'97 대한전기학회 창립 50주년 하계학술대회 논문집 (CIP39)

불확실한 파라메터를 갖고있는 시스템의 제어기 설계

박용식, 염재명*
명지대 제어계측공학과

Robust Controller Design for System with Uncertain Parameter

Yong-sik Park, Jai-myeong Yeom*
Department of Control & Instrumentation Engineering, Myong Ji University

Abstract - This paper deals with the problem of finding robust controller based upon a pole assignment method for a plant with parameter perturbations.
This case is not a problem of Interval polynomial family but a problem of Polytopic polynomial family. As a method of stability test, we used GKT(Generalized Kharitonov Theorem) having computational advantage.

1. 서 론

본 논문은 플렌트 전달함수의 특정계수가 유한한 범위 내에서 섭동(perturbation)을 갖는, 선형 시스템에서 안정도를 보장하고 임의의 성능규격(performance index)즉, 적절한 감쇠 및 정정시간을 만족하는 강한 제어기 구성에 관한 것이다. 이러한 문제에대한 주목할만한 결과로, 매개변수 불확실성을 다중모델로 나타내고 simultaneous stabilizer를 설계하는 방법[1]이 있으나, 대부분 방법이 일반적이며 체계적인 해를 주지는 못하였다. 본 논문에서는 Kharitonov's theorem의 확장으로, edge theorem[2] 보다 계산상에서 효과를 볼 수 있는 GKT[3]을 이용하여 선형 종속관계로 주어지는 매개변수 섭동에 대해 안정도 여유와 제어특성등을 고려한 극배치 방식을 제시한다. 이러한 제어대상의 특성다항식은 다음식으로 표현될수 있다.

$$P(s, q) \overset{\Delta}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i(q)s^i \tag{1}$$

여기서, $q^T=\{q_1,q_2,\ldots,q_k\}$는 불확정 매개변수로서 Box Q내에서 변화한다.

$$Q = \{ q \mid q_i^- \le q_i \le q_i^+ , i=1,2,3,\ldots,k \} \tag{2}$$

(1),(2)로서 표현되는 다항식군(a family of polynomial)을 다시쓰면,

$$P \overset{\Delta}{=} \{P(.,q) \mid q \in Q \} \tag{3}$$

그리고 p의 모든근이 복소평면에 미리 설정해 준 영역D내에 존재하면, 시스템은 D-안정(D-stable)이라고 부르기로 한다.(D는 LHP, 단위원 또는 임의 영역으로 설정됨). p(s,q)의 각 계수 a_i가 독립적으로 섭동을 갖는 경우에는 매개변수 공간에서 (n+1)차원 hyperrectangle로 나타나며, p를 interval polynomial family라 한다. Kharitonov[4]는 이러한 interval polynomial 문제에 대해 D가 복소평면의 좌측반평면(LHP)일 때, 2개의 극점(extreme point 또는 vertex)중 단지 4개의 극점을 나타내는 소위 Kharitonov polynomials의 Hurwitz안정이 P의 D-안정 이라는 획기적인 결과를 발표하였다. Barmish에 의해 제어문제에 적용 소개되면서 Robust stability연구에 많은 진전을 보였다. Bartlett등[5]은 (1)의 각 계수가 q에 대해 선형 종속관계로 주어지는 polynomial family에대해 2^k로 주어지는 극점간 exposed edges가 안정이면 P가 D-안정(D는 임의의 단순영역)이라는 소위"edge 정리"를 발표하여 Kharitonov정리의 일반화에 크게 기여하였다.

그러나 안정도 검증 계산량은 모든 edge를 조사해야 하므로 방대하다. Bhattacharryya[3]등은 계산량에 있어, 다소 간단한 GKT을 제시하였다. 그런데, 대부분 연구가 주어진 제어기에 대해 P가 D안정인지를 판별하는 것으로서, 만일 플렌트계수의 공칭치(nomial value)에대해 설계된 제어기가 D-불안정일 때 이를 처리할 수 있는 기법의 연구가 요구된다. 본 논문에서는 제동 및 정정시간 특성을 고려한, 극지점 방법에 입각한 강인한 제어기 구성에 관하여 기술하였다.

