블럭펄스 함수 미분 연산식을 이용한 시스템 해석에 관한 연구

안비오[§], 심재선[§§], 채영무[§§§], 안두수[§]
§ 성균관대학교, §§ 삼척산업대학교, §§§ 충주산업대학교

Analysis of Linear System by using Block Pulse function's Differential Operation

Pius Ahn[§], J. S. Sim[§§], Y. M. Chae[§§§], D. S. Ahn[§]
§Sung Kyun Kwan Univ. §§Sam Chuk Ind. Univ. §§§Chung Ju Ind. Univ

Abstract - For the last two decades, many researchers have interests in orthogonal functions by reason of its applicability on linear system analysis. But they only used integral operation matrix of orthogonal functions to solve the state space equations. Thus, this paper present some new result of differential operation of block-pulse functions from a numerical point of view.

1. 서 론

직교함수를 이용하여 시스템 해석을 할 경우 얻을 수 있는 장점은 행렬 미분 방정식으로 표현된 시스템 방정식의 해를 간단한 대수적인 형태로 구할 수 있다는 것이다. 이러한 이유로 지난 수년간 직교함수를 이용한 시스템 해석에 대한 대수적 접근이 많이 이루어져 왔다. 대표적인 직교함수로는 월쉬 함수, 블럭펄스 함수, 하알 함수등이 있으며 1973년 Corrington[1]에 의해 월쉬 함수 적분 연산 행렬이 도입되면서 그 응용가치를 높이게 되었다. 최근 들어 시스템의 형태가 복잡해지면서 직교함수의 적분 연산식과 함께 미분 연산식의 개념이 요구되고 있다. 그러나 현재까지의 미분 연산식의 유도는[2],[3] 직교함수의 직교성을 이용하기보다는 변분법적 해석을 재 표현한 형태로 응용성에서 그리 좋은 평가를 받지 못하고 있는 것이 사실이다. 이에 본 연구에서는 직교 함수 미분 연산식 유도에 기초가 될 수 있는 블럭펄스 함수의 미분연산식을 블럭펄스 함수의 직교성을 이용하여 반복적 형태로 유도하고, 이를 이용하여 상태공간에서 표현된 시스템의 상태방정식의 해를 구하여 그 응용성을 검증하고자 한다.

2. 블럭펄스 함수 미분 연산식의 유도와 상태 방정식의 해

2장에서는 먼저, 블럭펄스 함수의 수렴성에 대해서 정의하고, 블럭펄스 함수의 미분 연산식을 유도하고자 한다. 다음의 <정리 1>은 임의의 실유계 연속함수 $x(t)$ 가 블럭펄스 함수 m (여기서 $1 \ll m$) 항 전개를 할 경우 원함수에 점근 수렴함을 나타내고, <정리 2>는 함수 $x(t)$ 의 미분된 값 $\dot{x}(t)$ 가 함수 $x(t)$ 의 블럭펄스함수 계수벡터와 초기값만을 이용하여 근사화 할 수 있음을 보인 것으로 본 연구에서 새로운 접근을 통해 식(1)로 표현된 상태 방정식의 해를 대수적으로 구하기 위함이다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

<정리 1>
임의의 실유계 연속함수 $x(t)$는 구간 $t \in [0, t_f)$에서 다음의 관계식을 만족하는 블럭펄스 함수의 전개항수 m 이 존재한다. 여기서, ε 은 $\varepsilon \geq 0$ 인 임의의 실수이다.

$$\int_0^{t_f} \left(x(t) - \sum_{i=1}^{m} X_i \phi_i(t) \right)^2 dt \leq \varepsilon \tag{2}$$

■ <정리 1>의 증명은 참고문헌[4]을 참조

<정리 2>
임의의 실유계 연속함수 $x(t)$의 미분값 $\dot{x}(t)$는 구간 $t \in [0, t_f)$에서 $x(t)$의 블럭펄스 함수 m 항 전개시의 계수벡터 $\mathbf{X}^T = [\ X_1 \ \ X_2 \ \cdots \ X_m]$와 초기값 $x(0)$를 이용하여 근사화 할 수 있다. 즉, 식(3)을 만족시키는 전개항수 m 이 존재한다.

