

## 리플라스 변환과 유한요소법의 결합에 의한 1차원 과도 열전도 문제 해석

\*송 병 철\*, 정 해 덕\*\*, 이 기 식\*

\*단국대학교, \*\*목포대학교

### Analysis of One-Dimensional Transient Heat Conduction Problems using Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method

\*Byoung-Chul Song\*, Hae-Duk Jung\*\*, Ki-Sik Lee\*

\*Dept. of Electrical Eng. Dankook University, \*\*Mok-po National University

**Abstract** - In this paper, it is proposed that a algorithm which is applicable to the transient analysis by combined use of the Laplace transform and the finite element method. The proposed method removes the time terms using the Laplace transform and then solves the associated equation with the finite element method. The solution which is solved at frequency domain is transformed into time domain by use of the Laplace inversion. To verify proposed algorithm, heat conduction problem is analysed and found a good agreement with analytic solution.

#### 1. 서 론

제의 과도 현상을 나타내는 지배방정식에는 시간에 대한 미분항이 포함되어있다. 이러한 문제를 유한요소법을 적용하여 풀기 위해서 차분된 시간에서의 이산화된 근사해를 구하는 시간차분법이 이용된다[1].

시간차분법은 초기의 시간에서부터 순차적으로 근사해를 구해야 하며, 일반적으로 차분된 시간의 길이는 매우 짧다. 그러므로 매우 긴 시간에 대하여 해를 구해야 하는 경우 매우 많은 계산을 요구하며, 구한 해는 이산화된 근사해이기 때문에 차분된 시간 사이의 임의의 시간에서의 해를 알아보기 하는 경우에는 또 다른 과정을 거쳐야 하는 단점이 있다.

본 논문에서는 이러한 단점을 보완하기 위하여 지배방정식을 라플라스 변환을 이용하여 주파수 영역에 대한 함수로 표현한 다음 유한요소법을 적용하여 해를 구하고, 이렇게 주파수영역에서 구한 해를 라플라스 역변환을 통하여 시간영역에서의 온도분포를 구하는 방법을 제시하였다.

제안한 알고리즘의 타당성을 검증하기 위해 해석해가 존재하는 열전도문제에 대하여 제안한 방법의 결과와 해석해를 비교하였다.

#### 2. 해석 이론

##### 2.1 지배방정식

매질이 등방성인 경우, 1차원 과도 열전도 문제의 지배방정식은 다음과 같다[2].

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Q = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad t > 0 \quad (2.1)$$

여기서,  $k$ 는 열전도율,  $c$ 는 비열,  $\rho$ 는 밀도이며,  $Q$ 는 내부열원,  $\theta(x, t)$ 는 온도이다.

##### 2.2 라플라스 변환의 적용

식 (2.1)은 시간에 대한 함수인데 이것을 주파수에 대한 함수로 만들기 위하여 라플라스 변환을 적용한다.  $t < 0$  일 때,  $f(t) = 0$ 이고  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 인 함수에 대한 라플라스 변환과 역변환은 다음과 같이 정의된다.

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2.2)$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{v-j\infty}^{v+j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (2.3)$$

이 때,  $s = v + j\omega$ ,  $v \in \mathbb{R}$ 이며,  $v$ 는  $F(s)$ 의 특이점에서의 실수부분보다 크다면 어느 것이라도 상관없다.

식 (2.1)에 라플라스 변환을 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$k \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \tilde{Q} = \rho c(s\tilde{\theta} - \theta_0) \quad (2.4)$$

여기서,  $\theta_0$ 는 초기값이다.

##### 2.3 유한요소 정식화

해석대상을 유한요소로 분할하고 요소내의 온도분포가 선형적으로 변화한다면, 라플라스 변환한 요소

내의 온도분포는 다음과 같다.

$$\tilde{\theta}^e(x, t) = [N_{1e}(x), N_{2e}(x)] \{ \tilde{\theta}_e(t) \} \quad (2.5)$$

여기서,  $N_{1e}(x), N_{2e}(x)$ 는 형상함수로서 식 (2.6)과 같은 좌표함수로 정의된다.

$$N_{1e}(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}, \quad N_{2e}(x) = \frac{-x_i + x}{x_j - x_i} \quad (2.6)$$

여기서,  $x_i, x_j$ 는 요소에서 두 절점의  $x$ 좌표이다.

지배방정식에 라플라스 변환을 적용하여 얻은 식 (2.4)에 대하여 형상함수를 가중함수로 하는 Galerkin법을 적용하면 가중잔차  $R$ 은 다음과 같다.

$$R = \int_{\Omega'} [N] \left\{ k \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \tilde{Q} \right\} d\Omega - \int_{\Omega'} [N] \{ \rho c(s\tilde{\theta} - \theta_0) \} d\Omega \quad (2.7)$$

여기서,  $[N]$ 은  $[N_{1e}, N_{2e}]$ 이다.

