

웨이브렛 변환을 이용한 시변 선형 시스템의 근사화

이영석, 김동옥, 안대찬, 서보혁
경북대학교 전기공학과

Approximation of Linear Time-Varying System Using Wavelet Transform

Young-Seog Lee, Dong-Ok Kim, Dae-Chan Ahn, Bo-Hyeok Seo.
Department of Electrical Engineering, Kyungpook National University

Abstract - This paper discusses approximate modelling of discrete-time linear time-varying system(LTVS). The wavelet transform is considered as a tool for representing and approximating a LTVS. The joint time-frequency properties of wave analysis are appropriate for describing the LTVS. Simultaneously results is included to illustrate the potential application of the technique.

1. 서론

최근 웨이브렛 이론[1,2]은 많은 공학 분야에 응용이 되고 있다. 특히 신호처리[3], 영상처리등의 분야에서 유용하게 적용되고 있다. 많은 연구자들은 웨이브렛 이론을 시스템이론과 접목을 시도 하고 있으며 많은 연구 결과가 나타나고 있다.

본 논문에서는 시변 선형 시스템의 모델링을 웨이브렛 시리즈와 웨이브렛 분할기법을 이용하여 시스템의 근사화를 이루며, 이러한 근사화의 결과를 웨이브렛망으로 표현이 가능함을 보인다. 시변 선형 시스템을 웨이브렛으로의 표현을 행렬의 형태로 표현이 가능하고 이러한 행렬 표현에서 계수행렬을 웨이브렛망의 가중치 행렬로 나타낼 수 있다. 사례연구는 [7]의 시스템을 사용하였으며 임펄스 함수의 근사화와 입력에 따른 시스템의 출력을 비교 함으로서 함수 근사화를 이루어낸다.

본논문의 구성은 2장은 웨이브렛 이론에 대한 간략한 내용기술이 되고 3장은 시변 선형 시스템의 웨이브렛 표현과 이러한 결과를 이용한 웨이브렛 망을 나타내며 4장에서는 사례연구와 결과에 대한 고찰을, 5장은 결론이며 마지막으로 참고문헌의 순으로 구성된다.

2. 웨이브렛 이론

웨이브렛 변환은 신호를 Short-time Fourier Transform(STFT)과 같이 시간-주파수 평면[3,4]에

주어진 신호의 특성을 나타내는 해석 방법이다.

웨이브렛 변환은 비정상신호(nonstationary signal)의 해석에 대해서 지금까지 고전적으로 사용 되어왔던 short-time Fourier변환(STFT)이나 Gabor변환과는 다른 관점을 제공하고 있어서 관심을 끌고 있다. STFT와 웨이브렛 변환 사이의 기본적인 차이점은 STFT가 하나의 해석 윈도우(window)를 사용하는데 비해서 웨이브렛 변환은 높은 주파수에서는 짧은 윈도우를 사용하고 낮은 주파수에서는 긴 윈도우를 사용하는 것이다. 웨이브렛 변환을 정의 하기 전에 허용함수를 정의한다. 어미 웨이브렛이 되기 위한 함수는 허용적이어야한다. 하나의 $L^2(R)$ 함수 g 는 다음 조건을 만족하는 허용함수이다.

$$C_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1)$$

여기서 $G(\omega)$ 는 g 의 Fourier변환이다.

웨이브렛 변환 연산자 ϕ_a 를 사용하면 주어진 허용함수 웨이브렛 g 에대해서 임의의 신호 $y(t)$ 의 웨이브렛 변환은 다음과 같이 정의된다.

