

파라미터 불확실성을 갖는 선형 시스템에 대한 준최적 강인 칼만필터 설계

진승희*, 김경근*, 박진배*, 윤태성**
 연세대학교 전기공학과*, 창원대학교 전기공학과**

Design of Suboptimal Robust Kalman Filter for Linear Systems with Parameter Uncertainty

Jin Seung Hee*, Kim Kyung Keun*, Park Jin Bae*, Yoon Tae Sung**
 Yonsei University*, Changwon National University**

Abstract - This paper is concerned with the design of a suboptimal Kalman filter with robust state estimation performance for system models represented in the state space, which are subjected to parameter uncertainties in both the state and measurement matrices. Under the assumption that the uncertain system is quadratically stable, if the augmented system composed of the uncertain system and the filter is controllable, the proposed filter can provide the upper bound of the estimation error variance for all admissible uncertain parameters. This upper bound can be represented as the convex function of a parameter introduced in the design procedure, and the optimized upper bound of the estimation error variance can also be found via the optimization of this convex function.

1. 서 론

상태 추정 문제에 대한 해법으로서 칼만 필터는 지난 40년 동안 여러 분야에 걸쳐 응용되어져 왔다 [1]. 그러나 이 기법은 프로세스 잡음과 측정 잡음이 가우시안 백색 잡음이라고 하는 통계적 특성에 대한 가정외에도 상태 방정식과 측정 방정식에 대한 정확한 수학적 모델을 얻을 수 있다고 하는 가정을 전제로 한다. 그러나 이러한 가정은 실제의 문제에 있어서는 성립하지 않는 경우가 많은데 [2-4], 이러한 경우 기존의 칼만 필터 기법은 최적의 성능을 나타내지 못한다. 따라서 본 논문에서는 시스템의 상태행렬과 측정행렬에 파라미터 불확실성이 있는 경우에 대한 상태 추정 문제를 다루기 위하여 추정 오차 공분산에 대한 상한계를 보장하고, 허용 가능한 모든 불확실한 파라미터 값에 대해 강인한 성능을 나타내는 칼만 필터를 설계한다. 제안된 필터는 추정 대상 시스템이 이차 안정(quadratically stable)하다는 가정으로 부터 얻을 수 있는 Lyapunov 부등식과 필터를 결합하여 구성

한 확장 시스템이 제어가능(controllable)하다는 가정으로 부터 얻을 수 있는 Lyapunov 부등식에 대해 [5]의 결과를 이용하여 두 개의 결합된(coupled) 대수 Riccati 방정식을 유도하고 이 방정식의 해를 구함으로써 설계할 수 있다. 또한 확장 시스템이 제어가능하다는 가정으로 부터 보장 비용 설계(guaranteed cost design)기법[6]을 이용하여 추정 오차 분산에 대한 상한계를 구할 수 있는 데 본 논문에서는 추정 오차 분산 자체를 최소화 하는 것이 아니라 상한계를 최소화하는 것이므로 구해진 필터는 준최적이라 할 수 있다[7]. 이와 같이 설계된 준최적 강인 칼만 필터의 상태 추정 성능을 시뮬레이션을 통해 기존의 표준 칼만 필터와 비교한다.

2. 준최적 강인 칼만 필터 설계 문제

2.1 문제 설정

다음과 같은 이차 안정한 불확정 선형 시스템을 고려한다.

(G:)

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + w(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1a)$$

$$y(t) = [C + \Delta C(t)]x(t) + v(t) \quad (1b)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태 변수, $y(t) \in R^r$ 는 측정값이고, $w(t) \in R^n$ 와 $v(t) \in R^r$ 는 영평균이며 각각 공분산이 W, V 인 프로세스 잡음과 측정 잡음이다. A 와 C 는 공칭 상수 행렬이고, $\Delta A(t)$ 와 $\Delta C(t)$ 는 시변 파라미터 불확실성을 나타내는 미지 행렬이며 다음과 같은 형태를 가정한다.

