

이차원 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터에 관한 연구

곽대연*, 강창식*, 박진배*, 윤태성**
 연세대학교 전기공학과*, 창원대학교 전기공학과**

A Study on the 2-Dimensional Hadamard Transform Spectrometers

Dae Yun Kwak*, Chang Sik Kang*, Jin Bae Park*, Tae Sung Yoon**
 Dept. of Elect. Eng. Yonsei Univ.*, Dept. of Elect. Eng. Chang Won National Univ.**

Abstract - Hadamard Transform Spectrometer (HTS) is an instrument which measures the spectrum of a source with high signal to noise ratio using multiplexing advantage. While the conventional HTS has the 1-dimensional characteristics because it measures only the spectrum, the system presented in this paper is 2-dimensional so that it can measure the spectrum of each position. We introduce here 2-dimensional Hadamard transform spectrometer and analyze it. The T^{-1} method which recover the spectrum and compensate the transmissive nonideality of the stationary electro-optical mask(EOM) are applied to the system. By computer simulations we show we can get better estimates from the proposed system than that from the conventional HTS.

한개의 전자광학마스크를 설치하여 입력측 마스크로부터 공간 영역의 정보를 얻고 출력측 마스크로부터 스펙트럼 정보를 획득, 분석하는 이차원 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터를 설계하고자 한다. 또한 기존의 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터와 평균자승오차(MSE) 항목으로 분석하고 컴퓨터 모의 실험을 통하여 2차원 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터의 우수성을 입증한다.

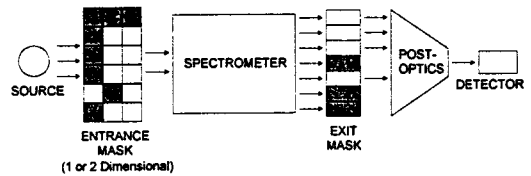


그림 1 이차원 HTS의 개요도
 Fig. 1 The schematic of 2-dimensional HTS

1. 서 론

과학과 공학의 여러분야에 공통된 문제점 중의 하나는 신호의 주파수 스펙트럼을 정확하게 개산(estimate)하는 것으로 이를 달성하기 위해서는 신호대 잡음비(SNR)를 높여야한다. 만약 잡음이 주로 검파기(detector)에 의해 발생하고 검파기에 입사되는 빛의 크기와 무관하다면 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터(HTS)의 근본적인 특성인 다중화기법(multiplexing)을 사용해 신호대잡음비를 높일 수 있으므로 향상된 스펙트럼을 얻을 수 있다[1].

HTS는 다중화 방법으로 전자광학마스크를 사용한다[2]. 전자광학마스크에서 각각의 셀은 빛을 차단하는 "off" 상태와 빛을 통과시키는 "on"상태로 전기적인 전환이 가능하다. 이는 기존의 기계식 마스크가 가진 기계적 문제점을 해결했지만 마스크의 비이상적(nonideal)투과율 특성때문에 또다른 문제점을 발생시킨다. 그러나 최근에 이러한 비이상적인 특성을 보완하는 T^{-1} 방법이 개발되었다[3][4].

본 논문에서는 그림 1과 같이 입력과 출력에 각각

2. 본 론

2.1 마스크의 특성분석

본 연구에는 PDLC(polymer-dispersed liquid crystal)를 재료로한 고정형 전자광학마스크를 사용하고 마스크의 특성을분석하였다.

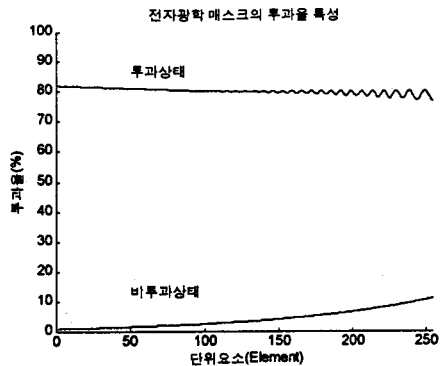


그림 2. 전형적인 전자광학 마스크의 일종인 PDLC 마스크의 투과율 특성곡선

Fig. 2 The characteristic curvature of conventional EOM, PDLC mask

이러한 고정형 전자광학 마스크에서 각각의 셀은 빛을 산란(scattering)하는 "off" 상태와 빛을 통과시키는 "on" 상태로 전기적인 스위칭이 가능하다. 그림 2는 전형적인 PDLC 마스크의 투과율 곡선을 보여준다. 이러한 PDLC 마스크는 기계적인 문제점을 해결했지만 주지한 바와 같이 비이상적 투과율 특성(nonideal transmittance characteristics)을 갖는다.

