정상상태에서의 비정현적 입력전압의 주파수 민감도 해석

최 명 준[U], 이 세 희, 김 창 현, 박 일 한
숭실대학교 전기공학과

Frequency Sensitivity Analysis of Nonsinusoidal Input Voltage in Steady State

Myung-jun Choi[U], Se-hee Lee, Chang-hyun Kim, and Il-han Park
Dept. of Electrical Eng, Soongsil Univ.

Abstract- A number of electromagnetic devices periodically driven by solid-state switches have been analyzed with time-stepping finite element method, which requires much time to reach a steady state. The sensitivity analysis which have been used for the shape design is employed for an efficient calculation of linear magnetodynamics with nonsinusoidal driving sources. The high-order frequency sensitivity from the harmonic finite element formulation is used along with Fourier transform and Taylor series expansion. The algorithm is validated through a numerical example of a single-phase transformer driven by a trapezoidal voltage source.

1. 서 론

전자계 시스템에 대한 대부분의 민감도 해석은 기하학적 설계변수를 사용하여 형상설계 문제에 적용해왔다[1],[2],[3]. 그러나 본 논문에서는 민감도 해석방법을 주기적이지만 시간에 따라 비정현적으로 변하는 입력전원을 사용한 선형 시변자장의 효율적인 계산 알고리즘에 적용한다. 이 계산 알고리즘은 고조파 유한요소 과정으로부터 푸리에 변환, 테일러 급수전개, 그리고 고차 주파수 민감도 정보를 필요로 한다[4]. 현재 사용되고 있는 대부분의 전자기기 장치들은 고체상태의 스위칭 소자들과 연결되어있으므로 주기적이고 정현적인 입력전원들은 이런 스위칭 소자를 통과함에 따라 주기적이지만 비정현적인 입력전원으로 변화하게 된다. 이런 시스템은 시변자장의 영향을 받기 때문에, 기존의 해석방법들은 주로 시간차분 유한요소 해석방법을 사용해 왔다. 그러나 스위칭 소자를 통과한 입력전류나 전압은 비정현적이기 때문에, 시간차분 유한요소 해석법은 주기적인 정상상태에 도달하기까지 상당한 계산시간을 필요로 한다. 따라서 본 논문에서는 선형 시변자장 문제의 비정현적인 정상상태 해석에 대한 쉽고 빠른 계산 알고리즘의 새로운 방법을 제안한다. 이 알고리즘의 주요한 방법은 다음과 같이 설명된다.

비정현적인 입력을 푸리에 변환을 사용하여 정현적인 항으로 전개한 후, 각 항을 고조파 유한요소 해석방법의 전원으로 사용하여 각기 구해진 결과들을 중첩하므로써 비정현적인 정상상태 해석결과를 얻을 수 있다. 그렇지만 위의 과정은 고조파의 수만큼 많은 양의 행렬 계산을 필요로 한다. 그러므로 서로 다른 주파수에 대한 결과를 계산하기 위해 직접적인 유한요소 해석을 하는 대신, 주파수에 대한 미지 변수의 변화율인 민감도 정보를 구한 후, 이 민감도 정보를 테일러 급수전개에 적용하면 다른 주파수에 대한 결과값을 계산한다. 위와 같은 계산에서 구해진 결과들을 중첩하므로써 비정현적인 입력전원에 대한 정상상태의 결과를 구할 수 있다. 위의 해석 알고리즘의 타당성을 검증하기 위하여 10KVA 단상 변압기에 적용하였다.

2. 고조파 유한요소 해석방법과 주파수 민감도

고조파 유한요소 해석방법을 유도하기 위해서는 미지의 상태변수에 대한 고차 민감도 정보를 구해야 한다. 시변자장 시스템에 대한 미지 복소변수를 가진 고조파 유한요소 해석의 시스템 행렬식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K\,X = Q \tag{1}$$

여기서, K는 기하학적인 정보, 물질의 특성, 전원의 주파수 등이 결합된 시스템 행렬이고, X는 미지의 상태변수 벡터이고, Q는 구동벡터이다.
주파수에 대한 상태변수의 변화 정보를 알기 위해 시스템 행렬로부터 주파수 항을 분리할 필요가 있다. 고조파 유한요소 해석방법에 있어서 시스템 행

렬은 다음과 같이 두 행렬로 나뉘어질 수 있다. 즉,

$$K = S + \omega T \qquad (2)$$

여기서, S는 투자율과 관계되는 항이고, T는 도전율과 관계되는 항이다. 그리고 ω는 구동전원의 각속도이다.
상태변수의 1차 민감도식을 유도하기 위해 식(1)을 ω로 미분하면 다음과 같이 표현된다.

