

# 적응 퍼지 추론기법을 이용한 Ball and Beam 시스템의 안정화 제어

°김 태우, 김 형배, 심 영진, 손 영대, 이 준탁  
동아대학교 전기·전자·컴퓨터공학부

## Stabilization Control of Ball and Beam System Using Adaptive Fuzzy Inference Technique

°T.W. Kim, H.B. Kim, Y.J. Shim, Y.D. Shon, J.T. Lee  
Department of Electrical · Electronical · Computer Eng. Univ. of Dong-A  
E-mail : jtlee@seunghak.donga.ac.kr

Abstract - The characteristics of ball and beam system using fuzzy inference technique can be described by fuzzy modeling. Therefore, this paper introduces a technique for fuzzy structure identification of nonlinear input-output relationship using an adaptive fuzzy inference system. And the simulation result using adaptive fuzzy inference technique shows its effectiveness for fuzzy structure identification of nonlinear system.

설계를 위한 퍼지제어 규칙수와 제어규칙 전건부 및 후건부 파라미터들이 자동 동조되는 적응 퍼지추론기법을 이용하고자 한다. 또한, 제안된 기법을 Ball and Beam 시스템의 안정화 제어에 적용하므로써 종래의 제어기법에 비해 향상된 성능을 보이는 것과 그 응용 가능성을 제시하고자 한다.

### 1. 서론

Ball and Beam 시스템은 대표적인 불안정한 비선형 시스템으로서 그 안정화에 대해서는 널리 연구되어온 제어문제이다. 그러나, 비선형성이 강한 시스템에 있어서는 물리적, 수학적 해석과 모델링이 어려울 뿐만 아니라, 고전적인 제어기 설계법과 상태공간 해석법에 근거한 현대제어 이론으로는 제어를 설계하는데도 많은 어려움이 뒤따른다.

본 논문에서는 인간의 경험 및 사고, 지식 등을 기반으로 구성된 퍼지추론 기법을 이용하여 제어를 구성하고자 한다.

그러나, 종래의 퍼지제어기는 비선형성이 강한 플랜트에 적용시킬 때 수시로 변동하는 파라미터를 추종할 수 있는 최적의 멤버쉽 함수와 제어규칙을 찾기 위하여 많은 시행착오를 수반해야 된다는 단점이 있다.

따라서, 본 논문에서는 비선형성이 강한 Ball and Beam 시스템의 안정화 제어기

### 2. Ball and Beam의 수학적 모델링

#### 2.1 간략화한 모델링

아래 그림1과 같이 Beam은 각도  $\theta$  만큼 기울여서 Ball을 원하는 위치  $x$ 로 제어하는 간단한 시스템을 살펴보자.

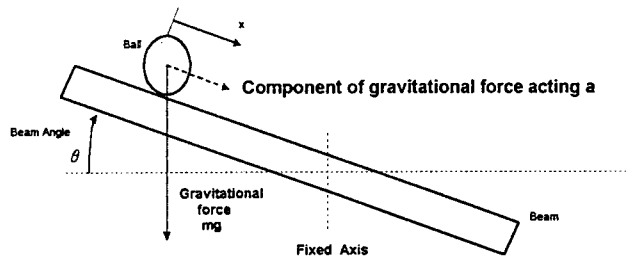


Fig 1. Ball and its position

그림 2와 같이 Beam의 각도  $\theta$ 와 Ball의 운동방향에 의해 시스템의 동특성을 구할 수 있다. 뉴턴의 법칙에 의해

$$mg \sin \theta = m \ddot{x} \quad (1)$$

로 된다. 여기서,  $\theta$ 는 Beam의 각도,  $m$ 은

Ball의 질량,  $x$ 는 Ball의 위치이다. 한편, 각도가 작을 때에는

$$\sin \theta \approx \theta \text{ 이므로}$$

$$\dot{x} = g\theta \quad (2)$$

로 선형화 될 수 있다.

또한, 그림 2와 같은 Ball and Beam의 피드백이 없는 Open-Loop 시스템에 대한 전달함수는 식 (2)를 라플라스 변환에 의해

$$X(s) = \frac{g}{s^2} \Theta(s) \quad (3)$$

로 된다.

