2자유도 위너-호프 제어기 설계

조용석*. 민덕기*. 최군호*. 이종성*. 강기원*. 박기헌*
*:성균관대학교 전기.전자.컴퓨터 공학부

Design of 2DOF(Degree-Of-Freedom) Wiener-Hopf controllers

Yong-Seok Cho*.Deuk-Gi Min*.Goon-Ho Choi.Jong-Sung Lee*.Ki-Won Kang*.Ki-Heon Park*
School of Electrical & Computer Engineering Sung-Kyun-Kwan Univ.

Abstract - 제어공학에서 흔히 표준 모델이라고 불리우는 플랜트 모델은 여러 부시스템이 서로 결합되어있는 복잡한 시스템을 단순화시킨 모델이다. 이 모델은 수학적으로 간략하게 표시된다는 장점 때문에 다변수 시스템의 최적 제어에 많이 쓰이고 있다. 그러나 이 모델은 수학적인 전개에는 편리하지만 물리적으로 판이하게 다른 신호군 즉,외란 및 측정 잡음과 기준 입력 신호를 하나의 신호군으로 처리하는 약점이 있다. 실제로 이 구조로는 입력 추종 문제를 자유롭게 처리할 수 없는 경우가 있다. 본 연구에서는 이러한 문제를 개선하기 위하여 외란 및 측정 잡음과 기준 입력을 분리하여 처리할 수 있는 2자유도 제어기 구조를 제시하였다. 제어기 형태는 위너-호프 제어기로 주파수 영역에서 다변수 시스템에 대한 최적 설계를 가능하게 한다.

1. 서 론

최근에 많이 사용되고 있는 제어 시스템 구조는 그림 1과 같은 표준 모델이다[1,2,3].

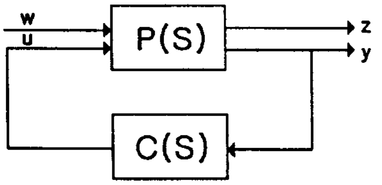

그림 1. 표준 모델을 갖는 제어기 구조

이 모델은 구조의 단순화로 수식의 간략화는 성공하였지만 물리적으로 성격이 판이하게 다른 신호(외란 및 측정 잡음과 기준 입력 신호를 말함)를 하나의 신호 군으로 처리함으로써 너무 추상적인 공식이 제시되었다는 약점이 있다. 실제로 이와 같은 구조로는 기준 입력 추종 문제를 자유스럽게 처리할 수 없으므로 만족할만한 응답을 얻기 힘든 경우가 있다. 본 연구에서는 이러한 문제를 개선하기 위해서 외란 및 측정 잡음과 기준 입력을 분리 처리하여 외란 및 측정 잡음으로 인한 폐루프 시스템 내부 안정도를 고려한 제어기와 기준 입력 추종을 위한 제어기를 독립적으로 고려할 수 있는 2자유도 제어기 구조 $[C_y | C_v]$를 제시하였다. 또한 제어기 형태는 주파수 영역에서 다변수 시스템에 대한 최적 설계를 가능하게 하는 위너-호프 제어기를 사용하였다[2,4,5,6]. 행렬 $G_*(s)$는 G(-s)의 공액 전치(conjugate transpose) 즉, $G_*(s)=G^*(-\bar{s})$이며 실 유리 행렬에서는 $G_*(s)=G^T(-s)$이 된다. 행렬 G(s)가 $G(s)=G_*(s)$일 때 para-Hermitian이라고 불린다. G(s)의 부분 분수 전개에서 $-\infty < Re s \le 0$, $0 < Re s < \infty$ 와 $s=\infty$안에 있는 모든 유한 극점으로 만들어진 항을 각각 $\{G\}_+$, $\{G\}_-$와 $\{G\}_\infty$로 정의하며 $\{G\}_+, \{G\}_- \le O(s^{-1})$이고 $\{G\}_\infty \le O(s^{-1})$이다. 또한 기호 < >는 기대값(expectation)이라고 정의한다.