Wavelet domain coeff at scale a and translation τ

$$\begin{aligned} \phi_a y(a, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int y(t) g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt \\ &= \langle y, \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \rangle \\ &= \langle y, g_{a,\tau} \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 내적을 나타낸다. 웨이브렛 요소 $g_{a,\tau}$ 는 $g(t)$ 가 축적(scale)파라미터 a 에 의해서 축적되고 병진(translation)파라미터 τ 에 의해서 이동된 형태이다. 이것은 임의의 (a, τ) 에서 웨이브렛 계수가 축적의 넓은 범위에 대해서 잘 비교되거나 결합되도록 한다. 특정한 응용분야에서 최적의 동작을 위해서 자유롭게 어미 웨이브렛을 선택할 수 있도록 한다.

웨이브렛 역변환식은 식 (2)에서 설명된 웨이브렛

변환으로부터 유도된다.

$y(t)$ 와 $g(t)$ 가 유한 에너지함수이고 $g(t)$ 가 허용어미 웨이브렛이면 웨이브렛 역변환 W_g^{-1} 는 축적-병진평면 $\Psi(a, \tau)$ 에서의 평면을 1차원의 시간 또는 공간 평면으로 대응시킨다.

축적-병진 평면이 어미 웨이브렛 g 또는 $\phi(a, \tau) = \Phi_g y(a, \tau)$ 에 대한 $y(t)$ 의 웨이브렛 변환인 경우에 다음과 같이 된다.

$$\Phi_g^{-1} : \Phi_g(a, \tau) \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_g y(a, \tau) \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \frac{d\tau da}{a^2} \quad (3)$$

역변환은 축적되고 이동된 형태의 어미 웨이브렛이 적절하게 가중된 합에 의해서 원래의 신호를 생성한다. 가중치는 웨이브렛 계수 $\Phi_g y(a, \tau)$ 이다. 역변환은 2차원 축적-병진 공간에 대한 합이다. 시간과 공간 평면 함수는 웨이브렛 평면 계수 $W_g y(a, \tau)$ 와 어미 웨이브렛 g 로부터 생성된다.

지금까지 유도된 연속 웨이브렛 변환은 이산(discrete)형태로 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$DWT_x(m, n) = \sum_k x(k) \psi_{m,n}(k) \quad (4)$$

$$\psi_{m,n}(k) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(\frac{k-nb_0 a_0^{\frac{m}{2}}}{a_0^{\frac{m}{2}}}\right) \quad (5)$$

식(1)은 이산(discrete-time) 신호 $x(n)$ 에 대한 이산 웨이브렛변환을 나타내는 일반식이다. $\psi(k)$ 는 어미(mother) 웨이브렛이 scale과 translation을 나타내는 m 과 n 은 a_0 와 b_0 에 따라 팽창과 이동을 한다.

3. 함수 근사화

안정한 이산 시간 선형 시변 시스템을 식(6)과 같이 가정한다.

$$y(k+1) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} G(k, l)u(l) \quad (6)$$

여기서, $u(l)$, $y(k+1)$ 은 시스템의 입, 출력을 나타낸다. 그리고 $G(k, l)$ 은 시스템의 임펄스 응답을 나타낸다.

$$G(k, l) = 0, \quad l > k \quad (7)$$

이러한 임펄스 응답 함수에 웨이브렛 시리즈를 적용하면 식(8)과 같이 표현할 수 있다.

$$G(k, l) = \sum_{m,n} G_{mn}^T(k) \Phi_{mn}(l) \quad (8)$$

식(8)을 식(6)에 대입하면 다음의 식(9)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} G(k, l)u(l) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m,n} G_{mn}^T(k) \Phi_{mn}(l)u(l) \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)에서 $G_{mn}(k)$ 를 다시 웨이브렛을 이용하면

식(10)과 같이 된다.

$$G_{m,n}(k) = \sum_{o,p} g_{mnop} \Psi_{op}(k) \quad (10)$$

그러면 시스템의 임펄스 함수의 표현은 식(11)과 같다.

$$G(k, l) = \sum_m \sum_n \sum_o \sum_p \Psi_{op}(k) g_{mnop} \Phi_{mn}(l) \quad (11)$$

여기서 $\Psi(k)$, $\Phi(l)$ 은 어미 웨이브렛 함수이다. 그리고 g_{mnop} 는 상수 행렬로서 웨이브렛 함수의 계수 행렬이 된다.