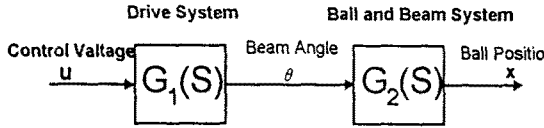


Fig 2. Open-Loop Ball and Beam System

또한 Beam의 각도를  $-7.5^\circ \sim +7.5^\circ$ 로 변화시키는 캠의 속도는 모터 입력전압에 비례한다. 따라서, 모터 구동전압  $u$ 에 대한 관계는 식 (4)와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d\theta}{dt} = G_m \cdot u$$

또는,

$$\Theta(s) = \frac{G_m}{s} U(s) \quad (4)$$

이다.

## 2.2 Ball and Beam의 수학적 모델링

Lagrange Method에 의해 Ball and Beam의 모델링을 구할 수 있다. 시스템의 Lagrangian  $L$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$L = U^* - T \quad (5)$$

여기서,  $U^*$ 는 운동에너지이고,  $T$ 는 시스템의 위치에너지를 나타낸다. 이 시스템에서의 스프링과 연관이 없으므로 위치에너지  $T$ 는 0이다. 따라서,

$$L = U^* = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (6)$$

여기서,  $m$ 은 Ball의 질량,  $I$ 는 관성모멘트,  $v$ 는 Ball의 속도,  $\omega$ 는 Ball의 각속도를 의미하며, 이것은 또한 일반화된 속도  $x$ 와  $\theta$ 에

관련된 식으로 변환하여야 한다. 그림 3에서  $AB=AC$ ,  $x=\phi r$  이므로

$$\alpha = \phi + \theta = \frac{x}{r} + \theta \quad (7)$$

로 되고,

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{x}}{r} + \dot{\theta} \quad (8)$$

로 된다. 여기서,  $r$ 은 Ball의 회전반경을 나타낸다.

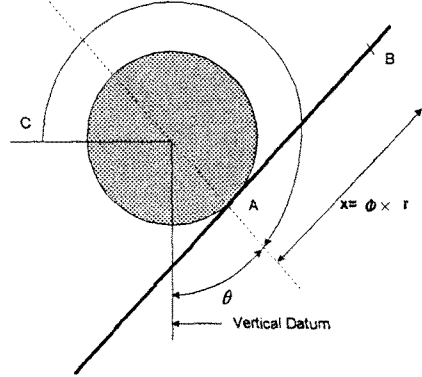


Fig 3. Kinematic relations for Ball and beam

또한, Ball의 속도  $v$ 는 식(9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$v^2 = (\dot{x})^2 + (x\dot{\theta})^2 \quad (9)$$

식 (6)과 (7)에 의해 Lagrangian  $L$ 을 다시 쓰면,

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + (x\dot{\theta})^2) + \frac{I}{2} \left( \frac{\dot{x}}{r} + \dot{\theta} \right)^2 \quad (10)$$

또한, Ball의 관성모멘트는 식(11)과 같이 주어진다.

$$I = \frac{2}{5} m R^2 \quad (11)$$

여기서,  $R$ 는 Ball의 반경을 나타내며, 이는 항상 와이어 상에 위치하는 Ball의 회전반경  $r$ 보다 크다는 사실을 알 수 있다. 따라서, 시스템의 동특성 모델은 다음과 같이 Lagrange 방정식으로 부터 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = mg \sin \theta \quad (12)$$

$$\left( 1 + \frac{2R^2}{5r^2} \right) \dot{x} + \frac{2R^2}{5r^2} \dot{\theta} - x(\dot{\theta})^2 = g \sin \theta \quad (13)$$

가 됨을 알 수 있다.

### 3. 퍼지 If-Then 규칙과 퍼지추론 기법

3.1 If-Then 규칙과 비선형 함수의 표현  
비선형 시스템의 입·출력 관계를 나타 내는 함수는

$$y = f(x_1, x_2) \quad (14)$$

와 같으며,  $y$ 가 변수 분리 가능하면

$$f(x_1, x_2) = g(x_1) \times l(x_2) \quad (15)$$

또는,

$$f(x_1, x_2) = g(x_1) + l(x_2) \quad (16)$$

로도 표현할 수 있다. 식 (14)를 퍼지 모델링하기 위해 본 연구에서 사용될 If-Then 규칙은 Takagi-Sugeno에 의해 제안된 것으로,  $i$ 번째 규칙  $R^i$ 는

$$R^i: \text{If } x_1 \text{ is } A_{qi} \text{ and } x_2 \text{ is } B_{mi} \text{ then } f_i(x_1, x_2) = \alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i \quad (17)$$

와 같다. 식(17)에서  $x_1$  및  $x_2$ 는 입력변수이며, 후건부 1차함수  $f_i$ 는 상수파라미터  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 로 구성되며,  $A_{qi} (q=[1, 2, \dots, Q])$  및  $B_{mi} (m=[1, 2, \dots, M])$ 은 입력 퍼지변수로써 다음의 멤버십 함수로 표현된다.

