'97 대한전기학회 창립 50주년 하계학술대회 논문집 (C1O11)

분산형 H_∞ 상태 추정 기법

°김경근*, 진승희*, 박진배*, 윤태성**, 최윤호***
* 연세대학교 전기공학과, ** 창원대학교 전기공학과, *** 경기대학교 전자공학과

Decentralized H_∞ State Estimation

°Kyung-Keun Kim*, Seung-Hee Jin*, Jin-Bae Park*, Tae-Sung Yoon**, Yoon-Ho Choi***
* Yonsei Univ., ** Chang-Won National Univ., *** Kyung-Gi Univ.

Abstract - We propose a decentralized H_∞ state estimation method in the multisensor state estimation problem. The proposed method bounds the maximum energy gain from unknown external disturbances to the estimation errors in the suboptimal case. And we formulate the decentralized state estimation method in the general case of different global and local models using alternative gain equation of the H_∞ state estimator which can calculate global state estimates from the the linear combination of local state estimates. In addition, the proposed update equation between global and local Riccati solutions can reduce unnecessary calculation burden efficiently.

1. 서 론

상태 추정 문제에 있어서 최적 추정자인 일반적 칼만 필터링 알고리듬은 전역적으로 최적의 해를 제공하지만 그 자체적으로 발산의 가능성과 수치적인 신뢰성의 문제가 발생한다. 또한 비행기나 선박 등의 항법 장치와 같은 다중 센서 형태의 문제에서는 시스템의 상태 변수가 많아지므로 높은 데이터 전송률 등의 문제가 발생하여 실시간 적용에 적합하지 않으며 또한 단일한 하나의 필터를 쓰기 때문에 센서 등의 고장에 강인하지 못하다[1].

이러한 다중 센서 상황에서의 상태 추정 문제를 해결하기 위하여 근래에는 분산형 상태 추정 기법에 관한 연구가 많이 진행되어왔다[2][3]. 이러한 분산형 상태 추정 기법은 병렬적인 구조를 가지고 있기 때문에 고장에 강인하며 각각의 지역 센서에서의 데이터를 지역 필터에서의 필터링 과정을 거친 후 중앙의 필터로 전송하기 때문에 정보의 전송에 있어서 대역폭을 줄일 수 있어 실시간 적용 문제에 상당히 적합하다.

하지만 기존의 분산형 상태 추정 기법은 칼만 필터링에 기반을 두고 있는데 이러한 칼만 필터링 기법은 일반적으로 시스템의 모델과 외부 잡음의 통계적 특성을 정확히 알고 있는 경우에 있어 최적의 추정자 역할을 할 수 있지만 시스템에 대한 사전 정보가 불확실한 경우, 즉 시스템의 외부 잡음의 통계적 특성에 대한 정보가 불분명하거나 시스템 모델링에 있어 오차가 많이 생기는 경우 추정 오차가 크게 생기는 문제[4][5]가 있어 이를 이용한 분산형 상태 추정에 있어서도 동일한 문제가 발생할 수 있다. 따라서 최근들어서는 자율 이동 로봇 등의 항법 장치에서의 분산 상태 추정 기법에 이러한 문제에 대응하기 위한 강인성에 대한 요구가 증가하고 있다[6].

본 논문에서는 외부 잡음의 통계적 특성에 관계없이 외부잡음으로부터 추정 오차로의 최대 에너지 이득을 γ 레벨 이하로 감쇄시켜 줄 수 있는 H_∞ 상태 추정 기법[4][5]을 이용하여 외부 잡음에 대한 통계적 특성이 불분명한 가운데 실시간 적용 및 고장에 대한 강인성을 필요로 하는 다중 센서 상황에서의 분산 상태 추정 기법을 제안한다. 여기에서 각각의 지역 필터들은 γ 레벨에서 H_∞ 준최적하며 또한 중앙의 데이터 융합 필터 역시 전역적으로 외부 잡음에 대한 추정 오차의 최대 에너지 이득, 즉 고려하는 시스템의 H_∞ norm을 γ 레벨이하로 감쇄시킨다. 이러한 분산형 H_∞ 상태 추정 기법을 개발하기 위하여 본 논문에서는 변형된 칼만 이득 방정식에 사용되어진 information form[1]을 응용하여 변형된 H_∞ 상태 추정기의 이득 방정식을 제안하고 이를 이용하여 전역 모델과 지역 모델이 다른 경우의 일반적인 상황에 대하여 분산형 H_∞ 상태 추정 기법을 유도한다.