2. 본 론

본 연구에서 제시하고자 하는 구조는 다음과 같다

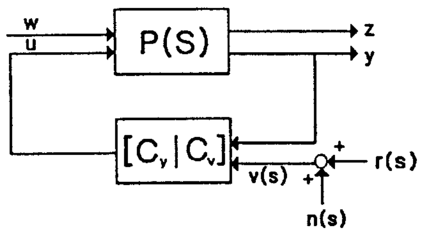

그림 2. 일반화된 2DOF 제어기를 갖는 모델

여기서 그림 1의 구조와 다른 점은 기준 입력 신호를 외부 입력항 $w(s)$와 구분해서 처리하고 있다는 것이다. 또한 $G_r(s)=0$ 으로 놓으면 기존의 모델로 환원되므로 기존 모델의 확장 모델로도 볼 수 있다. 기준 입력 $r(s)$는 크기가 랜덤 변수인 형상

확정 함수(shape deterministic function)로 가정한다. 즉,

$$r(s)=[a_1r_1(s), a_2r_2(s), \cdots\cdots a_qr_q(s)]^T \quad (2.1)$$

이때 계수 a_i는 $\langle a_i\rangle=0$, $i=1\rightarrow q$, $\langle a_ia_j\rangle=a_{ij}$의 성질을 갖는다고 가정하자. 여기서는 $a_{ii}=1$, $a_{ij}=0$, $i\neq j$을 취한다. 이 경우 $r(s)$의 파워 스펙트럼 밀도 (power spectral density) $G_r(s)$는

$$G_r(s)=\langle r(s)r_*(s)\rangle=\langle a_{ij}r_i(s)r_{j*}(s)\rangle \quad (2.2)$$

이다. 위의 그림 2에서 제어기 전달 행렬 $T_c(s)$ 는 2자유도 제어기 구조 즉

$$T_c(s)=[C_y(s) \mid C_v(s)] \quad (2.3)$$

이고 플랜트 모델은

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix}=P(s)\begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

이고 플랜트 입력 $u(s)$는

$$u(s)=[C_y(s) \mid C_v(s)]\begin{bmatrix} y(s) \\ -- \\ v(s) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

이다. 식(2.4),(2.5)로 부터 다음 식을 얻는다.

$$z(s)=T_{zw}(s)w(s)+T_{zv}(s)v(s) \quad (2.6)$$

여기서

$$T_{zw}(s)=P_{11}(s)+P_{12}(s)R_y(s)P_{21}(s) \quad (2.7)$$

$$R_y(s)=(I-C_y(s)P_{22}(s))^{-1}C_y(s) \quad (2.8)$$

$$T_{zv}(s)=P_{12}(s)R_v(s) \quad (2.9)$$

$$R_v(s)=(I-C_y(s)P_{22}(s))^{-1}C_v(s) \quad (2.10)$$

이다. 식(2.8),(2.10)에서 $C(s)$를 $R(s)$로 표시하면

$$[C_y(s)|C_v(s)]=(I+R_y(s)P_{22}(s))^{-1}[R_y(s)|R_v(s)] \quad (2.11)$$

이 되는데 (2.8),(2.10),(2.11)식으로부터 $C_y(s)$, $C_v(s)$와 $R_y(s)$, $R_v(s)$는 1:1 대응 관계가 있음을 알 수 있고 따라서 제어기 $C_y(s)$, $C_v(s)$를 구하는 대신 대응되는 $R_y(s)$, $R_v(s)$를 구해도 됨을 알 수 있다. 본 연구에서 제시하는 위너-호프 설계는 내부적으로 안정하고 자승형 평가 함수를 최소화하는 제어기를 찾는 것이다. 일반적으로 그림 1에서 제시한 표준 모델의 경우에는 $z(s)$의 H_2노옴을 평가 함수로 생각하지만 본 연구에서는 기준 입력을 별도로 고려하므로 평가 함수를 오차항(error)

$$e(s)=z(s)-T(s)r(s) \quad (2.12)$$

의 H_2노옴으로 생각한다. 단 $T(s)$는 폐우평면에서 해석적이라고 가정한다. 일반적으로 조정 변수 $z(s)$가 기준 입력 $r(s)$를 추종하는 출력항 $z_1(s)$와 기타항 $z_2(s)$로 분리되어 $z(s)=[z_1^T(s)\ z_2^T(s)]^T$로 표시한다고 하면 합리적인 $T(s)$의 값은 $T(s)=[I\ \ 0]^T$일 것이며 이 경우 (2.12)식은

$$e(s)=\begin{bmatrix} z_1(s)-r(s) \\ z_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

의 형태가 될 것이다. 본 연구에서 사용되는 평가 함수는 식 (2.12)의 오차 항에 대한 H_2 노옴값으로 정의되는데 다음과 같다.

$$E=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} T_r[Q(s)G_e(s)]ds \quad (2.14)$$