부분적분의 공식을 이용하여 식 (2.7)의 2계 편미분항을 변형한다.

$$\int_{\Omega'} k[N] \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{\Omega'} k \frac{\partial[N]}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} k[N] \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n} d\Gamma \quad (2.8)$$

여기서  $n$ 은 경계상에서의 외향법선이고  $\Gamma$ 는 요소의 경계이다.

식 (2.8)에 식 (2.1) 및 Fourier의 전도법칙을 대입하면, 식 (2.7)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R = - \int_{\Omega'} k \frac{\partial[N]}{\partial x} \frac{\partial[N]^T}{\partial x} d\Omega \cdot \{ \tilde{\theta}_e(t) \} - \int_{\Gamma} \tilde{q}[N] d\Gamma + \int_{\Omega'} \tilde{Q}[N] d\Omega - \int_{\Omega'} \rho c s[N][N]^T d\Omega + \int_{\Omega'} \rho c s[N] d\Omega \quad (2.9)$$

이 가중잔차를 '0'으로 하는 해를 구하면 지배방정식에 대한 근사해를 얻을 수 있다.

따라서 1차원 과도 열전도 문제에 대한 요소행렬은 다음과 같이된다.

$$[K^{(e)}] \{ \tilde{\theta}_e \} = \{ f^{(e)} \} \quad (2.10)$$

여기서  $[K^{(e)}]$ 와  $\{ f^{(e)} \}$ 는 각각 다음과 같다.

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega'} k \frac{\partial[N]}{\partial x} \frac{\partial[N]^T}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega'} \rho c s[N][N]^T d\Omega \quad (2.11)$$

$$\{ f^{(e)} \} = \int_{\Omega'} \tilde{Q}[N] d\Omega + \int_{\Omega'} \rho c s[N] d\Omega - \int_{\Gamma} \tilde{q}[N] d\Gamma \quad (2.12)$$

식 (2.10)을 모든 요소에 대하여 조립하면, 해석대상의 계행렬을 얻을 수 있지만 식 (2.12)의 우변 제2항은 인접하는 요소의 경계에서 서로 상쇄되어, 해석대상의 외부경계를 갖는 요소로부터의 기여부분만 남는다. 따라서 계행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$[K] \{ \tilde{\theta} \} = \{ f \} \quad (2.13)$$

이 때,  $[K]$ 와  $\{ \tilde{\theta} \}$ , 그리고  $\{ f \}$ 는 다음과 같다.

$$[K] = \sum_{e=1}^{ne} [K^{(e)}], \quad \{ \tilde{\theta} \} = \sum_{e=1}^{ne} \{ \tilde{\theta}_e \}, \quad \{ f \} = \sum_{e=1}^{ne} \{ f^{(e)} \}$$

여기서,  $ne$ 는 전체 요소의 수이다.

식 (2.13)를 풀면 주파수 영역에서의 온도분포  $\tilde{\theta}$ 를 얻을 수 있다. 여기에 라플라스 역변환을 적용하면 시간영역에서의 온도분포  $\theta$ 를 구할 수 있다.

## 2.4 라플라스 역변환

라플라스 역변환의 형태는 삼각함수의 적분형태로 다음과 같이 표현할 수 있다[3].

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt \quad (2.14)$$

$$F(s) = \operatorname{Re}\{F(v+j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{F(v+j\omega)\} \quad (2.14a)$$

식 (2.14)를 식 (2.3)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Re}\{F(s)\}) \cos(\omega t) - \operatorname{Im}\{F(s)\} \sin(\omega t) d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Im}\{F(s)\}) \cos(\omega t) + \operatorname{Re}\{F(s)\} \sin(\omega t) d\omega \right] \quad (2.15)$$

식 (2.14)와 식 (2.14a)를 식 (2.15)에 대입하면 다음과 같다.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\tau t} f(\tau) \cos(\omega(\tau-t)) d\tau d\omega - j \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\tau t} f(\tau) \sin(\omega(\tau-t)) d\tau d\omega \right] \quad (2.16)$$

$\sin(\omega(\tau-t))$ 는  $\omega$ 에 대하여 기함수이므로 식 (2.17)에서 우변의 두 번째 적분항은 항상 '0'이다. 따라서 식 (2.16)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\tau t} f(\tau) \cos(\omega(\tau-t)) d\tau d\omega \right] \quad (2.17)$$

이 식은 식 (2.18)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$f(t) = \frac{e^{it}}{\pi} \left[ \int_0^\infty (\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos(\omega t) - \operatorname{Im}\{F(s)\} \sin(\omega t)) d\omega \right] \quad (2.18)$$

식 (2.18)에서 식 (2.13)식을 풀어서 얻은  $\theta$ 를  $F(s)$ 에 대입한 후  $\omega$ 에 대하여 적분을 하면 시간 영역에서의 온도분포  $\theta$ 를 얻을 수 있다.