2. 이산치 H_∞ 상태 추정기 및 변형된 형태

일반적인 시변 상태 방정식 모델은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i, & x_0 \\ y_i = H_i x_i + v_i, & i \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

여기에서 F_i ,G_i ,H_i 는 알려진 행렬이며 x_0 는 상태 벡터의 초기치로서 미리 알려지지 않은 벡터이다. 또한 u_i ,v_i 는 각각 공정 잡음 및 관측 잡음이며 통계적 특성을 모르는 유한한 에너지를 가진 신호로 가정한다. 또한 i 는 이산치 시스템에서의 시간 인덱스이다.

일반적으로 H_∞ 추정 문제에서는 상태 벡터의 임의의 선형 합 $z_i = L_i x_i$ 을 추정하며 필터링 에러는 다음과 같다.

$$\tilde{s}_{i|i} = \check{z}_{i|i} - L_i x_i \quad (2)$$

여기에서 $\check{z}_{i|i}$ 는 시간 인덱스 0 에서부터 i 까지의 관측치 $\{y_i\}$로부터의 필터링된 추정치인 $L_i \hat{x}_{i|i}$ 이다. 이러한 경우 스칼라 양 γ 와 최종 시간 N 이 주어졌을 때 일반적인 준최적 H_∞ 필터 문제에 있어서의 비용 함수는

$$\sup \frac{\sum_{i=0}^{N} \tilde{s}_{i|i}^T \tilde{s}_{i|i}}{x^T_0 \; \Pi_0^{-1} x_0 + \sum_{i=0}^{N} u_i^T u_i + \sum_{i=0}^{N} v_i^T v_i} < \gamma^2 \quad (3)$$

이다. 위의 가정 하에서 준최적 H_∞ 필터는 다음과 같다.

정리 2.1. (준최적 유한시구간 H_∞ 상태 추정기)

식 (3)을 만족하는 준최적 유한 구간 H_∞ 상태 추정기의 필요 충분 존재 조건은 다음과 같다.

우선 다음과 같은 행렬을 정의한다.

$$R_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}, R_{e,i} = R_i + \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} P_i [\; H^T{}_i \;\; L^T{}_i] \quad (4)$$

여기에서 $P_0 = \Pi_0$, 즉 상태 벡터의 초기치 x_0 의 공분산 행렬이며 P_i 는 다음과 같은 Riccati 순환식을 만족한다.

$$\begin{aligned} P_{i+1} = \; & F_i P_i F_i^T + G_i G_i^T - F_i P_i [\; H_i^T \;\; L_i^T] \\ & \times \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} P_i F_i^T \end{aligned} \quad (5)$$

이러한 경우 모든 $i = 0, 1, \cdots, N$ 에 대하여

$$P_i^{-1} + [\; H_i^T \;\; L_i^T] R_{e,i}^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} > 0 \quad (6)$$

이면 위의 비용 함수를 만족하는 준최적 H_∞ 상태 추정기의 예측치 형태는 다음과 같다.

$$\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_i + K_{p,i} (y_i - H_i \hat{x}_i), \; x_0 = 0 \quad (7)$$

여기에서 예측치 상태 추정 이득 $K_{p,i}$ 는

$$K_{p,i} = F_i P_i H_i^T (I + H_i P_i H_i^T)^{-1} \quad (8)$$

이다. 또한 필터링된 형태의 H_∞ 상태 추정기는 다음과 같으며

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \hat{x}_{i+1} + K_{f,i+1}(y_{i+1} - H_{i+1} F_i \hat{x}_{i|i}) \quad (9)$$

상태 벡터의 초기치 $\hat{x}_{-1|-1} = 0$ 이다.