2. 정 의

정의 2. 1 : (Interval polynomials)-식 (1),(2)에서

$q= [q_0\ q_1\ \ldots q_n]^T \in R^{n+1}$

$a_i(q) = q_i \qquad i = 0, 1, 2,\ldots,n$

$Q = \{ q \mid q_i^- \le q_i \le q_i^+ , i=1,2,\ldots,n \}$이면,

다음식(4)의 다항식을 interval polynomial이라한다.

$$P(s,q) = \sum_{i=0}^{n} q_i s^i \qquad (4)$$

정의 2.2 : (polytopes of polynomials) - m개의 vertex를 나타내는 다항식의 convex hull을 polynomial polytope라 한다. 즉,

$$P = \{ P(s) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i(s) \mid \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \} \qquad (5)$$

여기서, pi(s)는 polytope P의 vertex이다.

정의 2.3 : (Vertices of polytope) - (1),(2)에 대해서 P는 많아야 2^k개의 극점을 가지며, i번째 극점은 다음식 (6)으로 표현한다.

$$q^i = [q_1\ q_2\ ...q_k]^T$$

여기서, $q_j^i = q_j$ 또는 q_j^+, j = 1, 2, 3,..., k

$$P1(s) = \sum_{j=0}^{n} a_j(q^i)a^j \qquad (6)$$

정의 2.4 : Kharitonov polynomials

식(4)의 interval polynomial에서, 2^{n+1}개의 vertex를 나타내는 다항식군 P의 실수부와 허수부는 다음 4개의 다항식의 그것내에 bound된다.

이 4개의 vertex를 Kharitonov다항식이라 한다.

$$k_1(s) = q_0^- + q_1^- s^1 + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + ...$$
$$k_2(s) = q_0^+ + q_1^+ s^1 + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + ...$$
$$k_3(s) = q_0^+ + q_1^- s^1 + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + ...$$
$$k_4(s) = q_0^- + q_1^+ s^1 + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + ... \qquad (7)$$

3. 문제의 설정

그림 1과 같은 단일 입출력(SISO)피드백 시스템에서 플렌트는 2차로 매개변수 섭동을 가지며 제어기 C(S)는 극배치방식에 입각하여 구해진 경우를 고려한다.

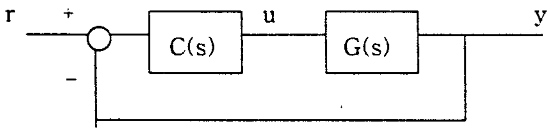

그림 1. 피드백 시스템

플렌트 전달함수 G(s)는

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \qquad (8)$$

여기서 $\beta_i \in [\beta_i^-\ \beta_i^+]$, i= 0, 1

$\alpha_i \in [\alpha_i^-\ ,\alpha_j^+]$, j= 0, 1, 2 (9)

이때 G(s)는 "strictly proper"이고 A(s), B(s)는 (9)의 조건하에서도 "coprime"이라 가정한다. 강인한 PID제어기 전달함수 C(s)는

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_D S^2 + K_p S + K_I}{S}$$
$$= (K_D'S^2 + K_p'S + K_I')/s \qquad (10)$$

특성방정식 Δ(s)는

$$\Delta(s) = A(S)D(S) + B(S)N(S) \qquad (11)$$

안정도 여유와 제동 특성을 고려하여 요구되는 극배치 영역이 그림2의 D-영역이라 하였을 때,문제는 (8),(9)로 표현되는 플렌트에 대해 D-안정이 보장되는 제어기 C(s)를 결정하는데 있다. 이것은 Δ(s)의 모든근이 (9)의 섭동에도 불구하고 D-영역안에 놓이게 됨을 의미한다. Δ(s)를 다항식으로 표현하면,

$$\Delta(s) = (\alpha_2 S^2 + \alpha_1 S + \alpha_0)KS$$
$$+ (\beta_1 S + \beta_0)(K_D'S^2 + K_P'S + K_I') \qquad (12)$$

윗식을 전개하면 각 계수는 α_i, β_j의 1차 종속으로 나타나게 된다. 즉, PPF(polytopic polynomial family)의 문제가 된다.이때 전 시스템의 안정도의 판별은 Edge정리나 GKT를 사용해야 하는데 GKT가 Edge정리보다 훨씬 계산량이 적다. Box정리는 다음과 같다. 먼저,

$$A(s) \stackrel{\Delta}{=} \{ A(s) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i,\ \alpha_i \in [\ \alpha_i^-\ ,\alpha_j^+] \} \qquad (13)$$

$$B(s) \stackrel{\Delta}{=} \{ B(s) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i s^i,\ \beta_i \in [\ \beta_i^-\ ,\beta^+] \} \qquad (14)$$

$$G(s) \stackrel{\Delta}{=} \{G(s)=B(s)/A(s); B(s) \in B(s), A(s) \in A(s)\} \qquad (15)$$