(I) 범종형인 경우

$$\mu_{A_i, B}(x_j; a_i, b_i, c_i) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x_j - c_i}{a_i} \right|^{2b_i}} \quad (18)$$

(II) 삼각형인 경우

$$\mu_{A_i, B}(x_j; a_i, b_i, c_i) = \begin{cases} 0 & x_j < a_i \\ \frac{x_j - a_i}{b_i - a_i} & a_i \leq x_j \leq b_i \\ \frac{c_i - x_j}{c_i - b_i} & b_i \leq x_j \leq c_i \\ 0 & c_i \leq x_j \end{cases} \quad (19)$$

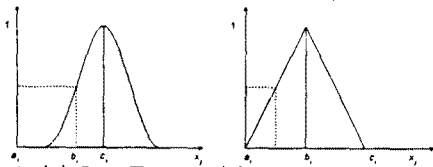


Fig 4. (a) Bell Type (b) Triangular Type

### 3.2 퍼지 추론 구조

그림 5는 Sugeno-Takagi 형태의 퍼지 If-Then 규칙과 퍼지추론법을 나타낸다.

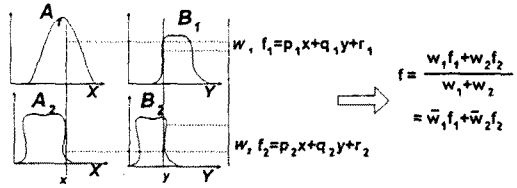


Fig 5. Sugeno-Takagi's Fuzzy inference method

따라서, 비선형함수  $y$ 의 퍼지모델에 의한 근사치  $\hat{y}$ 는 규칙수  $n$ 일 때

$$\hat{y}(x_1, x_2) = \frac{\sum_{i=1}^n [\mu_{A_i}(x_1) \wedge \mu_{B_i}(x_2)] \cdot f_i(x_1, x_2; \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_1) \wedge \mu_{B_i}(x_2)} \quad (20)$$

로 표현될 수 있다.

### 4. 적응 퍼지 추론 기법

#### 4.1 적응 퍼지추론 시스템의 구조

제안하는 적응 퍼지추론 시스템의 구조는 그림 6과 같다.

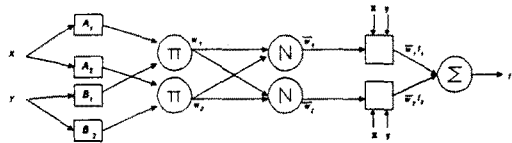


Fig 6. Adaptive Fuzzy inference system

적용 퍼지추론기의 구조는 다층 Feed-forward 회로망으로 구성되어지며, 학습 데이터에 적응하는 구조와 학습 절차를 갖는다. 즉, 적응 회로망은 Node와 Node를 연결하는 Link로 되어 있는데, 각 Node의 출력은 Node가 갖고 있는 파라미터가 학습 데이터와의 오차 크기를 최소화하기 위하여 구배법과 연쇄규칙에 따라 학습되어 진다.

#### 4.2 학습 알고리즘

적용 퍼지추론 제어기로 부터  $i$ 번째 규칙에 대한 전건부 파라미터  $a_i, b_i, c_i$  및 후건부 파라미터  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 가 결정되면, 전체 시스템의 근사 출력  $\hat{y}$ 는

$$\begin{aligned} y \approx \hat{y} &= \frac{w_1 \cdot f_1}{\sum_{i=1}^n w_i} + \frac{w_2 \cdot f_2}{\sum_{i=1}^n w_i} + \dots + \frac{w_n \cdot f_n}{\sum_{i=1}^n w_i} \\ &= \frac{(w_1 \cdot \alpha_1 + w_2 \cdot \alpha_2 + \dots + w_n \cdot \alpha_n) \cdot x_1}{\sum_{i=1}^n w_i} \\ &\quad + \frac{(w_1 \cdot \beta_1 + w_2 \cdot \beta_2 + \dots + w_n \cdot \beta_n) \cdot x_2}{\sum_{i=1}^n w_i} \\ &\quad + \frac{(w_1 \cdot \gamma_1 + w_2 \cdot \gamma_2 + \dots + w_n \cdot \gamma_n)}{\sum_{i=1}^n w_i} \end{aligned} \quad (21)$$

로 주어진다. 후건부 파라미터는 Node의 출

력  $\hat{y}$ 에 의한 최소자승 추정(LSE:Least Square Estimation)한 방법으로 전방향 연산시에 동정되며, 전건부 파라메타는 오차 변화율을 역전파시켜 구배법에 의해 경신한다.