2.2 주파수 영역 해석

비이상적인 마스크의 투과율 특성은 N-정방 행렬 \tilde{W} 로 표현되고, 그것의 요소(element) \tilde{w}_{ij} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{w}_{ij} = \begin{cases} \tau_{0j}, & i\text{-번째 측정에서} \\ & j\text{-번째 요소가 불투명할 때} \\ \tau_{1j}, & i\text{-번째 측정에서} \\ & j\text{-번째 요소가 투명할 때} \end{cases} \quad (1)$$

식 (1)에 의해 표현되는 \tilde{W} 는 다음과 같이 1과 0으로 구성된 행렬 W 와 전달행렬 T 를 사용하여 표현할 수 있다.

$$\tilde{W} = WT$$

측정 방법을 나타내는 행렬 W 에서 1은 "on" 일때를, 0은 "off" 일때를 나타낸다. 그리고, T 는 마스크의 투과율에 따라 달라지는데, 만약 이상적 마스크(ideal mask)가 사용되면 $T=I$ 가 된다. 이에 대한 모델링을 위해 다음과 같이 몇개의 행렬과 벡터를 정의하자.

$$D = \text{diag}[d_1 d_2 \dots d_N] \\ = \text{diag}[\tau_{t1} - \tau_{o1} \quad \tau_{t2} - \tau_{o2} \quad \dots \quad \tau_{tN} - \tau_{oN}]$$

$$1 = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$$

$$\tau_o = [\tau_{o1} \ \tau_{o2} \ \dots \ \tau_{oN}]^T$$

이를 이용하면, \tilde{W} 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{W} = WD + 1\tau_o^T = W[D + W^{-1}1\tau_o^T] \quad (2)$$

식 (2)에서 다음과 같이 전달 행렬을 구할 수 있다.

$$T = D + W^{-1}1\tau_o^T \quad (3)$$

2.3 수학적 모델 설정

입력 마스크는 M개의 슬릿(slits), 출력 마스크는 N개의 슬릿을 갖고 있다고 가정하면, 개산되는 스펙트럼 ϕ 는 $M \times N$ 행렬로 표시된다.

그리고 입력 신호는 입력마스크를 묘사하는 M-정방 행렬 \tilde{V} 와 출력마스크를 묘사하는 N-정방행

렬 \tilde{W} 에 의하여 부호화된다. \tilde{V} 와 \tilde{W} 는 다음 식과 같이 표현된다.

$$\tilde{V} = VT_M, \quad \tilde{W} = WT_N \quad (4)$$

여기서 전달 행렬 T_M 과 T_N 은 각각 입력 마스크와 출력 마스크의 투과율에 따라 달라진다.

$M \times N$ 행렬 η 는 MN개의 가능한 패턴(pattern)의 각각에 대해 검파기를 통해 얻어진 빛의 강도(intensity)를 뜻한다. 또한 측정 벡터(vector) η 는 $M \times N$ 행렬 e 로 표시되는 검파기 잡음을 포함하고 있다. 그러므로 기본적인 관계식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\eta = \tilde{V}\phi\tilde{W}^T + e \quad (5)$$

정해진 부호화 패턴에 따라 실험을 하면, 실제 스펙트럼 ϕ 에 대한 개산치 $\hat{\phi}$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\hat{\phi} = \tilde{V}^{-1}\eta(\tilde{W}^T)^{-1} \quad (6)$$

2차원 HTS 종합 시스템을 구성하고자 할 때 남은 과제는 스펙트럼 회복방법이 최적이 되는가를 평가하는 기준을 정하는 것이다.

본 연구에서는 평균자승오차(MSE)를 평가 기준으로 정했다. 이때 $\hat{\phi}$ 에 대한 average MSE는 다음과 같다.

$$\epsilon = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N E[(\hat{\phi}_{ij} - \phi_{ij})^2] \quad (7)$$

이는 다음식으로 변형할 수 있다.

$$\epsilon = \frac{\sigma^2}{MN} \text{Trace}[(\tilde{V}^T \tilde{V})^{-1}(\tilde{W}^T \tilde{W})^{-1}] \quad (8)$$

이제 우리는 스펙트럼 회복을 위해 위에서 제시한 T^{-1} 방법을 사용한다. S^{-1} 방법은 이상적이 마스크에 대하여는 좋은 결과를 얻을 수 있지만, 전자광학 마스크에 대하여는 마스크의 비이상적 투과율 특성을 보상하지 못하므로 시스템 오차(systematic error)를 야기한다. 반면에 T^{-1} 방법은 이상적인 마스크나 전자광학 마스크에 모두 무편차선형개산치(unbiased linear estimate)를 제공하고 이상적인 마스크에 대하여는 S^{-1} 방법과 동일한 결과를 얻는다. T^{-1} 방법은 최적무편차 선형개산치를 제공하므로 정확성, 계산상의 효율, 통계적 편차등을 고려해 볼때 가장 바람직한 방법이다.

