Wavelet-Galerkin 방법을 이용한 전자기장 문제의 수치 해석

조 정 균, 임 성 기, 정 현 교
서울대학교 전기공학부 전기역학연구실

Numerical Analysis in Electromagnetic Problem Using Wavelet-Galerkin Method

Jung-Kyun Cho, Sung-Ki Lim, Hyun-Kyo Jung
School of Electrical Engineering, Seoul National University

Abstract - 편미분 방정식의 형태로 나타나는 많은 전자기장 문제들을 유한요소법이나 유한차분법 등의 수치해석적 방법으로 해결하려는 경우 시스템 행렬을 구성하게 된다. 이때 해석영역의 요소수가 많을수록 행렬의 조건수(condition number)는 다항식(polynomial) 증가를 갖게 되며, 이는 풀어야 할 선형시스템에서 반복 연산 과정의 속도를 떨어뜨리는 결과를 야기한다. 이러한 결점은 wavelet을 기저 함수로 쓰게 되면, 더 높은 분해능(resolution)의 해를 유한 요소법이나 유한 차분법에서와 같은 요소 분할 과정이 없이 Mallat 변환이라는 간단한 과정을 통해 구할 수 있으며, 본 논문에서는 Daubechies의 wavelet 함수를 기저 함수로 사용하여 전자기장 문제에 적용함으로서 수치해석에 있어서 wavelet 함수의 적용이 많은 장점을 갖고 있음을 보인다.

1. 서 론

wavelet 이론은 수학 분야에서 상당히 최근에 연구되어지고 있는 주제이다. wavelet 변환은 효율적으로 주파수 성분을 추출해 낼 수 있고, 또한 시간 기록(time history)에 관한 위치 정보를 가지고 있기 때문에 현재 신호 해석 분야에서 매우 폭 넓게 사용되어 지고 있다. 또한, 좁은 유한구간에서 존재하는(compactly support) 정규직교하는(orthonomal) 기저함수들로 구성되어 졌다는 점이나[1] FWT (Fast Wavelet Transform) 알고리즘을 이용한 다중분해능(muntiresolution) 해석등[3,4]과 같은 wavelet 변환의 장점 때문에 wavelet을 기반으로하는 상미분 및 편미분 방정식의 근사적 해석 역시 최근 몇 년 사이에 연구가 시작되어졌다.

여기에서 가장 많이 사용되는 방법이 wavelet-Galerkin 방법이다.[5,6] 이 방법은 wavelet 함수가 갖는 직교성(orthogonality)과 compact support 특성 때문에 특히 비선형 미분 연산자가 사용되어진 곳에 매우 효과적이다. 용도에 따라 각기 다른 특성을 갖는 wavelet을 기저함수로 사용할 수 있지만, 본 논문에서는 완전한 직교성과 compact support한 특성을 갖는 Daubechies wavelet을 기저함수로 하여 유한개의 급수로 전개하여 근사해를 구하고 실제 근과 비교하여 정확성을 보임으로서 전자기장 문제에서 wavelet 이론의 적용가능성을 보인다.

2. 본 론

2.1 Wavelet 기저 함수의 생성

여러 가지 상황에 따라 다르게 사용되는 많은 종류의 wavelet 함수의 complete coordinate function들이 있지만, 본 연구에서는 Daubechies wavelet과 그 특성만을 사용하였다.

$\phi(x)$를 (1)의 식으로 나타내어 진다고 하면,

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \phi(2x-k) \quad \text{.....(1)}$$

이때의 $\phi(x)$를 scaling 함수라고 하며, 또한 (2)식의 해를 $\psi(x)$라고 하면,

$$\psi(x) = \sum_{k=-N}^{1} (-1)^k a_{1-k} \phi(2x-k) \quad \text{.....(2)}$$

이때의 $\psi(x)$를 wavelet 함수라고 한다. 여기에서 N은 양의 짝수이며 a_k는 다음과 같은 조건들을 만족시키는 계수들의 집합이다.