여기에서의 이득은 다음과 같다.

$$K_{f,i+1} = P_{i+1} H_{i+1}{}^T (I + H_{i+1} P_{i+1} H_{i+1}{}^T)^{-1} \quad (10)$$

■

분산형 H_∞ 상태 추정기를 구성함에 있어서 고려해야 할 부분은 추정기의 이득 방정식이다. 즉 이득 방정식이 식 (10)과 같이 주어진 경우 추정치를 각각의 관측치의 선형 합의 형태로 직접적으로 나타내어 줄 수가 없기 때문에 효율적인 분산형 필터 구성에 문제가 된다. 일반적인 칼만 필터의 경우 이득 방정식의 변형된 형태는 잘 알려진 information form을 이용하여 구할 수 있었다. 이러한 변형된 형태의 이득 방정식은 필터의 추정치를 관측치의 선형 합으로 나타내어 줄 수가 있기 때문에 분산형 상태 추정기를 구성하는 데 있어서 효율적으로 사용되었다. 하지만 H_∞ 상태 추정 기법은 실제 Riccati 순환식과 이득 방정식간의 형태가 칼만 필터와는 다른 형태로 나타나기 때문에 기존의 이득 방정식을 이용하여서는 분산형 상태 추정기를 구성하기는 어렵다. 따라서 H_∞ 상태 추정기의 이득 방정식을 적절한 형태로 바꾸어 주어야 한다.

일반적인 칼만 필터링에 있어서의 변형된 이득 방정식은 다음과 같이 구하여진다. 우선 일반적인 칼만 이득 방정식은

$$K_{p,i} = P_i H_i^T (R_i + H_i P_i H_i^T)^{-1} \quad (11)$$

이며 (11)에서의 Riccati 순환식의 해 P_i 는 예측된 추정치 벡터와 실제 상태 벡터 사이의 에러 공분산 형태, 즉 $P_i = E[(x_i - \hat{x}_i)(x_i - \hat{x}_i)^T]$이다. 또한 필터링된 상태 추정 벡터 $\hat{x}_{i|i}$ 와 실제 상태 벡터 x_i 사이의 에러 공분산 행렬을 $P_{i|i} = E[(x_i - \hat{x}_{i|i})(x_i - \hat{x}_{i|i})^T]$ 로 정의해 줄 경우, $P_{i|i}$ 는 다음과 같은 잘 알려진 information form으로 나타난다.

$$P_{i|i}^{-1} = P_i^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i \quad (12)$$

이러한 경우 변형된 칼만 이득은 다음과 같다.

$$K_{A,f,i} = P_{i|i} H_i^T R_i^{-1} \quad (13)$$

H_∞ 필터의 이득 방정식을 대체할 변형된 필터 이득 방정식은 위의 결과들을 응용하여 다음과 같이 구하여진다.

우선 H_∞ 상태 추정기에서의 Riccati 방정식 (5)와

(12)를 이용하면 Riccati 순환식의 해 $P_{\hat{a}i}$의 역행렬은

$$\begin{aligned} P_{\hat{a}i}^{-1} &= P_i^{-1}+[\ H_i^T\ L_i^T]\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_i \\ L_i\end{bmatrix} \\ &= P_i^{-1}+\ H_i^T H_i-\frac{1}{\gamma^2}\ L_i^T L_i \end{aligned} \tag{14}$$

