epsilon_{x, \min} = a_1^2 \frac{(N-1)}{N^2} \text{과 같다.}$$

N값이 매우 클 경우 최소값  $\epsilon_{x, \min}$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\epsilon_{x, \min} = \frac{a_1^2}{N} \quad (11)$$

c=0의 값을 가질 때

$$\epsilon_x = \frac{a_1^2}{N} \quad (12)$$

c=1의 값을 가질 때

$$\epsilon_x = \frac{a_1^2}{N(N+1)^2} [(N+1)^2 - 4] \quad (13)$$

N값이 매우 클 경우 식 (13)은 다음과 같이 된다.

$$\epsilon_x = \frac{a_1^2}{N} \quad (14)$$

식 (11), (12), (14)로 부터 마스크의 비이상적 특성으로 인한 오차의 MSE는 다음과 같이 추정될 수 있다.

$$\hat{\epsilon}_x = \frac{a_1^2}{N}$$

$\epsilon_{\det}$ 는 검파기 오차에 의한 AMSE이므로 식 (5)와 같다.

$$\epsilon_{\det} = \frac{4N\sigma^2}{(N+1)^2}$$

따라서 검파기에 의한 오차와 비이상적인 마스크에 의한 오차를 합한 전체 오차의 AMSE는 다음과 같다.

$$\epsilon \cong \epsilon_{\det} + \hat{\epsilon}_x$$

$$\cong \frac{4N}{(N+1)^2} \sigma^2 + \frac{a_1^2}{N}$$

$$\epsilon \cong \frac{1}{N} [4\sigma^2 + a_1^2] \quad (15)$$

Multiplexing을 하지 않은 스펙트로미터의 AMSE는 식 (4)와 같고 비이상적인 마스크를 가진 스펙트로미터로 multiplexing을 적용할 경우의 AMSE는 식 (15)와 같다. 즉, 식 (6)에 의해 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\text{SNR}_{\text{비이상적 마스크 with multiplexing}}}{\text{SNR}_{\text{without multiplexing}}} \cong \left[ \frac{N}{4 + \left(\frac{a_1^2}{\sigma^2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

식 (15)와 식 (16)으로부터 마스크의 결합에 따른 영향은 그 결합이 있는 요소에 투과되는 빛의 에너지에 달려 있다는 것을 알 수 있다. 결합이 있는 요소에서 에너지가 최대값을 가진다면 AMSE는 매우 커진다는 것을 알 수 있다.

## 5. 보정방법(The method of compensation)

결합이 있는 비이상적인 마스크로 인한 오차의 증가를 다소 감소시키는 방법에 대해 알아보자. 마스크의 결합 부위를 해소한 측정벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta' = \tilde{\eta} - a_1 \psi$$

식 (7)로 부터

$$\eta' = Wa + e$$

임을 알 수 있다. 이것은 마스크가 이상적일 때의 측정벡터와 동일하다. 결합이 있는 1번째 마스크요소의 transmittance가 결정되면  $\tilde{\eta}$ 와  $\psi$ 의 값을 알 수 있게 된다. 하지만  $\eta'$ 의 값을 구하기 위해서는  $a_1$ (결합이 있는 요소에 투과되는 빛의 에너지)의 값을 알아야 한다. HTS의 경우에는 마스크의 행렬이 S-행렬로 표현되기 때문에 c값을 알 경우  $a_1$ 의 값을 추정할 수 있다. 오차항을 고려치 않을 경우 측정벡터는 다음과 같다.

$$\tilde{\eta} \cong \tilde{S}_N a \quad (17)$$

여기서  $\tilde{S}_N$ 는 1번째 열의 값이 c로 대체된  $S_N$ 행렬을 나타낸다. 식 (17)은 N개의 미지수를 가진 N개의 식으로 표현되므로  $a_1$ 의 값을 추정할 수 있다.

N개의 요소를 가지는 벡터  $\lambda$ 를 설정한다.

$$\lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N]^T$$

$$\lambda_i = \begin{cases} -1 & \text{if } s_{ii} = 0 \\ 1 & \text{if } s_{ii} = 1 \end{cases}$$

여기서  $s_{ii}$ 은  $S_N$ 행렬의 i번째 요소를 나타낸다.

식 (17)의 양변의 앞에  $\lambda^T$ 를 곱해주면 다음과 같이  $a_1$ 의 값을 추정할 수 있다.

$$\lambda^T \tilde{S}_N a \cong \lambda^T \tilde{\eta}$$

따라서

$$a_1 \cong \frac{1}{c} \lambda^T \tilde{\eta}$$

$a_1$ 의 값을 추정할 수 있기때문에  $\eta' = \tilde{\eta} - a_1 \psi$ 의 값을 얻을 수 있다. 즉, 보정된 측정벡터를 얻을 수 있다. 결론적으로 S-행렬을 마스크 행렬로 사용하는 HTS에서는 마스크가 비이상적인 특성 즉, 한 요소에 결합이 있을 경우라도 S-행렬의 특성을 이용하여 그 결합이 보정된 측정치를 구할 수 있는 장점이 있음을 알 수 있다.

## 6. 결론

HTS는 multiplexing 기법을 이용하여 스펙트로미터 출력값의 SNR을 향상시키는 효과를 가진다. HTS 마스크의 어떤 특정한 스펙트럼의 요소에 대응하는 셀(cell)에 결합이 있을 경우에는 multiplexing의 효과가 다소 떨어진다는 것을 알 수 있다. 이러한 경우에는 결합이 있는 마스크 셀을 통과하는 스펙트럼에서 에너지의 최고를 이룰 경우 그로 인한 SNR의 감소는 상당하다. 본 논문에서는 단순행렬의 특성과 간단한 수식적 변형을 통하여 이러한 결점을 보정할 수 있는 기법에 대해 기술하였다.

## 참고문헌

- [1] M. Harwit and N. J. A. Sloane, *Hadamard Transform Optics*, Academic Press, New York.
- [2] J. B. Park, T. W. Johnson, S. A. Dyer, B. K. Harms, and R. A. Dyer, "On the Mean-Square Error of Various Spectrum-Recovery Techniques in Hadamard Transform Spectrometry", *Applied Spectroscopy*, vol.44, no.2, pp.219-228, 1990.