$$K\frac{dX}{d\omega} = \frac{\partial}{\partial\omega}(Q - K\tilde{X}) = -T\tilde{X} \qquad (3)$$

여기서, $\tilde{X}$는 식(1)의 해이다.
그리고 2차 민감도식은 식(3)을 미분하므로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$K\frac{d^2X}{d\omega^2} = \frac{\partial}{\partial\omega}(-T\tilde{X} - K\frac{d\tilde{X}}{d\omega}) = -T\frac{d\tilde{X}}{d\omega} \qquad (4)$$

여기서, $\frac{d\tilde{X}}{d\omega}$은 $X=\tilde{X}$ 일 때 $\frac{dX}{d\omega}$ 의 값이다.
위의 미분과정을 되풀이하면, n차의 민감도식은 다음과 같은 식으로 정의할 수 있다.

$$K\frac{d^nX}{d\omega^n} = -T\frac{d^{n-1}\tilde{X}}{d\omega^{n-1}} \qquad (5)$$

위의 식들에서 보는 것처럼 i차수의 민감도식은 같은 시스템 행렬 K와 $(i-1)$차의 민감도식을 통해 얻은 다른 구동 항들을 이용하여 계산된다. 다시 말하면, 높은 차수의 민감도는 순차적으로 낮은 차수의 민감도를 통해서 계산되며 시스템 행렬은 변화하지 않기 때문에, 1차 민감도를 구하기 위한 시스템 행렬의 LU분해는 더 높은 차수의 민감도를 계산하기 위한 LU분해와 동일해 진다. 위와 같이 n차에 대한 민감도 정보를 구하는 것은, 주파수 변화에 따른 상태변수의 변화를 테일러 급수전개에 적용하므로써, 다른 주파수에서의 상태변수값을 구하기 위해서이다. 위에서 구한 각 차수의 민감도식을 사용하여, 다른 주파수에서의 상태변수값을 구하기 위해 테일러 급수전개에 적용한 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X(\omega+\Delta\omega) \simeq \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{d^kX(\omega)}{d\omega^k}(\Delta\omega)^k \qquad (6)$$

3. 수치적인 예

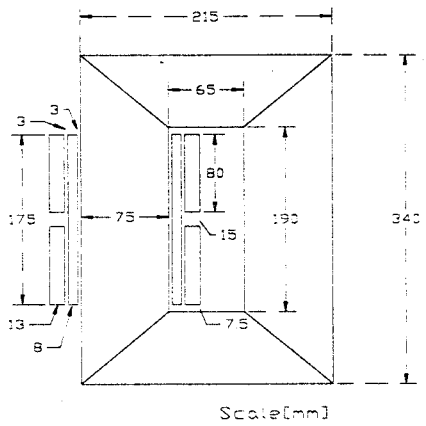


그림 1. 해석 모델(10KVA 단상변압기)

위와 같은 주파수 민감도 해석방법 알고리즘의 타당성을 검증하기 위하여 그림 1과 같은 10kVA의 단상변압기에 적용하여 보았다. 변압기 1차측 코일에 그림 2와 같은 사다리꼴의 입력 전원전압을 인가하고, 2차측 코일의 단자에는 저항 부하가 연결되어 있다. 유한요소 해석은 전압전원 정식화를 사용하고, 정식화에 사용되는 미지의 상태변수들은 자기벡터포텐셜과 1차, 2차측의 코일 전류들이다. 해석에 사용된 그림 2와 같은 사다리꼴의 입력전압을 푸리에 변환을 하면 다음과 같이 표현된다.

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega_0 t$$
$$B_n = \frac{-403200}{(2n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{-n\pi}{8} \qquad (7)$$

여기서, ω_0에 대한 기본주파수는 60Hz이다.
처음 계산에서는 기본주파수 60Hz에 대한 미지변수값인 자기벡터포텐셜과 1차, 2차 전류가 계산되어 진다. 다른 주파수에 대한 자기벡터포텐셜과 1차, 2차의 출력전류들은 식(5)을 사용하여 구한 고차 민감도 정보을 테일러 급수전개식인 식(6)에 대입하므로써 구하여 진다. 본 논문에서는 사다리꼴의 입력전압을 27번째까지 푸리에 변환을 하였으며, 5차까지의 고차 민감도 정보를 사용하여 테일러 급수전개에 적용하였다. 상술한 고조파 주파수 민감도 해석방법에 의해 구해진 1차, 2차의 출력전류는 알고리즘의 타당성을 검증하기 위해서 그림 3과 4에 시간차분 유한요소 해석에 의해 얻어진 전류와 비교하였다. 두 방법으로 구해진 1차 전류의 비교는 그림 3의 (a)와 (b)에 보여지고, 두 결과는 거의 같은 것처럼 보인다. 각각에서 구한 전류

값의 차이는 1.6%이내 이다. 2차 전류에 대한 비교는 그림 4의 (a)와 (b)에 보여지고, 2차 전류는 자화전류의 영향을 적게 받기 때문에 1차 전류보다도 더욱 잘 일치된다는 것을 알 수 있다.