결국 선형 시변 시스템의 전체 표현은 식(12)과 같이 표현 될 것이다.

$$\hat{y}(k+1) = \sum_{l=1}^k \sum_m \sum_n \sum_o \sum_p \Psi_{op}(k) g_{mnop} \Phi_{mn}(l) u(l) \quad (12)$$

식(12)를 그림 1과 같이 나타냄으로서 웨이브렛 망[6]의 형태로 표현할 수 있다.

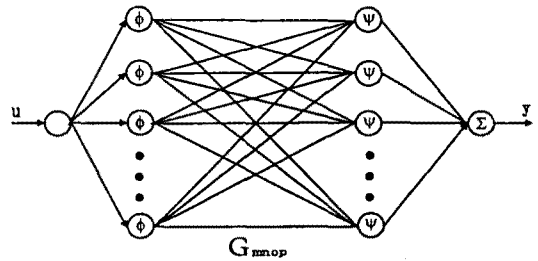


그림 1. 웨이브렛 망

4. 사례연구와 검토

사례연구에 사용한 시스템[7]은 식(13)과 같은 시변 선형 시스템이다.

$$G(k, l) = \frac{k}{256} g_1(l) + \left(1 - \frac{k}{256}\right) g_2(l) \quad (13)$$

여기서 $0 \leq l \leq k \leq K, K = 256$ 이며 $g_1(l)$, $g_2(l)$ 은 식(14)와 같다.

$$G_1(z) = \frac{z^{-3}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.41z^{-2} + 0.267z^{-3}} \quad (14)$$

$$G_2(z) = \frac{0.85z^{-3}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.475z^{-2} + 0.87z^{-3}}$$

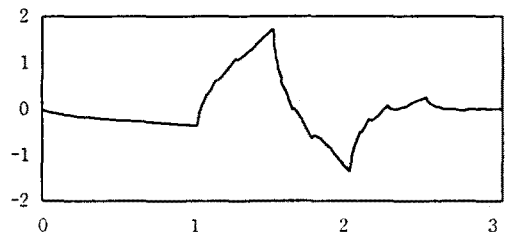


그림 2. 어미 웨이브렛 함수

본 논문의 사례연구에 사용된 어미 웨이브렛은 그림 2와 같으며 식(13)의 임펄스 응답과 웨이브렛에 의해 근사화된 응답을 그림3에 나타나 있으며, 오차를 그림 4에 나타내었다. 시변 선형 시스템의 입력에 대한 출력의 결과를 그림 5에, 근사화 오차를 그림 6에 나타내었다. 웨이브렛 변환에 의한 함수 근사화가 잘 이루어 짐을 알 수 있다.