먼저, scaling 함수의 정규화(normalization)를 위해 $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1$ 를 만족시켜야 하므로,

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k = 2 \quad \text{.....(3)}$$

가 된다. 또한 $\phi(x)$의 translation들이 orthonomal 집합이 되기 위해서, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-k)\phi(x-m)\,dx = \delta_{k,m}$ 를 만족시켜야 하므로,

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k a_{k-2m} = \delta_{0,m} \quad \text{.....(4)}$$

이 된다. 이때 δ는 Kronecker delta 함수이다.

또, 다른 하나의 조건은 scaling 함수들이 N/2 보

다 작은 차수의 다항식은 정확히 나타낼 수 있어야 한다는 것으로, 즉 wavelet 함수들의 모멘트가 0이 된다는 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x)\,dx = 0 \quad , \quad m=0,1,\ldots,(N/2)-1 \quad \ldots\ldots(5)$$

이것으로부터 (6)식이 된다.

$$\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k k^m a_k = 0 \ , \quad m=0,1,\ldots,(N/2)-1 \quad \ldots(6)$$

이 (3),(4),(6) 조건을 만족하는 계수들을 사용하여 scaling 함수 $\phi(2^j x-k)$, 혹은 wavelet 함수 $\psi(2^j x-k)$로 구성되는 함수들은 직교하고 완전한 기저함수를 형성한다. 이 함수들 사이의 관계는,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad \ldots\ldots(7)$$

이며, 이때 V_j, W_j 는

$$V_j \ni V_j = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j - k),$$

$$W_j \ni W_j = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j - k) \quad \ldots\ldots(8)$$

이 되고, k는 정수이고, j는 확장(dilation)변수라고 하는 스케일 인자이고 임의의 미분 방정식 근사에서는 근사 레벨이라고도 한다.

특정값 j와 N에 대해, scaling 함수 $\phi(2^j - k)$의 support구간은 다음과 같다.

$$\mathrm{supp}\,(\phi(2^j x - k)) = [\frac{k}{2^j} \ , \ \frac{N+k-1}{2^j}] \quad \ldots\ldots(9)$$

아래 그림들은 N=4 일때와 N=6 일때의 Daubechies의 scaling 함수와 wavelet 함수를 나타내고 있다.

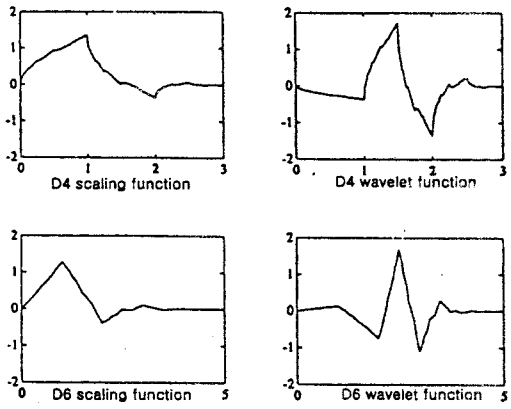

그림 1 Daubechies wavelet 함수

scaling 함수는 complete coordinate 기저함수를 만들 수 있고, 그것은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x) = \sum_k 2^{\frac{j}{2}} c_k \phi(2^j x - k) \quad \ldots\ldots(10)$$

이러한, wavelet을 기저함수로한 전개(expansion)는 두가지 수렴 특성을 나타낸다. 하나는 단위 스케일 j에 대한 균일 수렴(uniform convergence)이고, 또 하나는 변수 N에 관련하여 시스템 행렬 계산에 있어서의 빠른 수렴특성이다. j와 N이 크면 더 높은 정확도를 갖게 되고, 그에 비해 조건수가 크게 증가하지는 않으므로 빠른 수렴 속도를 유지하게 된다. 반면 시스템 방정식이 커지게 되므로 적절한 값을 선택해야만 한다.