2.4 T^{-1} 방법

우리는 T^{-1} 방법[4]을 이차원 HTS에 적용할 수 있다.

식 (6)에서 스펙트럼 개산치는 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \tilde{V}^{-1} \pi (\tilde{W}^T)^{-1} \\ &= \phi + (S_M T_M)^{-1} e [(S_N T_N)^T]^{-1} \quad (9) \\ &= \phi + T_M^{-1} S_M^{-1} [T_N^{-1} S_N^{-1} e^T]^T\end{aligned}$$

식 (3)과 Sherman-Morrison[5] 공식을 사용하여 T^{-1} 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}T_M^{-1} &= D_M^{-1} - q_M D_M^{-1} 1_M \tau_{oM}^T D_M^{-1} \\ T_N^{-1} &= D_N^{-1} - q_N D_N^{-1} 1_N \tau_{oN}^T D_N^{-1}\end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned}q_M &= \frac{2}{(M+1) + 2 \sum_{k=1}^M \frac{\tau_{oMk}}{d_{Mk}}} \\ q_N &= \frac{2}{(N+1) + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\tau_{oNk}}{d_{Nk}}}\end{aligned} \quad (11)$$

식(10)을 이용하여 T^{-1} 를 쉽게 얻을 수 있고 S^{-1} 는 FHT(fast Hadamard transform)[3]를 이용하여 얻을 수 있다.

식 (9)에서 알 수 있듯이 일차원 HTS 경우와 같이 스펙트럼 개산치는 $E[\hat{\phi}] = \phi$ 이기 때문에 편향되지 않는다.

그림 3은 이 방법을 사용하는 이차원 HTS의 블럭 선도를 보인다.

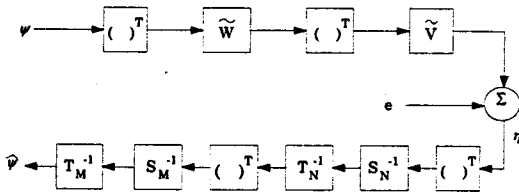


그림 3 T^{-1} 방법을 이용한 이차원 HTS의 블럭다이어그램

Fig. 3 Block diagram of 2-dimensional HTS using T^{-1} method

식 (8)에서 다음처럼 비 공가산(즉 $L = 1$ 일때)의 경우에 대해 평균 MSE를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\epsilon(1) &= \epsilon \\ &= \frac{\sigma^2}{MN} \text{Trace}[(\tilde{V}^T \tilde{V})^{-1} (\tilde{W}^T \tilde{W})^{-1}]\end{aligned} \quad (12)$$

큰 M과 N에 대해서 $T \approx D$ 이므로 식 (12)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon(1) = \frac{16\sigma^2}{(M+1)^2(N+1)^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{1}{d_{Mi}d_{Nj}}$$

여기서 M과 N이 커지면 평균자승오차가 0이 되므

로 이 방법과 관련된 시스템 오차는 없음을 알 수 있다.

L번의 공가산 후에 평균 MSE는 다음과 같다.

$$\epsilon(L) = \frac{16\sigma^2}{L(M+1)^2(N+1)^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{1}{d_{Mi}d_{Nj}} \quad (13)$$

3. 실험 및 고찰

본 연구에서 개발된 스펙트럼 회복방법의 성능 평가를 위하여 컴퓨터 모의실험을 하였다.

본 실험에서 측정 샘플은 그림 4처럼 스펙트럼 영역에서 127개의 단위요소를 가지고 있는 것으로 정의 하였다. 즉 입력 마스크와 출력 마스크의 단위 요소의 갯수는 각각 127이다. 검파기 잡음은 정규 분포(Gaussian distribution)를 갖는 임의변수(random variable)로 평균은 영(zero)이고 분산(variance)은 0.01이며 공가산(coaddition)은 수행하지 않았다. 스펙트럼 회복방법으로는 T^{-1} 방법을 사용하였다.