$$\int_0^{t_f} \left(\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} \Gamma_i [X_i , x(0)] \cdot \phi_i(t) \right)^2 dt \leq \varepsilon \tag{3}$$

여기서, ε 은 $\dot{x}(t) \cong \sum_{i=1}^{m} \overline{X}_i \phi_i(t)$ $\varepsilon \geq 0$ 인 임의의 실수이고,, $\overline{\mathbf{X}} = [\ \overline{X}_1 \ \ \overline{X}_2 \ \cdots \ \overline{X}_m]^T$ 와 $\Gamma_i [X_i , x(0)] = \overline{X}_i$ 의 관계이다.

■ 증 명
식(2)로부터 블럭펄스 함수의 직교성을 이용하여 함수 $\dot{x}(t)$ 의 i 번째 구간의 블럭펄스 함수 계수값

을 식(4)와 같이 표현할 수 있다.

$$\overline{X}_i = \Gamma_i[X_i, x(0)] = \frac{m}{t_f}\int_{(i-1)t_f/m}^{i\,t_f/m} \dot{x}(t)dt \quad (4)$$

먼저, 첫번째 계수값을 살펴보면,

$$\overline{X}_1 = \Gamma_1[X_1, x(0)] = \frac{m}{t_f}\int_0^{t_f/m} \dot{x}(t)dt \quad (5)$$

만약 첫번째 구간 $t \in [0, t_f/m)$ 가 $\Delta t_k\ (k=1,2,\cdots,p)$ 의 값으로 p 구간 분할되고, 각각의 세부구간에서 임의의 점 τ_k를 선택하면, 식(6)과 같은 Riemann 합을 구할 수 있다.

$$R(\dot{x}) = \sum_{k=1}^{p} \dot{x}(\tau_k)\Delta t_k \quad (6)$$

여기서, Δt_λ 가 $\Delta t_k\ (k=1,2,\cdots,p)$ 중의 가장 큰값이라고 하면, $R(\dot{x})$ 는 $\Delta t_\lambda \to 0$ 가 되면 극한값을 갖는다.

$$\int_0^{t_f/m} \dot{x}(t)dt = \lim_{\Delta t_\lambda \to 0} R(\dot{x}) = \lim_{\Delta t_\lambda \to 0}\sum_{k=1}^{p} \dot{x}(\tau_k)\Delta t_k \quad (7)$$

앞에서, $\Delta t_k, \tau_k$를 임의로 선택하였으므로 각각 $\Delta t_k = \Delta t = t_f/(pm)$, $\tau_k = (k-1)\Delta t$ 로 선택하여도 식(6)과 같은 Riemann합을 구할 수 있다. 따라서, 식(5)의 첫번째 계수값은 식(7)을 이용하여 식(8)과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{X}_1 = \Gamma_1[X_1, x(0)] = \lim_{\Delta t \to 0}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{p}\dot{x}((k-1)\Delta t) \quad (8)$$

식(8)에서 $\lim_{m\to\infty}\Delta t = 0$ 이므로,

$$\lim_{m\to\infty}\Gamma_1[X_1, x(0)] = \dot{x}(0) \quad (9)$$

결국, 전개항수 $m\to\infty$ 임에 따라서 $\dot{x}(0)$ 는 X_1 과 $x(0)$로서 표현할 수 있다. 이제, $\dot{x}(t)$ 를 임의의 $t_i \in [0, t_f)$ 만큼 음의 방향으로 이동 시킨뒤 구간 $t \in [0, t_f)$에서 적분하면,

$$\frac{m}{t_f}\int_0^{t_f/m}\dot{x}(t+t_i)dt = \frac{m}{t_f}\int_{t_i}^{t_i+t_f/m}\dot{x}(t)dt$$
$$= \Gamma_i[X_i, x(0)] \quad (10)$$