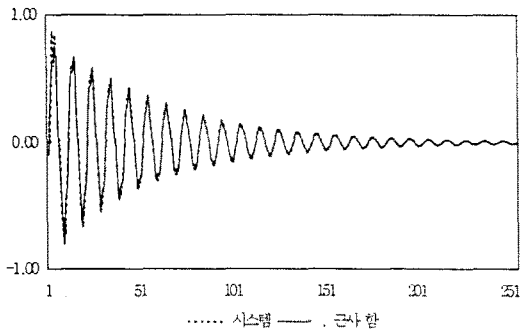


그림 3. 시스템과 근사화 함수의 임펄스 응답 비교

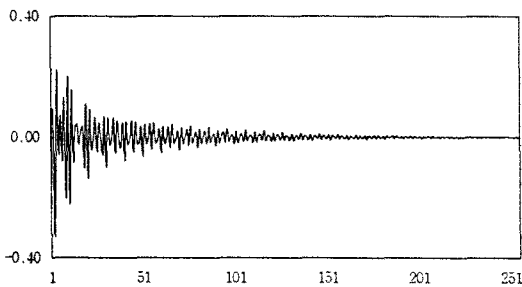


그림 4. 시스템과 근사화 함수의 임펄스 응답 오차 비교

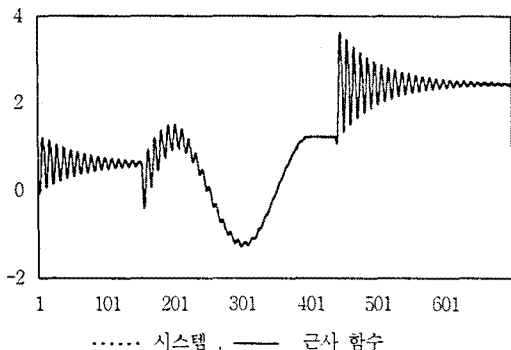


그림 5. 시스템과 근사화 함수의 응답 비교

5. 결 론

본 논문은 이산 시간 시변 시스템의 임펄스 응답의 근사화를 위한 기법으로서 푸리에 변환, STFT와 Gabor 변환등의 고정된 해상도를 가지는 해석 기법의 단점을 보완 하고자 웨이브렛 변환 기법을

사용하여 시스템의 함수 근사화에 새로운 기법을 제안 하였다. 웨이브렛 변환을 사용함으로써 높은 주파수의 영역과 낮은 주파수의 영역을 크기가 다른 창(window)을 사용함으로써 인해서 시변 시스템의 함수 근사화를 쉽게 찾아낼 수 있었다.

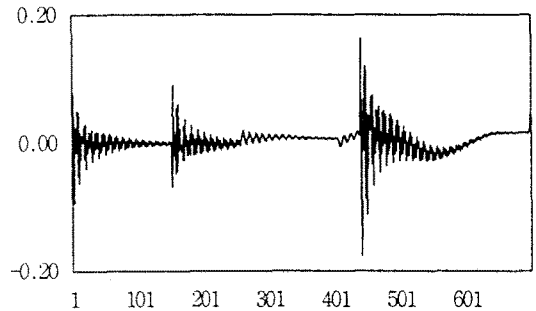


그림 6. 시스템과 근사화 함수의 오차 비교

웨이브렛 계수로 이루어진 상수 행렬을 이용한 근사 기법을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 시스템의 임펄스 응답과 입력에 대한 시스템의 출력과 비교함으로써 근사가 잘 이루어 짐을 확인할 수 있었다. 앞으로의 연구과제로는 좀 더 적절한 계수 행렬을 찾을 수 있는 기법과 이를 이용한 제어기법의 연구가 수행 될것으로 사료된다.

(참 고 문 헌)

- [1] Martin Vetterli, J. Kovacevic, "WAVELETS and subband coding", Prentice hall, 1995.
- [2] G.Strang, T. Nguyen, "Wavelets and Filter Banks", Wellesley-Press, 1996.
- [3] N. H. Nielsen, M. V. Wickerhauser, "Wavelets and Time-Frequency Analysis", Proceedings of the IEEE, vol.84, No.4, April pp. 523-540 1996.
- [4] A. Cohen, J. Kovacevic, "Wavelets: The Mathematical Background", Proceedings of the IEEE, vol.84, No.4, April pp. 514-522. 1996.
- [5] M. I. Doroslovacki, H. Fan, "Wavelet-Based Linear System Modeling and Adaptive Filtering", IEEE, Trans. SP. vol.44, No.5, May pp. 1156-1167. 1996.
- [6] Q. Zhang, A. Benveniste, "Wavelet Networks", IEEE, Trans. NN. vol. 3, No. 6, November 1992.
- [7] H. Rotstein and S. Raz, "Gabor Transform Approximation of Time-Varying Systems", Proceedings of 1995 the American Control Conference, pp.2424-2429.