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) \\ \Delta C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F(t) E \quad (2)$$

$H_1 \in R^{n \times i}, H_2 \in R^{r \times i}$ 와 $E \in R^{i \times n}$ 는 상수 행렬이고, $F(t) \in R^{i \times i}$ 는 다음과 같은 놈(norm)을 가지는 미지 행렬이다.

$$\|F(t)\| \leq 1, \quad \forall t \quad (3)$$

위 식에서 $\|\cdot\|$ 는 스펙트럴 놈을 뜻한다. 본 논문에서는 다음과 같은 형태를 가지며 파라미터 불확실성에 대해 강인한 상태 추정 성능을 가지는 칼만

필터를 설계하고자 한다.

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= A_e \hat{x}(t) + K_r [y(t) - C_e \hat{x}(t)] \\ &= G_e \hat{x}(t) + K_r y(t)\end{aligned}\quad (4)$$

이제, 추정 오차를 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 로 정의하고 시스템 (1a)와 오차의 동특성을 결합하면 다음과 같은 확장 시스템을 얻는다.

(G_a):

$$\dot{x}_a(t) = A_{aug} x_a(t) + B_a n(t) \quad (5a)$$

$$e(t) = C_a x_a(t) \quad (5b)$$

여기서 $x_a(t) = [x^T(t) \ e^T(t)]^T$ 이고 $n(t)$ 는 단위 공분산 행렬을 갖는 영평균 잡음 신호이며,

$$\begin{aligned}A_{aug} &= A_a + H_a F(t) E_a \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - G_e - K_r C & G_e \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 - K_r H_2 \end{bmatrix} F(t) [E \ 0]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_a B_a^T &= \begin{bmatrix} W & W \\ W & W + K V K^T \end{bmatrix} \\ C_a &= [0 \ I]\end{aligned}\quad (6)$$

이다. 위의 확장 시스템 G_a 에 대하여 H_2 성능 지수는 다음과 같이 정의 된다[8].

$$\begin{aligned}\|G_a\|_2^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T e^T(t) e(t) dt \right\} \\ &= \|g_a\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} [g_a(t) g_a^T(t)] dt\end{aligned}\quad (7)$$

여기서 $g_a(t)$ 는 G_a 의 convolution kernel이며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_a(t) = C_a \exp(A_{aug} t) B_a, \quad \forall t \geq 0 \quad (8)$$

정리 2.1 : 만일 A_{aug} 가 Hurwitz 행렬이고 (A_{aug}, B_a)가 제어가능하다면 강인 칼만 필터 (4)는 H_2 성능 지수에 대한 상한계를 제공한다.

$$\|G_a\|_2^2 \leq \text{trace} [C_a L_c C_a^T] \quad (9)$$

여기서 $L_c > 0$ 는 다음의 부등식을 만족하는 행렬이다.

$$A_{aug} L_c + L_c A_{aug}^T + B_a B_a^T \leq 0 \quad (10)$$

증명: 위와 같은 가정이 성립한다면 다음의 Lyapunov 방정식을 만족하는 controllability Gramian $\tilde{L}_c > 0$ 가 존재한다[9].

$$A_{aug} \tilde{L}_c + \tilde{L}_c A_{aug}^T + B_a B_a^T = 0$$

이는 다음 부등식을 만족하는 행렬 L_c 가 존재하기 위한 필요 충분 조건이며[6],

$$A_{aug} L_c + L_c A_{aug}^T + B_a B_a^T \leq 0 \quad (11)$$

\tilde{L}_c 와 L_c 는 다음과 같은 관계가 있다.

$$0 < \tilde{L}_c \leq L_c \quad (12)$$

따라서 위의 부등식과 식 (7),(8)을 이용하면 식 (9)의 결과를 얻는다.

2.2 준최적 강인 칼만 필터의 설계

본 논문에서는 시스템 (1a)가 이차 안정하다는 가정과 정리 2.1을 이용하여, 허용 가능한 모든 불확실성에 대해 식 (9)와 같이 보장된 성능을 나타내는 강인한 칼만 필터 (4)를 설계한다.