라 정의하면 B(s),A(s)의 Kharitonov polynomial set는

$$K_B(s) \stackrel{\Delta}{=} \{ K_B^1(s), K_B^2(s), K_B^3(s), K_B^4(s)\}$$
$$K_A(s) \stackrel{\Delta}{=} \{ K_A^1(s), K_A^2(s), K_A^3(s), K_A^4(s)\} \qquad (16)$$

다음과 같은 B(s), A(s)와 관련된 Kharitonov segments를 정의하자.

$$S_B(s) \leq \{ \lambda K_B^i(s) + (1-\lambda)K_B^j(s);\ \lambda \in [0,1],$$
$$(i,\ j) \in \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4)\}\} \qquad (17)$$

$$S_A(s) \leq \{ \mu K_A^i(s) + (1-\mu)K_A(s);\ \mu \in [0,1],$$
$$(i,\ j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4)\}\} \qquad (18)$$

G(s)의 Box Subset(G_B)는

$$G_B = \{G(s)B(s) \in K_B(s)\ ,A(s) \in S_A(s)$$
$$\text{or } B(s) \in S_B(s)\ ,A(s) \in K_A(s)\}$$

정리 3.1 GKT : C(s)가 모든 $G(s) \in G_B(s)$를 안정화 시키기만 하면, C(s)는 모든 $G(s) \in G(s)$를 안정화 시킨다. 이것은 섭동을 갖는 매개변수의 수와 상관없이 많아야 $32(2*4^2)$개의 Segment를 조사하면 전 시스템의 안정도를 판단할 수 있다.

4. 감쇠율 및 정정시간을 고려한 제어기

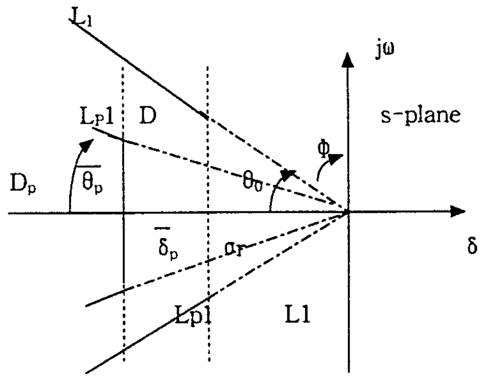

그림 2. PPF의 극배치 영역

스텝 1 : 그림 2의 θ, σr을 설정한다.

플렌트 계수의 공칭치를 각각 $\overline{a_i}$, $\overline{\beta_i}$(대응되는 다항식군은 A(s), B(s)로 표기함)라하고, D-영역내에 설정 해주는 페루프 특성다항식을 $T_0(s)$라 정의한다.

$$T_0(S)=(S+\overline{S_1})(S+\overline{S_2})(S+\overline{S_3}) = \sum_{i=0}^{3} t_i s^i \qquad (19)$$

여기서 $\overline{Si}$는 D-영역내에 놓이는 특성근이며, 극배치 영역을 결정하기 위해 초기에는 적어도 공액근 한쌍을 L_1 또는 L_2선상에 놓이도록 설정해 준다.

스텝 2 : 식 (12)로부터 공칭 모델에 대한 식을 벡터행렬로 쓰면

$$\begin{bmatrix} 0 & \overline{\beta 0} & 0 & 0 \\ \overline{\alpha 0} & \overline{\beta 1} & \overline{\beta 0} & 0 \\ \overline{\alpha 1} & 0 & \overline{\beta 1} & \overline{\beta 0} \\ \overline{\alpha 2} & 0 & 0 & \overline{\beta 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ KI' \\ KP' \\ KD' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t0 \\ t1 \\ t2 \\ t3 \end{bmatrix} \qquad (20)$$

윗식으로 부터 $[K\ K_I'\ K_P'\ K_D']^T$를 하고 이로부터 K_I, K_P, K_D를 구한다.

스텝 3~ 스텝 5를 위해 다음을 정의한다.

스텝 2에서 구한 제어기 계수를 식 (12)에 대입하고 a_i,β_i의 매개섭동을 고려한 다항식 군을 P(s)라 하자.