2.2 Wavelet - Galerkin 방법과 전자기장 문제에의 적용

많은 전자기장 문제에서 흔히 나오는 다음과 같은 경계치 문제에 대해, 가중잔차법과 Wavelet -Galerkin 방법을 이용하여 근사 해를 구할 수 있다.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)\frac{du}{dx} + b(x)u = \rho(x) \ , \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u_0 \ , \ u(1) = u_1 \quad \ldots\ldots(11)$$

먼저, 이 문제에서 분해능(resolution) 레벨을 n으로 했을때의 근사해를 $\overline{u(x)}$ 라고 하면,

$$\overline{u(x)} = A_n u(x) = \sum_k a_{n,k}\phi_{n,k}(x) \quad \ldots\ldots(12)$$

$$\phi_{n,k}(x) = 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n x - k) \quad \ldots\ldots(13)$$

이고, 가중잔차법과 Wavelet-Galerkin 방법에 의해

$$\int_0^1 \phi_{n,j}[\frac{d^2 A_n u}{dx^2} + a(x)\frac{dA_n u}{dx} + b(x)A_n u - \rho(x)]\,dx = 0 \quad \ldots\ldots(14)$$

가 되며 Gauss-Green 정리를 적용하면,

$$\int_0^1 [-\phi'_{n,j}\phi'_{n,k} + a(x)\phi_{n,j}\phi'_{n,k} + b(x)\phi_{n,j}\phi_{n,k}]dx + \phi_{n,j}\phi'_{n,k}\,|_0^1 = \int_0^1 \rho(x)\phi_{n,j}(x)\,dx \quad \ldots\ldots(15)$$

이 되고, 이것을 부분별로 적분하면

$$Ka_n = f \quad \ldots\ldots(16)$$

와 같은 선형 시스템 방정식을 얻을 수 있다. 여기서 a_n은 계수 벡터이고 행렬 **K,f**는 **K**={ $K_{j,k}$},벡터 **f**={ f_j}로 정의하고 (17), (18)식과 같다.

$$K_{j,k} = \int_0^1 [-\phi'_{n,j}\phi'_{n,k} + a(x)\phi_{n,j}\phi'_{n,k} + b(x)\phi_{n,j}\phi_{n,k}]dx + \phi_{n,j}(x)\phi'_{n,k(x)}\,|_0^1 \quad \ldots\ldots(17)$$

$$f_j = \int_0^1 \rho(x)\phi_{n,j}(x)\,dx \ , 3-2N \le j,k \le 2^n - 2 \quad \ldots\ldots(18)$$

여기에 경계조건을 대입하면 아래와 같이 { $a_{n,k}$} 에 관한 두 개의 방정식을 얻을 수 있다.

$$K_{2-2N,k} = \phi_{n,k}(x) \ , \quad f_{2-2N} = u_0 \quad \ldots\ldots(19)$$

$$K_{2^n-1,k} = \phi_{n,k}(1) \ , \quad f_{2^n-1} = u_1 \quad \ldots\ldots(20)$$

이 경계치 조건으로 얻은 방정식과 위의 시스템 방정식을 합치면 ($2^n + 2N - 2$)개의 조건식을 얻을 수 있으므로 주어진 경계치 문제의 근사해 $\overline{u(x)}$를 구할 수 있다.

2.3 시뮬레이션 및 결과

Daubechies wavelet에서 N=4로 한 D4 함수를 기저함수로 사용하고 스케일 레벨을 n=7로 하고, 위의 경계 조건을 $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ 로 놓고, $a(x) = b(x) = 0$ 으로 하고 $\rho(x) = 0$ 혹은 -1 인 두가지 경우에 정전장 문제의 근사해를 구한 뒤 정확한 해와 비교하여 보았다. 아래 그림 2의 (a)가 $\rho(x) = 0$ 일때의 근사해와 해석적 해를 나타낸 것이고 (b)는 오차를 나타낸 것이다. 마찬가지로 그림 3의 (a),(b)는 $\rho(x) = -1$ 일때의 해와 오차를 나타낸 것이다. 두가지 경우가 모두 실제 해와 거의 일치함을 알 수 있다.