정리 2.2 : 시스템 (1a)가 이차 안정하면 매우 작은 α 에 대하여 다음과 같은 대수 Riccati 방정식의 안정화 해(stabilizing solution) $X > 0$ 가 존재한다.

$$A^T X + X A + X \bar{W} X + \alpha E^T E = 0 \quad (13)$$

여기서 $\bar{W} = W + (1/\alpha) H_1 H_1^T$ 이다.

증명: 시스템 (1a)가 이차 안정하다는 것은 다음과 같은 형태의 Lyapunov 부등식을 만족하는 $\bar{X} > 0$ 가 존재하기 위한 필요 충분 조건이다[8].

$$[A + \Delta A(t)]^T \bar{X} + \bar{X} [A + \Delta A(t)] < 0 \quad (14)$$

위의 식은 식 (2)를 사용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\Omega &= A^T \bar{X} + \bar{X} A \\ &\quad < -\bar{X} H_1 F(t) E - E^T F^T(t) H_1^T \bar{X}\end{aligned}$$

즉, $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0$ 에 대하여

$$(\xi^T \Omega \xi)^2 > 4 \max \{ (\xi^T \bar{X} H_1 F(t) E \xi)^2 : \|F(t)\| < 1 \}$$

과 같다. 여기서 [5]의 결과를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$(\xi^T \Omega \xi)^2 - 4(\xi^T \bar{X} H_1 F(t) E \xi)^2 > 0$$

위 식으로부터 다음의 부등식을 만족하는 상수 $\lambda > 0$ 가 존재함을 알 수 있다.

$$\lambda^2 \bar{X} H_1 F(t) E + \lambda (A^T \bar{X} + \bar{X} A) + E^T E < 0$$

여기서 $\hat{X} = \lambda \bar{X}$ 라 하면,

$$A^T \hat{X} + \hat{X} A + \hat{X} H_1 F(t) E + E^T E < 0$$

이 되는데, 이는 매우 작은 α 에 대하여 다음 부등식과 같다.

$$A^T \hat{X} + \hat{X} A + \hat{X} (\alpha W + H_1 H_1^T) \hat{X} + E^T E < 0$$

이제, $\hat{X} = \alpha \bar{X}$ 로 놓으면 위의 부등식은 [11]의 결과에 의해 식 (13)을 만족하는 안정화 해 $X > 0$ 가 존재하기 위한 필요 충분 조건임을 알 수 있으며, $0 < X < (1/\alpha) \bar{X}$ 인 관계가 성립한다. †

정리 2.3 : 만일 A_{aug} 가 Hurwitz 행렬이고 (A_{aug}, B_a)가 제어가능하다면 다음과 같은 대수 Riccati 방정식에 대한 안정화 해 $Y > 0$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned}A_e Y + Y A_e^T - (Y C_e^T + (1/\alpha) H_1 H_2^T) \bar{V}^{-1} \\ \times (C_e Y + (1/\alpha) H_2 H_1^T) + \bar{W} = 0\end{aligned}\quad (15)$$

여기서

$$A_e = A + (W + (1/\alpha) H_1 H_1^T) X,$$

$$C_e = C + (1/\alpha) H_2 H_1^T X$$

$$\bar{V} = V + (1/\alpha) H_2 H_2^T \quad (16)$$

이며, \bar{W} 와 α 는 정리 2.2에서 정의된 것과 같다.

증명: 부등식 (10)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_e L_c + L_c A_e^T + B_e B_e^T + \alpha L_c E_e^T E_e L_c + (1/\alpha) H_e H_e^T \leq 0$$

여기서 $L_c = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$ 라 하고, 식 (6)의 파라미터를 대입한 후 등식이 성립하는 경우에 대하여 풀면 각 블록은 다음과 같이 전개된다.