GKT의 32개의 segment를 조사함으로써 모든근의 존재영역을 알 수 있다. 이 $P_\Delta(s)$의 근 영역을 Ωr라 하고 D영역이 L_1섹터에 대응하는 감쇄계수를 $\zeta_0=\cos\theta_0$라 하자. 또 $P_{\Delta k}(s,\lambda_N)$의 근을 $S_{KN}=\sigma_{KN}\pm j\omega_{KN}=R_{KN}=e^{j\theta KN}$이라하자.

식 (19)의 초기 설정근중 D-영역 경계에 놓이는 근 : $\overline{Si}^*=Ri^*e^{j\theta}$

$$\theta_M \triangleq \max_{KN}\{\theta_{KN} : S_{KN} \in \Omega r\}$$

$$\zeta_m = \cos\theta_m$$

$$\theta_m \triangleq \max_{KN}\{\theta_{KN} : S_{KN} \in \Omega r\}$$

스텝 3 : 그림 2위에 $P_\Delta(s)$의 Ωr을 나타내면 D-안정 판별은 그대로 드러난다.

스텝 4 : Si^*에 대해 다음을 계산한다.

$$\theta_P = \cos^{-1}(\zeta_0 + \zeta_C) \qquad (21)$$

$$\sigma_P = \begin{cases} \sigma_r, & \sigma_r < \sigma_m \\ \sigma_m, & \sigma_m < \sigma_r \end{cases} \qquad (22)$$

여기서 $\zeta_C = \zeta_0 - \cos\theta_M \qquad (23)$

스텝 5 : Si^*를 D-영역 경계상 몇 개의 대표점에 이동시켜 스텝 2, 3, 4를 반복하고, 최소 θ_P, σ_P를 각각 $\overline{\theta_P}$, $\overline{\sigma_P}$라 놓으면 PPF에 대한 극배치영역 D_p는 그림 2와 같이 $L_{P1} = \cos\overline{\theta_P}$, $L_{P1} = -\overline{\sigma_P}$ 로 표현된다

5. 결 론

선형 제어계의 구조적 불확실성에 대한 강인한 제어기 설계에 관한 문제를 다루었다.이때 페루프 특성 다항식의 섭동된 매개 변수는 1차 선형종속으로 이루어지므로 PPF문제로 귀착된다. 안정도 판별의 계산량을 줄이기 위해 GKT가 사용 됐다.감쇠특성 및 정정시간을 고려한 영역에 모든근이 놓이게 하는 제어기 parameter를 결정 할 수 있다.

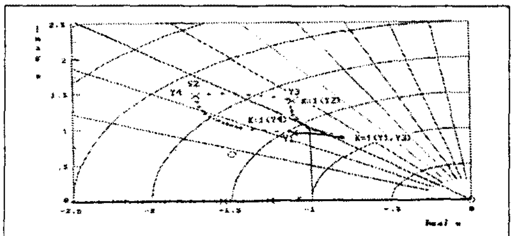

그림 3. 시스템 근 위치

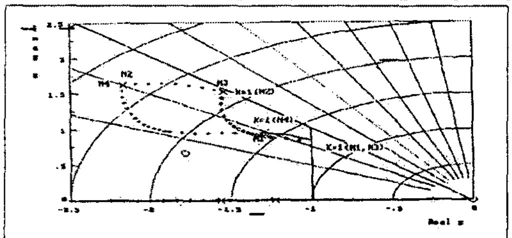

그림 4. 재 설계된 제어기에 의한 시스템 근 위치

[참고 문헌]

[1] B.K.Ghoshand C.I.Byrnes, " Simultaneous Stabilization and Simultaneous Pole-placement by nonswitching dynamic compensation ," IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC-28, pp.735-741,1983.

[2] B. R. Barmish," A generalization of Kharitonov's four-polynomials concept for robust stability problems with linearly depedent coefficient perturbations, " IEEE,AC-34, No2, pp. 157-165, 1989

[3] H. Chapellat, S. P. Bhattacharryya, "A generalization of Kharitonov's theorem :Robust stabilityof interval pants," IEEE, AC-34, No.3, pp. 306-311, 1989

[4] V.L.Kharitonov; "Asymototic stability of an equilibrium position of family of system of linear differential equation " Differential' nye Uye Uravneniya, vol 14 NO.11, 2086-2088,(1978).

[5] A. C. Bartlett, et al.1," A necessary & sufficient condition for schur invarience an degeneralized stability of polytopes of polynomials," IEEE, AC-33, No.6, pp.575-578, 1988