여기서 $G_e(s)$는 오차 $e(s)$의 파워 스펙트럼 밀도이다. 가중치 행렬 $Q(s)$는 항상 폐우평면에서 해석적이며, $Q(s)=Q_*(s)$, $Q(j\omega)\geq 0$의 조건이 있으므로 $Q(s)=\hat{Q}(s)\cdot\hat{Q}_*(s)$의 인수 분해가 가능하고 따라서 (2.14)의 평가 함수는

$$\hat{e}(s)=\hat{Q}(s)z(s)-\hat{Q}(s)T(s)r(s) \quad (2.15)$$

의 H_2노옴값이다. 이때 $\hat{Q}(s)$항은 플랜트 $P(s)$와 행렬 $T(s)$에 흡수될 수 있고 따라서 $\hat{Q}(s)$를 생략하여도 일반성을 잃지 않는다. 앞으로 평가 함수는

$$E=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} T_rG_e(s)\,ds \quad (2.16)$$

으로 하기로 한다. 이제 식 (2.6), (2.12), (2.16) 과 $v=r+n$의 관계로 부터 다음 식을 얻는다.

$$E=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} T_r\ [T_{zw}G_wT_{zw*}+(T_{zv}-T)\cdot G_r\ (T_{zv}-T)_*+T_{zv}G_nT_{zv*}]\ ds \quad (2.17)$$

$$=\ E_y\ +\ E_v \quad (2.18)$$

여기서

$$E_y=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} T_r[T_{zw}G_wT_{zw*}]ds \quad (2.19)$$

$$E_v=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} T_r[(T_{zv}-T)G_r(T_{zv}-T)_*+T_{zv}G_nT_{zv*}]ds \quad (2.20)$$

일반적으로 평가 함수를 유한하게 하고 폐루프 시스템을 점근적으로(asymptotically) 안정하게 하는 많은(R_v, R_y)이 있다. 따라서 주어진 시스템 $P(s)$에 대해서 위의 조건을 만족하는 (R_y, R_v)을 먼저 찾은 후, 그 중에서 평가 함수 E를 최소화하

는 ($\widehat{R_y}$, $\widehat{R_v}$)을 찾는 것이 목적이다. 이를 위해 먼저 주어진 시스템을 안정화 시키는 (R_v, R_y)을 찾는 문제를 따지기로 하자.

정의 1 ; 그림 2와 같은 구조의 시스템에 대해서 전체 시스템을 내부적으로 안정하게 하는 제어기가 존재한다면 주어진 플랜트에 대해서 실 유리 행렬 (R_y, R_v)은 허용가능(acceptable)하다고 말한다.

다음의 가정은 그림 2의 플랜트 $P(s)$의 안정화 가능을 보장하는 조건이다.

가정 1 : 플랜트 $P(s)$는 폐우평면에서 잠복 극점 (hidden pole)이 없고

$$\Psi_{p_{22}}{}^{+}=\Psi_{p}^{+} \tag{2.21}$$

이다. 여기서 $\Psi_{p_{22}}$와 Ψ_p는 $P_{22}(s)$와 $P(s)$의 특성 분모[6]이며 Ψ^{+}와 Ψ^{-}는 각각 폐우평면과 개좌평면에 위치한 영점들만을 갖는 다항식 이다. 이제,

$$P_{22}(s)=A^{-1}B=B_1A_1^{-1} \tag{2.22}$$

의 좌 및 우 다항식 서로소 쌍을 생각하자. 이 경우 잘 알려진 바와 같이

$$A_1Y_1=YA \tag{2.23}$$

$$AX+BY=I \tag{2.24}$$

$$X_1A_1+Y_1B_1=I \tag{2.25}$$

을 만족하는 다항식 행렬 X_1, Y_1, X, Y를 항상 찾을 수 있다.