1-1블럭:

$$AR + RA^T + \alpha RE^T E R + (1/\alpha) H_1 H_1^T + W = 0$$

1-2블럭(2-1블럭):

$$(A - G_e - K_r C)R + W + (1/\alpha) H_1 H_1^T - (1/\alpha) K_r H_2 H_1^T = 0$$

2-2블럭:

$$G_e Y + Y G_e^T + W + K_r V K_r^T + (1/\alpha) H_1 H_1^T - (1/\alpha) H_1 H_2^T K_r^T - (1/\alpha) K_r H_2 H_1^T + (1/\alpha) K_r H_2 H_2^T K_r^T = 0$$

1-1블럭에서 $R = X^{-1}$ 라 하면 식 (13)과 같음을 알 수 있으며, 식 (4)에서 $G_e = A_e - K_r C_e$ 인 관계를 이용하면 1-2블럭으로 부터 A_e 와 C_e 에 대한 정의의 식 (16)과 같이 할 수 있다. 여기서 K_r 을 다음과 같이 정의하면,

$$K_r = (Y C_e^T + (1/\alpha) H_1 H_2^T) \bar{V}^{-1} \quad (17)$$

2-2블럭으로 부터 식 (15)의 결과를 얻는다. #

이제, 식 (16)과 (17)에서 얻어진 값을 식 (4)에 대입하면 모든 허용가능한 불확실성 $F(t)$ 에 대해 성능지수의 상한계를 보장하는 강인한 칼만 필터를 설계할 수 있다.

3. 시뮬레이션 및 결론

다음과 같은 파라미터 불확실성을 포함한 선형 시불변 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 + \delta \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (18a)$$

$$y(t) = [-100 \quad 100 + \rho] x(t) + v(t) \quad (18b)$$

$$z(t) = [1 \quad 0] x(t) \quad (18c)$$

여기서 $w(t)$ 와 $v(t)$ 는 상관관계가 없는 영평균, 단위 공분산 행렬을 가지고 있는 백색 잡음이며, δ 와 ρ 는 각각 다음과 같은 범위를 가지는 불확실한 파라미터이다.

$$|\delta| \leq 0.3, \quad |\rho| \leq 12 \quad (19)$$

위의 주어진 시스템을 식 (2)와 같은 형태와 일치시키기 위하여 불확실성의 구조를 다음과 같이 선택한다.

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = 40, \quad E = [0 \quad 0.3] \quad (20)$$

본 시뮬레이션은 위와 같은 불확실한 모델을 가지는 시스템에 대해 정상 상태에서의 강인한 상태 추정을 하고자 하는 것으로서 식 (18c)의 변수인 $z(t)$, 즉 $x_1(t)$ 을 추정하는 것이 목적이다. 그러므로 본 논문에서 제안한 강인 칼만 필터는 다음과

같은 구조를 가진다.

$$\hat{x}(t) = A_e \hat{x}(t) + K_r [y(t) - C_e \hat{x}(t)] \quad (21a)$$

$$\hat{z}(t) = [1 \quad 0] \hat{x}(t) \quad (21b)$$

여기서 A_e, C_e, K_r 은 각각 식 (16)과 (17)에서 계산된 것과 같다. 그러면 추정 오차는

$$e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t)$$

로 정의되고, 시스템 (18)에 위의 필터를 적용했을 때의 H_2 성능 지수와 상한계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T e_z^T(t) e_z(t) dt \right\} \leq \text{trace} \left\{ [1 \quad 0] Y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

여기서 Y 는 정리 2.3에서 구해진 안정화 해인데, 이와 같은 성능지수의 상한계는 정리 2.2에서 정의된 파라미터 α 에 대한 convex 함수로서 나타나며, 이 파라미터는 대수 Riccati 방정식의 monotonicity 결과[10]에 의하여 $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$ 의 범위를 갖는다. 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

표 1. 파라미터 α 와 성능 지수 상한계의 관계
Table 1. Relation between the parameter α and the upper bound of the performance index.