이 되며 (14) 및 Matrix inversion lemma를 사용하여 (8)을 변형하면 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} K_{f,i} &= P_i H_i^T(I+H_i P_i H_i^T)^T \\ &= P_i H_i^T(I-H_i P_i\ (I+\ H_i^T H_i P_i)^{-1} H_i^T) \\ &= P_i\ (\ H_i^T-\ H_i^T H_i P_i\ (I+\ H_i^T H_i P_i)^{-1} \\ &\quad \times H_i^T) \\ &= P_i\ (I+\ H_i^T H_i P_i)^{-1} H_i^T \\ &= P_i P_i^{-1}(P_i^{-1}+\ H_i^T H_i)^{-1} H_i^T \\ &= (P_{\hat{a}i}^{-1}+\frac{1}{\gamma^2}\ L_i^T L_i)^{-1} H_i^T \\ &= (I+\frac{1}{\gamma^2} P_{\hat{a}i} L_i^T L_i)^{-1} P_{\hat{a}i} H_i^T \\ &= K_{A,f,i} \end{aligned} \tag{15}$$

따라서 변형된 H_∞ 상태 추정기의 이득 방정식은 다음과 같다.

$$K_{A,f,i}=(I+\frac{1}{\gamma^2} P_{\hat{a}i} L_i^T L_i)^{-1} P_{\hat{a}i} H_i^T \tag{16}$$

여기에서 P_i 는 (5) 와 같은 Riccati 순환식을 만족하며 상태 추정기의 존재 조건 역시 (6) 과 같다.

3. 분산형 H_∞ 상태 추정 문제의 설정

분산형 상태 추정의 문제는 일반적으로 지역 센서에서의 상태 방정식, 즉 지역 모델이 전역 모델과 다른 일반적인 경우와 두 모델이 같은 특수한 경우로 나눌 수 있다.

우선 전역 모델과 지역 모델이 같은 경우의 문제 설정은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i\, x_i+G_i\ u_i \\ y_i^k \ \ = C_i\, x_i+v_i^k \\ z_i \ \ \ = L_i\, x_i \end{cases} \tag{17}$$

여기에서 $k=1,2,\cdots,N$ 로서 각각의 지역 모델에 해당하며 y_i^k와 v_i^k는 각각 k 번째 지역 필터의 측정치와 측정 잡음을 의미한다. 또한 공정 잡음인 u_i와 v_i^k 는 유한한 에너지를 가진 통계적 특성을 모르는 신호로 가정한다.

또한 전역 모델과 지역 센서의 상태 모델이 다른 경우는 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_{i+1}^k = F_i^k\, x_i^k+G_i^k\ u_i^k \\ y_i^k \ \ = H_i^k\, x_i^k+v_i^k \\ z_i^k \ \ = L_i^k\, x_i^k \end{cases} \tag{18}$$

여기에서 x_i^k는 k 번째 지역 필터에서의 상태 벡터이며, F_i^k, G_i^k, H_i^k는 k 번째 지역 필터에 관계된 행렬들이다. 공정 잡음 및 측정 잡음 u_i^k, v_i^k의 가정은 위의 문제와 같다.

각각의 모델이 (18)과 같은 경우, 즉 전역 필터의 모델과 지역 필터의 모델이 다른 경우 분산형 상태 추정 기법을 적용하기 위한 가정은 다음과 같다.

우선 각각의 모델이 다른 경우에 있어서의 k 번째 지역 필터의 측정 행렬 H_i^k 와 각각의 모델이 같은 경우의 측정 행렬 C_i^k 사이에는 다음과 같은 행렬 M_i^k 가 존재하여야 한다.

$$C_i^k=H_i^k\ M_i^k \tag{19}$$

또한 이런 경우에 있어서 각각의 상태 벡터 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$x_i^k=M_i^k\ x_i \tag{20}$$

위의 관계식들을 사용하였을 경우 원하는 추정치 z_i 에 있어서 γ 레벨을 만족하는 준최적인 분산 H_∞ 상태 추정기를 설계하기 위해서는 다음과 같은 식이 만족되어야 한다.

$$L_i^k=L_i\ M_i^{k+} \tag{21}$$

여기서 +는 의사 역행렬을 의미한다.

4. 분산형 H_∞ 상태 추정 기법

우선 각각의 지역 센서에서의 관측 벡터가 전체 시스템의 관측 방정식에 포함되는 일반적인 형태인 전역적인 상태 추정 기법에 대하여 전개한다.