정리 1 : 위의 가정이 만족될 때 허용 가능한 (R_y, R_v)의 형태는 다음과 같다.

$$[R_y \mid R_v]=A_1[-(Y_1+KA) \mid H_1] \tag{2.26}$$

여기서 H_1과 K는

$$det\,(X_1-KB)\neq 0 \tag{2.27}$$

을 만족하며 폐우평면에서 해석적인 임의의 실 유리 행렬이다. 이때 (2.26)식의(R_y, R_v)행렬에 대하여 대응되는 제어기(C_y, C_v)행렬은

$$T_c=[C_y|C_v]=(X_1-KB)^{-1}[-(Y_1+KA)|H_1] \tag{2.28}$$

이다. (2.7), (2.9), (2.18)식과 (2.26)식의 Youla 제어기의 형태를 보면 평가 함수 E를 최소화하는 (R_y, R_v)을 찾는 문제는 각각 평가 함수 E_y를 최소화하는 R_y를 찾는 것과 평가 함수 E_v를 최소화하는 R_v를 찾는 것과 동가임을 알 수 있는데 이와 같은 분리성은 2자유도 설계의 큰 특징이다. 정방 행렬 $\Lambda(s)$와 $\Omega(s)$는 다음의 두 식을 만족하는 위너-호프 스펙트럼 해라고 정의하자

$$A_{1*}P_{12*}P_{12}A_1=\Lambda_*\Lambda \tag{2.29}$$

$$AP_{21}G_wP_{21*}A_*=\Omega\Omega_* \tag{2.30}$$

가정 2 : 행렬 $P_{12*}P_{12}$와 $P_{21}G_wP_{21*}$는 full-rank, para-Hermitian이고 유한 허수 축에서 양의 반한정(positive semi-definite)하다. 그리고 행렬 Λ^{-1}과 Ω^{-1}는 유한 허수 축에서 해석적이다.

가정 3 : $P_{11}G_wP_{11*}\leq O(s^{-2})$

가정 4 : 식 $T_r(P_{11}G_wP_{11*})-T_r(\Gamma\Gamma_*)$은 유한 허수 축에서 해석적이다. 여기서 $\Gamma(s)$는 다음과 같다.

$$\Gamma(s)=\Lambda_*^{-1}A_{1*}P_{12*}P_{11}G_wP_{21*}A_*\Omega_*^{-1} \tag{2.31}$$

가정 5 : $A_1^{-1}Y-\Lambda^{-1}\Gamma\Omega^{-1}$은 유한 허수 축에서 해석적이다.

가정 6 : 다음 식이 만족된다.

$$(P_{21}G_wP_{21*})^{-1}\leq O(s^{-2\nu_1}),\ (P_{12*}P_{12})^{-1}\leq O(s^{-2\nu_2}) \tag{2.32}$$

$$P_{22}(s)\leq O(s^{-2\nu_0}) \tag{2.33}$$

인 경우 $\nu_0+\nu_1+\nu_2\geq 0$ 이다.

정리 2 : 가정 1-6 이 만족된다고 할 때 다음의 내용이 성립한다.

1) E_y값을 유한하게 하는 모든 허용 가능한 R_y는

$$R_y=-A_1\Lambda^{-1}(\{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_-+\{\Gamma\}_++Z_y)\Omega^{-1}A \tag{2.34}$$

이며 이때 Z_y는 $\leq O(s^{-1})$이고 폐우평면에서 해석적인 임의의 행렬이다.

2) E_y를 최소화시키는 acceptable한 $\widehat{R_y}$는

$$\widehat{R_y}=-A\Lambda^{-1}(\{\Lambda A_1^{-1}Y\Omega\}_-+\{\Gamma\}_+)\Omega^{-1}A \tag{2.35}$$

이며 이 식은 $Z_y\equiv 0$ 일 때의 대응되는 값이다.

3) 식(2.34)의 R_y를 사용하는 경우, 최적 제어기에 의한 평가 함수를 $\widehat{E_y}$라고 하면

$$E_y=\widehat{E_y}+\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}T_r(Z_yZ_{y*})ds\geq \widehat{E_y} \tag{2.36}$$

이다.

4) (2.34)식의 제어기를 사용하는 경우

$$R_y(s)\leq O(s^{-\nu_1-\nu_2-1}) \tag{2.37}$$

$$C_y(s)\leq O(s^{-\nu_1-\nu_2-1}) \tag{2.38}$$

이 성립한다.

가정 7 : 행렬 T는 proper이고 파워 스펙트럼 밀도 $G_r(s)$는 다음 식을 만족한다.

$$G_r(s) \le O(s^{-2}) \tag{2.39}$$

가정 8 : T, G_n, $(G_r+G_n)^{-1}$, Ω_0^{-1}은 유한 허수축에서 해석적이다. 여기서 Ω_0는 다음 식을 만족하는 위너-호프 스펙트럼 해라고 정의한다.

$$G_r+G_n=\Omega_0\Omega_{0*} \tag{2.40}$$

가정 9 : $(G_r+G_n)^{-1} \le O(s^{-2n_3})$ 이다.