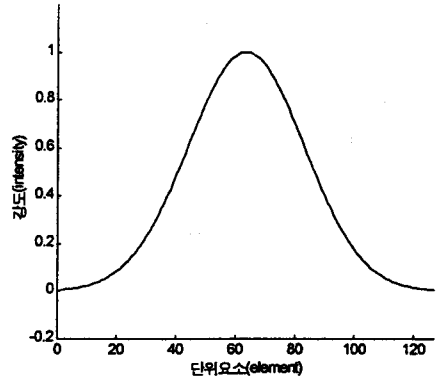


그림 4. 입력스펙트럼
Fig. 4 Input spectrum

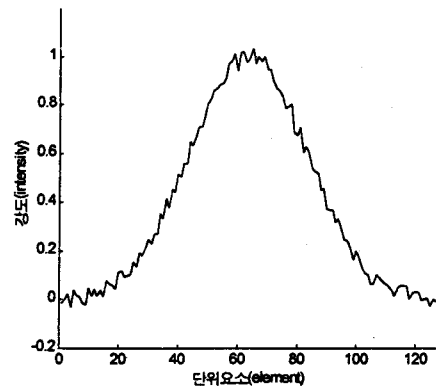


그림 5. HTS를 사용하여 복원한 스펙트럼
Fig. 5 Recovered spectrum using conventional HTS

잡음이 긴 스펙트럼은 다중화기법을 사용한 HTS를 통해 잡음을 줄일 수 있고 향상된 스펙트럼을 얻을 수 있다. 그림 5는 HTS를 사용하여 복원된 스펙트럼이다. 그러나 그림에서 보아 알 수 있듯이 잡음이 충분히 제거되지는 않았다.

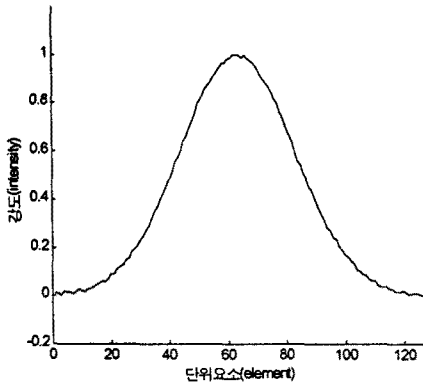


그림 6. 2차원 HTS를 사용하여 얻은 복원 스펙트럼
Fig. 6 Recovered spectrum using 2-dimensional HTS

그림 6은 2차원 HTS를 사용하여 복원된 스펙트럼이다. 그림 6을 그림 4, 그림 5와 비교해 보았을 때 그 성능이 눈에 띄게 향상 되었음을 알 수 있다. 즉, 2차원 HTS를 사용함으로써 복원된 스펙트럼의 잡음이 충분히 제거 되어 입력 스펙트럼과 매우 유사함을 알 수 있다.

각 경우에 대한 평균자승오차는 다음 표 1에 나타나 있다.

표 1. 평균자승오차의 비교
Table 1. Comparison of AMSE

시스템 공가산	Mono- chromator	HTS	2차원 HTS
1회	1.00×10^{-1}	4.99×10^{-4}	2.49×10^{-5}
100회	1.00×10^{-3}	4.99×10^{-6}	2.49×10^{-7}

4. 결 론

본 연구에서는 이차원 하다마드 트랜스폼 스펙트럼미터에 관한 수학적 모델을 정립하였다. 그리고, 스펙트럼 복원 방법인 T^{-1} 방법을 이에 적용하여 2차원 HTS를 위한 스펙트럼 복원 시스템을 설계하였다. 2차원 HTS와 기존의 HTS는 같은 광원에 대하여 측정하는 횟수는 같으나 2번의 다중화로 스펙트럼 복원 과정에서 잡음을 감소시키는 역할을 수행할 수 있다. 따라서 HTS에 비해 뛰어난 스펙트

럼을 얻을 수 있는 것이다. 이는 평균자승오차를 통한 수치상의 비교에서도 두드러진다. 즉 HTS가 4.99×10^{-4} 의 Average MSE를 갖는 반면 2차원 하다마드 트랜스폼 스펙트럼미터는 1/20정도에 해당하는 2.49×10^{-5} 의 값을 나타내었다.

그러나 2차원 HTS는 스펙트럼의 회복방법이 복잡하고 시간이 많이 소요되는 단점을 가지고 있다.

이 연구는 94년도 한국과학재단 연구비지원에 의한 결과임. (과제번호 : 941-0900-033-2)

[참 고 문 헌]

- [1] M. Harwit and N. J. A. Sloane, *Hadamard Transform Optics*, Academic Press, New York, 1979.
- [2] D. C. Tilotta, R. M. Hammaker, and W. G. Fateley, "A Visible Near-Infrared Hadamard Transform Spectrometer Based on a Liquid Crystal Spatial Light Modular Array: A New Approach in Spectrometry", *Applied Spectroscopy*, Vol. 41, pp. 727-734, 1987.
- [3] S. A. Dyer, B. K. Harms, J. B. Park, T. W. Johnson and R. A. Dyer, "A Fast Spectrum-Recovery Method for Hadamard Transform Spectrometers Having Nonideal Masks", *Applied Spectroscopy*, Vol. 43, No. 3, pp. 435-440, March/April 1989.
- [4] T. W. Johnson, J. B. Park, S. A. Dyer, B. K. Harms and R. A. Dyer, "An Efficient Method for Recovering Optimal Unbiased Linear Spectrum-Estimate from Hadamard Transform Spectrometers Having Nonideal Masks", *Applied Spectroscopy*, Vol. 43, No. 5, pp. 746-750, July. 1989.
- [5] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, pp. 3(1983).