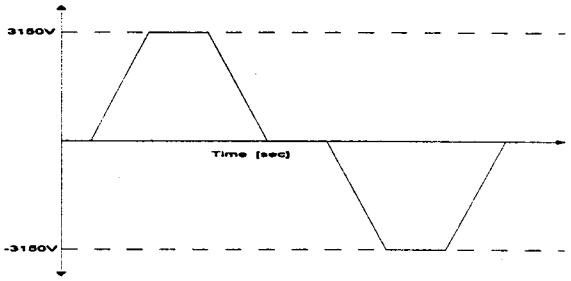
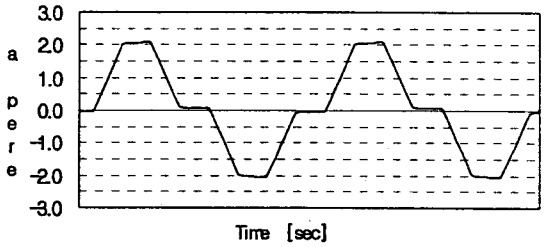
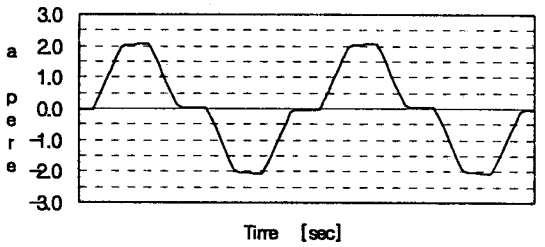


그림 2. 사다리꼴의 입력전압

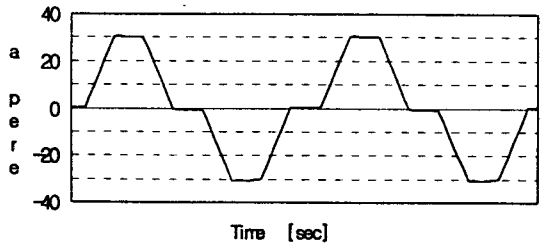


(a) 시간차분 유한요소 해석방법

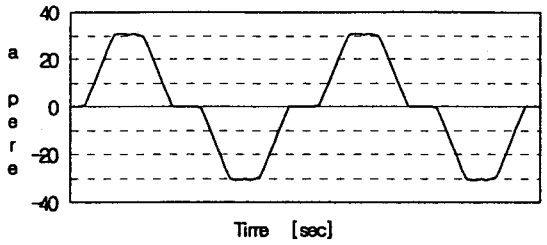


(b) 주파수 민감도 해석방법

그림 3. 1차 전류



(a) 시간차분 유한요소 해석방법



(b) 주파수 민감도 해석방법

그림 4. 2차 전류

4. 결 론

이상과 같이 정상상태에서의 비정현적인 입력전압에 대한 주파수 민감도 해석방법의 결과는 시간차분 유한요소 해석방법의 결과와 잘 일치한다는 것을 알 수 있다. 그리고 이 해석방법은 시간차분 유한요소 해석방법에 비하여 상당히 계산시간을 단축시킬 수 있다. 그러나 주파수 민감도 해석방법은 초기상태에 대해서는 만족할 만한 결과를 얻을 수 없으므로, 초기상태에 대한 해석방법이 고려된다면, 계산시간을 단축시킬 수 있는 장점이 있기 때문에 유한요소 해석의 많은 분야에 유용하게 적용될 수 있을 것으로 사료된다.

[참 고 문 헌]

[1] S.R.H. Hoole, "Inverse Problems - Finite Elements in Hop-stepping to Speed Up," *International Journal of Applied Electromagnetics in Materials*, Vol.1, pp.255-261, 1990

[2] Il-han Park, Beom-taek Lee and Song-yop Hahn, "Design Sensitivity Analysis for Nonlinear Magnetostatic Problem Using Finite Element Method," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol.28, No.2, pp.1533-1536, 1992

[3] Il-han Park, Hyang-beom Lee, In-gu Kwak and Song-yop Hahn, "Design Sensitivity Analysis for Steady State Eddy Current Problems by Continuum Approach," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol.30, No.5, pp.3411-3414, 1994

[4] P.Petin, J.L. Coulomb and Ph. Conraux, "High Derivatives for Fast Sensitivity Analysis in Linear Electromagnetic," Proceeding of CEFC'96, Okayama, Japan, OA-3, pp.66