$$\lim_{m\to\infty}\Gamma_i[X_i, x(0)] = \dot{x}(t_i) \quad (11)$$

결국, 식(11)로 부터 전개항수 $m\to\infty$에 따라서, $\dot{x}(t_i)$의 블럭펄스 함수 계수 벡터 $\overline{X}_i$는 X_i과 $x(0)$로서 표현할 수 있음을 알 수 있다. 즉, 식(3)의 $\int_0^{t_f}\left(\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m}\Gamma_i[X_i, x(0)]\cdot\phi_i(t)\right)^2 dt \le \varepsilon$ 을 만족하는 전개항수 m이 존재한다. ■

이제, <정리 2>를 이용하여 임의의 실유계 연속함수 $f(t)$의 미분이 어떤 형태로 블럭펄스 함수 전개되는지를 살펴보겠다. 먼저, 임의의 실유계 연속 함수 $f(t)$를 <정리 1>을 이용하여 블럭펄스 함수 m항 전개 할 수 있다.

$$f(t) \simeq \sum_{i=1}^{m}F_i\phi_i(t) = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{\Phi}$$
$$\text{여기서, } \boldsymbol{F}^T = [\,F_1\ \ F_2 \cdots F_m\,] \quad (12)$$

이제, 미분된 함수 $\dot{f}(t)$ 를 $f(t)$의 블럭펄스 함수 계수벡터 $\boldsymbol{F}$ 와 $f(0)$만으로 나타내기 위해 먼저 $\dot{f}(t)$를 적분하면,

$$\int_0^t \dot{f}(\tau)d\tau = f(t) - f(0) \quad (13)$$

식(13)을 블럭펄스 함수 전개식으로 표현하고, 참고문헌[4]에 소개된 적분 근사식을 이용하면 식(14), (15)을 구할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{F}_i\int_0^t\phi_i(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{m}F_i\phi_i(t) - \sum_{i=1}^{m}f(0)\phi_i(t) \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{F}_i\left[\frac{t_f}{2m}\phi_i(t) + \frac{t_f}{m}\sum_{j=i+1}^{m}\phi_j(t)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{m}F_i\phi_i(t) - \sum_{i=1}^{m}f(0)\phi_i(t) \quad (15)$$

식(15)를 풀어쓰면 식(16)과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{t_f}{m}\times\Big\{\ & \overline{F}_1\left(\frac{1}{2}\phi_1(t)+\phi_2(t)+\phi_3(t)+\cdots+\phi_m(t)\right)\\
&+\overline{F}_2\left(\frac{1}{2}\phi_2(t)+\phi_3(t)+\phi_4(t)+\cdots+\phi_m(t)\right)\\
&\qquad\vdots\\
&+\overline{F}_i\left(\frac{1}{2}\phi_i(t)+\phi_{i+1}(t)+\phi_{i+2}(t)+\cdots+\phi_m(t)\right)\\
&+\overline{F}_{i+1}\left(\frac{1}{2}\phi_{i+1}(t)+\phi_{i+2}(t)+\phi_{i+3}(t)+\cdots+\phi_m(t)\right)\\
&\qquad\vdots\\
&+\overline{F}_m\left(\frac{1}{2}\phi_m(t)\right)\Big\}\\
=\{\ & F_1\phi_1(t)+F_2\phi_2(t)+F_3\phi_3(t)+\cdots+F_m\phi_{m(t)}\ \}\\
-\{&f(0)\phi_1(t)+f(0)\phi_2(t)+f(0)\phi_3(t)+\cdots+f(0)\phi_m(t)\}
\end{aligned} \quad (16)$$