여기에서 각각의 관측치 벡터들의 행렬들을 (22)와 같이 정의하면 전역 상태 추정 기법에서의 관측 모델은 (23)이다.

$$\begin{aligned} y_i &= [\ \ y^1{}_i^T\ \ y^2{}_i^T\cdots\ \ y^N{}_i^T\ ]^T \\ C_i &= [\ \ C^1{}_i^T\ \ C^2{}_i^T\cdots\ \ C^N{}_i^T\ ]^T \\ v_i &= [\ \ v^1{}_i^T\ \ v^2{}_i^T\cdots\ \ v^N{}_i^T\ ]^T \end{aligned} \tag{22}$$

$$y_i=C_i\ x_i\ +\ v_i \tag{23}$$

이러한 경우 2 장에서의 변형된 이득 방정식을 이용하여 전역 H_∞ 상태 추정기 및 전역 상태 추정치를 각각의 지역 센서의 관측치의 선형 합으로 나타내면

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\hat{a}i} &= \hat{x}_i+A_i^{-1}P_{\hat{a}i}\, C^T{}_i(y_i-C_i\,\hat{x}_i) \\ &= \hat{x}_i+A_i^{-1}P_{\hat{a}i}\sum_{k=1}^{N}\ C^k{}_i^T(y_i-C_i^k\,\hat{x}_i) \end{aligned} \tag{24}$$

이다. 여기에서 $A_i=I+\frac{1}{\gamma^2}P_{\hat{a}i}\,L_i^T L_i$ 로 정의되고 $P_{\hat{a}i}$의 계산 및 존재 조건은 (5), (6)과 같다.

이제 위의 식을 고려하여 전역 모델과 지역 모델이 다른 일반적인 경우에 대한 분산형 H_∞ 상태

추정 기법을 다음과 같이 구한다.

우선 $A^k_i = I + \frac{1}{\gamma^2} P^k_{\text{地}i} L^k_i{}^T L^k_i$ 로 정의하면 k 번째 지역 H_∞ 상태 추정기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}^k_{\text{地}i} &= \hat{x}^k_i + A^k_i{}^{-1} P^k_{\text{地}i} H^k_i{}^T \\ &\quad \times (y^k_i - H^k_i \hat{x}^k_i) \\ &= (I - A^k_i{}^{-1} P^k_{\text{地}i} H^k_i{}^T H^k_i) \\ &\quad \times \hat{x}^k_i + A^k_i{}^{-1} P^k_{\text{地}i} H^k_i{}^T y^k_i \end{aligned} \tag{25}$$

여기에서 $P^k_{\text{地}i}$ 는 지역 H_∞ 필터의 Riccati 순환식의 해이다. (25)을 $H^k_i{}^T y^k_i$ 에 대하여 정리하여 (24)에 대입하여 각각의 지역 상태 추정치 $\hat{x}^k_i$, $\hat{x}^k_{\text{地}i}$ 및 $P^k_{\text{地}i}$ 의 선형합으로 전역 상태 추정치 $\hat{x}_i$ 를 나타낼 수 있는 분산형 상태 추정 방정식을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\text{地}i} &= (I - A_i^{-1} P_{\text{地}i} C_i^T C_i) \hat{x}_i + A_i^{-1} P_{\text{地}i} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{N} \{ M^k_i{}^T P^k_{\text{地}i}{}^{-1} A^k_i \hat{x}^k_{\text{地}i} \\ &\quad - M^k_i{}^T P^k_{\text{地}i}{}^{-1} A^k_i \\ &\quad \times (I - A^k_i{}^{-1} P^k_{\text{地}i} H^k_i{}^T H^k_i) \hat{x}^k_i \} \end{aligned} \tag{26}$$

또한 전역 추정치와 지역 추정치의 시간에 따른 갱신식은 $\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_{\text{地}i}$ 및 $\hat{x}^k_{i+1} = F^k_i \hat{x}^k_{\text{地}i}$ 가 된다. 여기에서 $P_{\text{地}i}$ 는 전역 상태 추정기에 있어서의 Riccati 순환식의 해이고 $P^k_{\text{地}i}$ 는 지역 상태 추정기에서의 Riccati 순환식의 해이다.