### 5. 시뮬레이션 및 결과고찰

Ball and Beam 시스템의 사양은 표1 과 같다.

Table 1. Specification of Ball and Beam System

그림 8은 Ball과 Beam 상호간의 동특성을

Parameter	Description	Value	Unit
m	Mass of Ball	0.002818	kg
g	Gravitational constant	9.8	$m/s^2$
$\theta$	Beam angle	$y \approx \hat{y} = \frac{w_1 \cdot \cdot}{w_1} = \left( \frac{w_1 \cdot \cdot}{w_1} + \frac{w_1 \cdot \cdot}{w_1} + \frac{w_1 \cdot \cdot}{w_1} \right)$	°
x	Ball Position	-	m
R	Ball radius	0.095	m
r	Rolling radius	0.06833	m
I	Ball moment of inertia	$1.0209 \times 10^{-6}$	$kg \cdot m^2$
v	Velocity of Ball	-	m/s

고려한 적응 퍼지제어기의 구성도이다. 적응 퍼지추론기에서 Ball의 위치 x와 그 변화량  $\dot{x}$ 로 부터 Beam의 지령각도  $\theta^*$ 를 추론한다. 또한, Beam의 각도  $\theta$ 와  $\dot{\theta}$ 로 적응 퍼지 제어기로부터 직류서보 모터의 입력 전압 u를 결정한다. 즉, DT-2801 D/A컨버터를 거친 -10[V]~+10[V]의 아날로그 전압이 Beam 모터 증폭기를 거쳐 Ball and Beam 시스템 모터를 구동시키는 조작량이 된다.

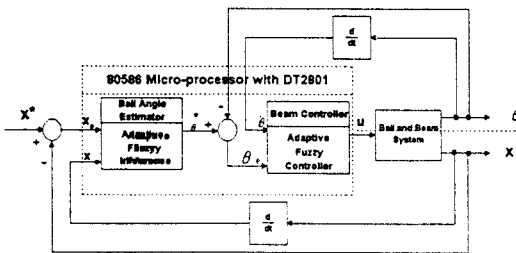


Fig 8. Architecture of Adaptive Fuzzy Controller

### 6. 결론

본 논문에서는 적응 퍼지추론 기법에 의한 대표적인 비선형 시스템중의 하나인 Ball and Beam 시스템의 퍼지 모델링에 대하여 논하였다. 비선형 입출력 관계를 Sugeno-Takagi형의 If-Then 규칙에 의해 전건부 멤버십 함수의 파라메타 및 후건부 선형 파라메타로 표현하였으며, 기지의 입·출력 데이터 쌍을 학습데이터로 활용하였다. 전건부 파라메타는 오차 역전파에 의한 구배법으로 학습되며, 후건부 파라메타는 출력 Node의 값에 근거하여 LSE로 동정 하였다. 따라서, 시뮬레이션 결과, 퍼지 제어규칙 및 퍼지변수의 멤버십 함수의 모양을 조정하는데 있어 종래의 퍼지제어기 설계기법을 보완하여 제안된 기법으로 Ball and Beam 시스템의 제어에 적용해 본 결과 종래의 고전적인 제어기법인 PID제어에 비해 향상된 성능과 그 응용 가능성을 알수 있었다.

### [참고문헌]

- [1]. Jyh-Shing Roger Jang ; Adaptive Network Based Fuzzy Inference System ; IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol.23, No.3, pp.665 ~684, May/June, 1993
- [2]. Shin-ichi H., Takeshi F. & Yoshiki Uchikawa ; On Identification of Structures in Premises of a Fuzzy Model using a FNN ; IEEE, pp.661~666, 1993
- [3]. T.Takagi and Sugeno ; Fuzzy Identification of systems and its applications to modeling and control ; IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol.15, No.1, pp.116~132, 1985
- [4]. P.E.Wellstead, V.Chrimes, P.R. Fletcher, R.Moody and A.R.Robins ; The Ball and Beam Control Experiment ; Int. J. Elect. Educ., vol.15, pp.21-39 Manchester U. P., 1978.