식(16)의 양변에 $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_m(t)$을 차례로 곱하여 블럭펄스 함수의 배타성을 이용하고, 양변에 $\phi_i(t)$ 를 소거하면 식(17)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\frac{t_f}{2m}\overline{F}_1 = F_1 - f(0)\\
&\frac{t_f}{m}\left(\overline{F}_1 + \frac{1}{2}\overline{F}_2\right) = F_2 - f(0)\\
&\quad\vdots\\
&\frac{t_f}{m}\left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_{i-1} + \frac{1}{2}\overline{F}_i\right) = F_i - f(0)\\
&\frac{t_f}{m}\left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_i + \frac{1}{2}\overline{F}_{i+1}\right) = F_{i+1} - f(0)\\
&\quad\vdots\\
&\frac{t_f}{m}\left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_{m-1} + \frac{1}{2}\overline{F}_m\right) = F_m - f(0)
\end{aligned} \quad (17)$$

따라서, 식(17)로부터 $\overline{F}_i$에 대해서 정리하면 식(18)과 같이 $\dot{f}(t)$의 블럭펄스 함수 m항 전개시의 계수벡터 $\overline{F}_i$를 F_i와 $f(0)$ 를 이용하여 반복적으로 구할 수 있다.

$$\overline{F}_1 = \frac{2m}{t_f}[\ F_1 - f(0)\ ]$$
$$\overline{F}_{i+1} = \frac{2m}{t_f}[\ F_{i+1} - F_i\ ] - \overline{F}_i$$
$$\text{여기서, } i = 1, 2, \cdots, m-1 \quad (18)$$

식(18)을 일반식으로 나타내면 다음의 식(19)와 같

고, 블럭펄스 함수 계수값이 구간평균값을 취하므로 식(20)을 구할 수 있다.

$$\overline{F}_i=\frac{2m}{t_f}\left[F_i+\left(2\times(-1)^i\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j F_j\right)+(-1)^i f(0)\right] \quad (19)$$

$$f\left(i\frac{t_f}{m}\right)=2\overline{F}_i-f\left((i-1)\frac{t_f}{m}\right) \quad \text{여기서, } i=1,2,\cdots,m \quad (20)$$

이제, 앞에서 유도된 식(20)을 이용하여 함수 t, $\frac{1}{2}t^2$, $\sin(t)$ 와 e^{-t} 의 미분값을 제안된 블럭펄스 함수 미분 연산식으로부터 구하고, 이들 함수의 각각의 미분값인 1, t, $\cos(t)$, 와 $-e^{-t}$ 와 비교하겠다. 샘플링 타임은 말단시간 t_f 를 10초로 하고 블럭펄스 전개 항수 m 을 100과 1000으로하여 각각 0.1초와 0.01초 두 경우로 하여 비교하였다. 표1에서 나타낸 오차값은 식(21)로 정의한 평균자승 오차로부터 구했으며, 예제의 수행은 MATLAB M-FILE을 이용하여 프로그램화하였다.

$$\mathrm{Error}=\frac{1}{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}f\left(i\frac{t_f}{m}\right)_{real}-\frac{d}{dt}f\left(i\frac{t_f}{m}\right)_{bpf}\right]^2} \quad (21)$$

여기서, $i=1,2,\cdots,m$

표 1. 블럭펄스 함수 미분 연산식으로 구한 $f(t)$의 미분값과 실제값사이의 최소자승오차 비교

t_f/m \ $f(t)$	t	$\frac{1}{2}t^2$	$\sin(t)$	e^{-t}
0.1 sec.	0.0000	0.0000	2.5736×10^{-4}	2.2861×10^{-4}
0.01 sec.	0.0000	0.0000	8.1360×10^{-7}	7.8546×10^{-7}

결국, 표1에서 보인바와 같이 제안된 블럭펄스 함수 미분 연산식이 실제의 계산에서 미분식을 대수식으로 계산할 수 있으므로 매우 유용함을 알 수 있다. 이제 식(1)로 표현되는 상태 방정식의 해를 제안된 블럭펄스 함수 미분 연산식을 이용하여 대수적으로 구하자. 먼저, <정리 1>을 이용하여 $x(t)$, $u(t)$ 를 m개의 블럭펄스 함수를 이용하여 식(22),(23)과 같이 근사적으로 표현할 수 있고, 마찬가지로 <정리 2>를 이용하여 $\dot{x}(t)$를 (24)와 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t)\simeq\sum_{i=1}^{m}X_i\phi_i(t)=X^T\Phi,\quad X^T=[X_1\ \ X_2\cdots X_m] \quad (22)$$