하지만 (26)의 계산에 있어서 전역 상태 추정기의 Riccati 순환식의 해 $P_{\text{地}i}$ 를 직접 계산하게 되면 상태 변수가 많은 경우 계산량이 증가하므로 효율적이지 못하다. 따라서 계산량을 감소시키기 위하여 다음 식을 통해 $P_{\text{地}i}$ 를 지역 상태 추정기로부터의 $P^k_{\text{地}i}$ 로부터 직접 계산한다.

$$\begin{aligned} P_{\text{地}i}{}^{-1} &= P_i{}^{-1} + \sum_{k=1}^{N} \{ M^k_i{}^T (P^k_{\text{地}i}{}^{-1} \\ &\quad - P^k_i{}^{-1}) \times M^k_i \} + \frac{(N-1)}{\gamma^2} L_i{}^T L_i \end{aligned} \tag{27}$$

위 식은 (14)에서의 $P_{\text{地}i}$ 및 $P^k_{\text{地}i}$ 와 다음의 (28)를 통하여 구하여진다.

$$\begin{aligned} &[\, C_i^T \; L_i^T] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_i \\ L_i \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{N} C^k_i{}^T C^k_i - \frac{1}{\gamma^2} L_i{}^T L_i \end{aligned} \tag{28}$$

또한 전역 모델과 지역 모델이 같은 경우의 분산형 상태 추정 방정식 은 (26), (27) 에서 $M^k_i = I$ 로 대치하면 된다.

일반적으로 잡음 감쇄 수준인 γ 가 ∞인 경우 H_∞ 상태 추정 기법은 칼만 필터와 동일하게 나타나는데 본 논문에서 제안한 분산형 H_∞ 상태 추정 기법 (26), (27) 역시 $\gamma \to \infty$ 인 경우에 간단한 전개 과정을 통하면 칼만 필터를 사용한 기존의 분산형 상태 추정 기법과 같아진다.

5. 결 론

본 논문에서는 다중 센서 상황의 상태 추정 문제에 불분명한 모델링 및 외부 잡음에 의한 추정 오차를 일정한 레벨 이하로 감소시켜 강인성을 보장할 수 있는 분산형 H_∞ 상태 추정 기법을 제안하였다. 이를 위해 변형된 형태의 H_∞ 상태 추정기의 이득 방정식을 제안하여 전역적 상태 추정치를 지역 추정치의 선형 합으로 나타낼 수 있도록 하였으며 또한 전역 및 지역 Riccati 순환식의 해 사이에 효율적인 갱신식을 제안하여 불필요한 계산량을 감소할 수 있도록 하였다. 이러한 분산형 H_∞ 상태 추정 기법은 차후에 데이터 융합 문제에 있어서의 강인성을 다루기 위한 새로운 제안으로 볼 수 있다.

[참 고 문 헌]

[1] Siouris, "Optimal Control and Estimation Theory", John Wiley & Sons, Inc. 1996.

[2] Jason L. Speyer, "Computation and Transmission Requirements for a Decentralized LQG Control Problem", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. AC-24, No. 2, pp. 266-269, 1979

[3] Willsky et al , "Combining and Updating of Local Estimates and Regional Maps Along Sets of One-Demensional Tracks", *IEEE Trans. Auto. Contr.,* Vol. AC-27, No. 4, pp. 799-813, 1982.

[4] U. Shaked and Y. Theodor, " H_∞-Optimal Estimation : A Tutorial", *Proc. IEEE CDC,* pp. 2278-2286, 1992.

[5] Khargonekar et al, "Filtering and Smoothing in an H_∞ -Setting", IEEE. Trans. Auto. Contr. Vol. 36, pp. 151-166, 1991.

[6] Moshe Kam et al, "Sensor Fusion for Mobile Robot Navigation", *Proc. of IEEE,* VOl. 85, No. 1, pp. 108-119, 1997.