### 3. 사례 연구

본 장에서는 위에서 제시한 방법을 열전달 문제에 적용하여 보았다.

#### 3.1 해석 모델

중심에  $q_s = 1$ 인 heat-point source를 포함하고 있는 평판을 고려한다. 평판의 초기온도는  $0^{\circ}\text{F}$ 이고, 평판의 양 끝점에서는 시간에 관계없이 항상  $0^{\circ}\text{F}$ 를 유지한다. 문제를 간단히 하기 위하여  $\rho c = 1 \text{ Btu}/(\text{m}^3 \text{ }^{\circ}\text{F})$ ,  $k = 1 \text{ Btu}/(\text{hr m }^{\circ}\text{F})$ ,  $L = 1 \text{ m}$ , 라고 가정하였다.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \delta(x-0.5) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0 \quad (3.1)$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad \theta(1, t) = 0, \quad \theta(x, 0) = 0$$

#### 3.2 결과

그림 1은 9번 절점에서 시간이  $0.06\text{hr}$ 일 때, 식 (2.19)의 피적분함수를 나타낸 것이다. 그림 2는 제안한 방법으로 구한 해석모델의 시간에 따른 온도분포이다.

그림 3은 각 절점에서 최대온도에 대한 해석해와 온도분포  $\theta$ 의 차를 백분율로 나타낸 것이다.

본 논문에서 제안된 방법으로 구한 온도분포  $\theta$ 는 해석해와 잘 일치함을 알 수 있다.

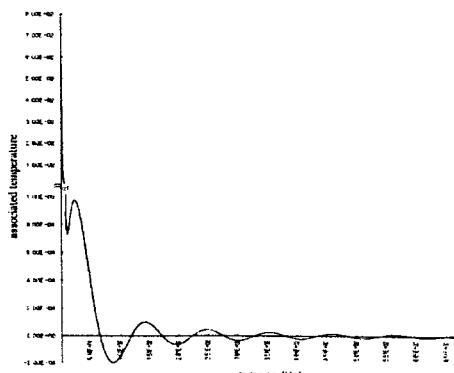


그림 1. 절점 9, 시간  $0.06\text{hr}$ 일 때 피적분함수

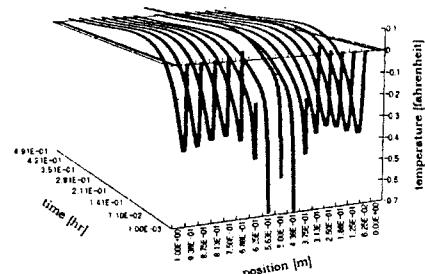


그림 2. 각 절점에서 시간에 따른 온도분포

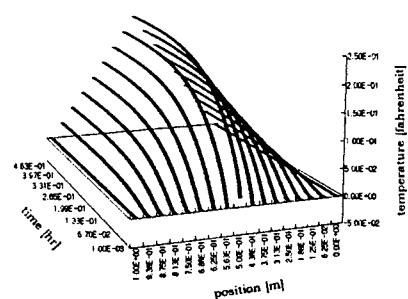


그림 3. 각 절점의 최대값에 대한 오차율

### 4. 결 론

본 논문에서는 시간항이 들어있는 지배방정식으로 표현되는 현상을 유한요소법을 이용하여 해석할 수 있는 방법을 제시하였다. 해석해를 구하기 용이한 열전달문제에 제시한 방법을 적용하여 해석하여 보았다.

과도상태의 초기부분에서 오차가 상대적으로 크게 나타나지만 전체적으로 해석해와 잘 일치함을 알 수 있었다. 라플라스 변환된 지배방정식에 대하여 유한요소법을 적용하였고 역변환 시에는 가우스 구적법을 이용하여 적분을 수행하였다.

제안된 방법은 비선형 문제에는 적용될 수 없는 단점이 있지만 긴 시간에 대하여 해석할 때 계산량이 적으므로 여러 가지 현상의 과도상태를 해석하는데 유용하게 적용될 수 있을 것으로 사료된다.

### 참 고 문 헌

- [1] David S. Burnett, "Finite element analysis", Addison-Wesley 1988.
- [2] 洪俊杓 "열전도 · 확산의 수치해석" 半島出版社 1991.
- [3] Mary L. Boas, 강주상譯 "수리 물리학", 圖書出版 漢東, 1992.