$$u(t)\simeq\sum_{i=1}^{m}U_i\phi_i(t)=U^T\Phi,\quad U^T=[U_1\ \ U_2\cdots U_m] \quad (23)$$

$$\dot{x}(t)\simeq\sum_{i=1}^{m}\overline{X}_i\phi_i(t)=\overline{X}^T\Phi$$

$$\overline{X}^T=[\overline{X}_1\ \ \overline{X}_2\cdots\overline{X}_m] \quad (24)$$

이제 식(1)을 블럭펄스 함수 전개식으로 표현하면 식(25)와 같다.

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{X}_i\phi_i(t)=A\cdot\sum_{i=1}^{m}X_i\phi_i(t)+B\cdot\sum_{i=1}^{m}U_i\phi_i(t) \quad (25)$$

식(19)의 관계를 이용하여 식(25)를 재표현하면,

$$\overline{X}_{i+1}+\overline{X}_i=\frac{2m}{t_f}(X_{i+1}-X_i)$$

$$\overline{X}_{i+1}+\overline{X}_i=A\cdot(X_{i+1}+X_i)+B\cdot(U_{i+1}+U_i) \quad (26)$$

행렬 $\left[I_{n-q}-\frac{t_f}{2m}A\right]$가 정칙이라는 가정하에 식(26)을 (27)과 같이 반복적 연산식으로 표현할 수 있다. 여기서, $\left[I_{n-q}-\frac{t_f}{2m}A\right]$는 말단시간 t_f와 블럭펄스 함수 전개항수 m 의 적절한 선택으로 항상 정칙이 되도록 할 수 있다.

$$X_1=\left[I_{n-q}-\frac{t_f}{2m}A\right]^{-1}\left[x(0)+\frac{t_f}{2m}B\cdot U_1\right]$$

$$X_{i+1}=\left[I_{n-q}-\frac{t_f}{2m}A\right]^{-1}\left[\left(I_{n-q}+\frac{t_f}{2m}A\right)X_i\right.$$

$$\left.+\frac{t_f}{2m}B(U_{i+1}+U_i)\right] \quad \text{여기서, } i=1,\ 2,\ \cdots,m-1 \quad (27)$$

따라서, 식(20)과 유사하게 식(28)을 구할 수 있다.

$$x\left(i\frac{t_f}{m}\right)=2x_i-x\left((i-1)\frac{t_f}{m}\right) \quad \text{여기서, } i=1,2,\cdots,m \quad (28)$$

3. 결 론

본 연구에서는 시스템해석을 위한 블럭펄스 함수 미분 연산식을 제안하였다. 제안된 방법은 기존의 변분법적 근사화에 비해 블럭펄스 함수의 직교성을 이용하여 접근함으로써 좀더 체계적인 반복식 유도가 가능하였다. 제안된 방법은 기저함수로 많이 쓰이는 4개의 함수에 대해 적용해 보았으며, 만족할 만한 결과를 구할 수 있었다. 상태 방정식의 해 역시 제안된 미분 연산식을 통해 유도하였으며, 유도된 식이 적분 연산식을 이용하여 구한 것과 같지만 그 유도 과정이 좀더 간결함을 알 수 있다.

[참 고 문 헌]

[1] M. S. Corrington, "Solution of differential and integral equations with Walsh functions," IEEE Trans. Cir. Theory, Vol. 20, pp470-476, 1973

[2] F. Kraus and W. Schaufelberger, "Identification with block-pulse functions, modulating functions and differential operators," Int. J. Cont., vol. 51, pp 931-942, 1990.

[3] Pius Ahn, Min-Hyung Kim and Doo-Soo Ahn,"An Algebraic Method to Design of Unknown Input Observer," Fourth International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Singapore, Dec. 1996.

[4] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, "Block pulse functions and their applications in control systems," Springer-Verlag, 1992.