α	0.05	0.1	0.3	0.315	0.318	0.325	0.3296
상한계	25.08	14.28	7.12	7.04	7.03	7.06	7.39

위의 표 1에서 보는 바와 같이 α 의 최적값은 $\alpha_{opt} = 0.318$, 이때의 성능지수 상한계는 7.03이며, $\bar{\alpha} = 0.3296$ 으로 나타났다. 그림 1은 $\delta = 0.15, \rho = 6$ 인 경우에 표준 칼만 필터와 제안된 필터의 상태 추정 결과를 나타낸 것이다.

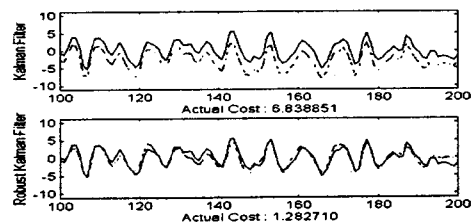


그림 1. 표준 칼만 필터와 제안된 필터의 성능 비교

Fig 1. Performance comparison between the standard Kalman filter and the proposed filter

이제 불확실한 파라미터 δ, ρ 각각의 값에 대한, 표준 칼만 필터와 본 논문에서 제안한 강인 칼만 필터의 실제 성능 지수를 나타내면 표 2와 같다. 표 2의 결과를 보면 파라미터 불확실성이 없는 경우 외에도 두 개의 불확실한 파라미터가 서로 다른 sign을 가지는 경우 표준 칼만 필터가 더 나은 성능을 보였으나, 성능 지수의 평균치를 보면 표준

필터의 경우 11.36, 제안된 필터의 경우 1.179로서 평균적으로는 제안된 필터가 파라미터 불확실성에 대해 훨씬 강한 성능을 가진다는 결론을 얻었다.

표 2. 불확실한 파라미터 값에 따른 표준 칼만 필터와 제안된 필터의 실제 성능 지수 비교

Table 2. Actual performance index comparison between the standard Kalman filter and the proposed filter according to uncertain parameter values

	실제 성능 지수				
δ	0	0.3	0.3	-0.3	-0.3
ρ	0	12	-12	12	-12
표준	0.052	43.64	0.748	0.213	12.13
칼만 필터					
제안된 강인	0.764	2.639	1.096	0.688	0.711
칼만 필터					

[참 고 문 헌]

[1] R.G. Brown and P.Y.C. Hwang, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, Third Edition, John Wiley & Sons, 1997.

[2] Bor-Sen Chen and Tay-Yuh Dong, "Robust stability analysis of Kalman-Bucy filter under Parametric and noise uncertainties", *Int. J. Contr.*, 1988, Vol. 48, No. 6, 2189-2199.

[3] Minyue Fu, Carlos E. De Souza and Lihua Xie, " H_∞ Estimation for Uncertain Systems", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 2, 87-105, 1992.

[4] Lihua Xie and Yeng Chai Soh, "Robust Kalman filtering for uncertain systems", *Systems & Control Letters* 22 (1994) 123-129.

[5] P.P. Khargonekar, I.R. Petersen, and Kemin Zhou, "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stability and H^∞ Control Theory", *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, Vol. 35, No. 3, pp 356-361, March 1990.

[6] Dorato, Abdallah, Cerone, *Linear-Quadratic Control: An Introduction*, Prentice Hall, 1995.

[7] Urban Forssell, "On H_2 and H_∞ Optimal Estimation", ufo@isy.liu.se.

[8] Gahinet et al, *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB*, The MathWorks Inc.

[9] Kemin Zhou, John C. Doyle and Keith Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

Discrete-time Bounded Real Lemma with application in the characterization of static state feedback H_∞ controllers", *Systems & Control Letters* 18 (1992) 61-71.

[11] Ian R. Petersen, "Disturbance Attenuation and H^∞ Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation", *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, Vol. AC-32, No. 5, May 1987.

[10] Carlos E. de Souza and Lihua Xie, "On the