가정 10 : $A_pTG_rT_*A_p$는 유한 허수 축에서 해석적이다.

정리 3 : 가정 1-10이 만족된다고 가정할 때 다음과 같은 식이 만족된다.

1) E_v값을 유한하게 하는 모든 허용 가능한 R_v는

$$R_v=A_1\Lambda^{-1}(\{\Gamma_r\}_+ +Z_v)\Omega_0^{-1} \tag{2.41}$$

이다. 여기서,

$$\Gamma_r=\Lambda_*^{-1}A_{1*}P_{12*}TG_r\Omega_{0*}^{-1} \tag{2.42}$$

이며, 이때 Z_v는 $\le O(s^{-1})$이고 폐우 평면에서 해석적인 임의의 행렬이다.

2) E_v를 최소화시키는 허용 가능한 $\tilde{R}_v$는

$$\tilde{R}_v=A_1\Lambda^{-1}(\{\Gamma_r\}_+)\Omega_0^{-1} \tag{2.43}$$

이며, 이 식은 $Z_v\equiv0$일 때의 대응되는 값이다.

3) 최적 제어기에 대한 평가 함수를 $\tilde{E}_v$라고 하면 (2.41)식의 제어기에 대한 평가 함수 값은

$$E_v=\tilde{E}_v+\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}T_r(Z_vZ_{v*})ds \ge \tilde{E}_v \tag{2.44}$$

이다.

4) (2.41)식의 제어기를 사용하는 경우

$$R_v(s) \le O(s^{-n_2-n_3-1}) \tag{2.45}$$

$$C_v(s) \le O(s^{-n_2-n_3-1}) \tag{2.46}$$

이 성립한다.

3. 결 론

일반적으로 제어 시스템 설계시 많이 사용되는 표준 모델은 수학적인 간략화로 시스템 해석 및 설계의 용이함은 있지만 물리적으로 특성이 다른 기준 입력 신호와 외란 및 측정 잡음 신호를 하나의 신호로 처리하므로 실제적이지 못하다는 문제점도 지니고 있다. 따라서 본 연구에서는 표준 모델을 통해 수학적인 편리함은 이루되, 기준 입력 신호와 외란 및 측정 잡음 신호를 분리해서 각각 독립적으로 처리하는 2자유도 제어기 $[C_y|C_v]$ 설계 기법을 제시하였다. 여기서 제어기 C_y는 외란, 측정잡음 및 폐루프 시스템의 내부 안정도와 관련된 제어기이고 제어기 C_v는 기준 입력 추종을 위한 제어기이다. 또한 정리 2.3의 (2.34),(2.41)식은 전체 시스템을 점근적으로 안정하게 하고 자승 형태의 평가 함수를 최소화시키는 최적 제어기로 완전하게 일반적인 구조가 제시되었다. 여기서 Z_y, Z_v 는 여러 설계 사양들을 고려하는 준최적 제어기 설계에서 중요한 역할을 담당하게 된다.

(참 고 문 헌)

(1) Boyd,S,V.Balakrishnan,and C.H.Barratt ,N. M. Khraishi, X. Li, D.G.Meyer,S.A. Norman,"A New CAD Method and Associated Architectures for Linear Controllers," IEEE Trans. on auto. control, Vol. 33, PP. 268-283, 1988.

(2) Park,K.,and Bongiorno, J.J.,"A general theory for the Wiener-Hopf design of multivariable control systems", IEEE Trans. on auto. control, Vol. 34, PP.619-626, 1989.

(3) Doyle,J.C.,Glover,K.,Khargonekar,P.P. and Francis,B.A,"State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems", IEEE Trans. on auto. control, Vol. 34, PP. 831-847, 1989.

(4) Bongiorno,J.J.,and Youla,D.C.,"On the design of two-degree-of-freedom multivariable feedback control system." weber research institude, Polytechnic university, Farmingdale, New York, report PP. 1452-86, 1986.

(5) Youla, D. C. and Bongiorno, J. J. "A Feedback theory of two-degree-of-freedom optimal Wiener-Hopf design", IEEE Trans. on auto. control, Vol. 30, PP. 652-665, 1985.

(6) Youla,D.C., Jabr,H.,and Bongiorno,J. J.,"Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers part Ⅱ: the multivariable case", IEEE Trans. on auto. control, Vol. 21, PP. 319-338, 1976.