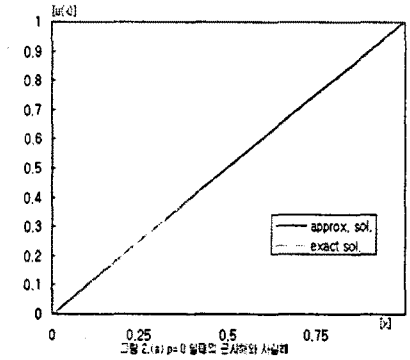

그림 2.(a) ρ= 0 일때의 근사해와 사실해

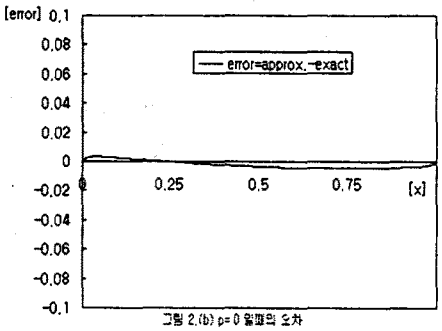

그림 2.(b) ρ= 0 일때의 오차

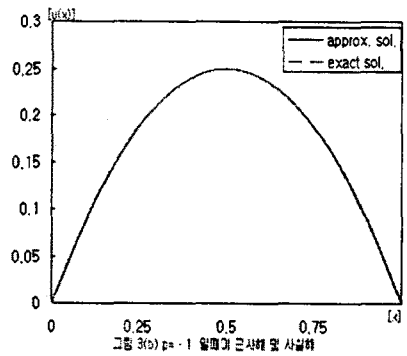

그림 3(b) ρ= - 1 일때의 근사해 및 사실해

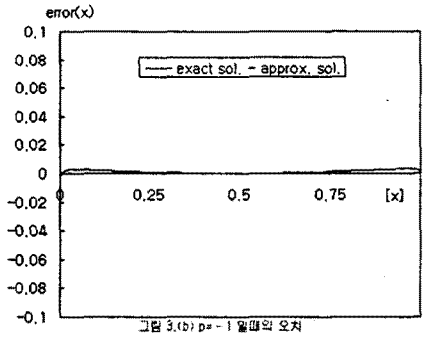

그림 3.(b) ρ= - 1 일때의 오차

3. 결 론

본 논문에서는 전자기장 문제에서 자주 나오는 상미분 및 편미분 방정식에 Wavelet-Galerkin 방법을 적용함으로서 이 분야에서 wavelet 이론이 효과적으로 적용 가능함을 보였다.

이와 같은 방식으로 더 복잡한 방정식을 갖는 문제에의 적용도 할 수 있고, 여기에서도 wavelet 기저함수의 가장 큰 장점들인 FWT(Fast Wavelet Galerkin) 알고리즘과 wavelet 함수의 compact support 및 직교성을 이용하면 수치해석에서 wavelet을 적용하는 것은 유한 요소법이나 유한 차분법보다 훨씬 적은 계산, 즉 빠른 계산 속도를 가질 수 있다는 장점외에 많은 효용이 있을 것이며, 이에 대한 연구가 계속 진행될 것이다.

[참 고 문 헌]

[1] Daubechies, I., "Orthonomal bases of compactly supported wavelets", *Commun. Pure Appl. Math.*, Vol. 41, p.909, 1988.

[2] Qian, s.. , "Wavelets and numerical solution of partial differential equations", *J. Compu. Phy.*, Vol. 106, p.155, 1993.

[3] Jawerth, B. ,"Wavelet multiresolution analyses adapted for the fast solution of boundary value ordinary differential equations", Proc, 6th Cop. Mount. Multi. Conf., April 1993.

[4] Berlkin, G, Coifman, R., and Rokhlin, V., "Fast wavelet transform and numerical algorithm I", Comm. Pure. Appl. Math., Vol. 41, 141-183, 1991.

[5] Amaratunga, K. and Williams, J. R., "Wavelet -Galerkin solutions for one-dimensional partial differential equations", *Inter. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 37, p.2703, 1994.

[6] Xu, J. C., "Galerkin-wavelet methods for two point boundary value problem", Numer. Math., Vol. 63, 123-144, 1992.