

아놀디체비셰프를 이용한 전력계통에서의 부분고유치해석

김동명^o 이병준 권세혁
고려대학교 전기·전자·전파공학부

The Partial Eigenanalysis Using The Arnoldi-Chebyshev Method in Large Power Systems

Dong Myung Kim^o Byongjun Lee Sae-Hyuk Kwon
School of Electrical Engineering, Korea University

Abstract

Small-signal stability analysis of large power systems needs the calculation of eigenvalues. But we use the partial eigenanalysis to calculate rightmost eigenvalues, since system matrix is very large.

This paper proposes the Arnoldi-Chebyshev method identifying rightmost eigenvalues. This method constructs an optimal ellipse containing unwanted eigenvalues and use the Chebyshev iteration to get approximate eigenvectors corresponding to wanted eigenvalues, and then applies the modified Arnoldi method to calculate wanted eigenvalues.

1. 서 론

전력계통의 계획과 운전에 있어서 계통행렬의 고유치를 해석함으로써 전력계통의 안정도를 판별할 수 있다. 그러나 계통행렬의 차원이 너무 방대하므로 계통행렬의 차원을 줄여서 우리가 관심있는 최우측고유치를 찾아내는 부분고유치해석을 수행할 필요가 있다. 이런 관점에서 보편적으로 알려져 있는 기법이 수정아놀디법이다. 수정아놀디법은 대규모 비대칭행렬에서의 부분고유치와 그에 대응하는 고유벡터를 찾기에 적절하다고 인정받고 있다. 그러나 수정아놀디법은 절대치가 가장 큰 고유치에 수렴하는 성질을 갖고 있기 때문에 우리가 관심있는 고유치를 찾기위해서는 나름대로 초기변환을 수행해야한다. 이러한 초기변환 방법의 하나인 shift-inverse법은 최우측고유치를 찾기위해서 역행렬의 계산과 shift를 경험적으로 여러 번 수행해야 하는 불편함이 있다. S-행렬법에서는 shift를 여러 번 수행하는 불편함은 제거했지만 역행렬을 계산해야 하는 부담이 여전히 남아있다.

본 논문은 초기벡터를 재구성함으로써 우리가 원하는 최우측고유치를 찾아내는 알고리즘의 하나로

서 아놀디체비셰프법을 소개한다. 아놀디체비셰프법은 체비셰프다항식을 통하여 우리가 원하는 고유치에 해당하는 초기벡터의 근사치를 구한 후 수정아놀디법을 이용하여 최우측고유치를 찾는 방법으로 본 논문에서는 체비셰프다항식에 대한 설명과 함께 시험계통에 적용한 결과를 보여준다.

2. 수정아놀디법

먼저 수정아놀디법의 기본개념을 간단하게 살펴본다[1]. 선형계통이 다음과 같이 표현된다고 하자.

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{단, } x \in R^m, A \in R^{m \times m}) \quad (1)$$

여기서, 계통행렬 A 의 고유치를 모두 구하는 것이 아니라 우리가 원하는 개수만큼 고유치를 구하고 싶을 때 다음과 같은 관계식을 이용한다.

$$AV = VH \quad (\text{단, } V \in R^m, H \in R^{n \times n}) \quad (2)$$

여기서, H 는 헤센버그행렬이고, n 은 우리가 원하는 고유치의 개수이고, m 은 계통행렬의 차원이며, $n \ll m$ 이라고 가정한다. 그러면 식 (2)가 의미하는 바는 행렬 V 가 일종의 변환자역할을 담당해서 m 차원의 행렬 A 를 n 차원의 행렬 H 로 변환시킨다. 이런 관계를 만족하기 위한 조건은 행렬 V 가 직교행렬이면 된다. 조건으로부터 식 (2)의 헤센버그행렬 H 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H = V^H A V \quad (3)$$

이렇게 구한 헤센버그행렬 H 는 계통행렬의 특성을 그대로 유지하고 있으므로 헤센버그행렬의 고유치는 계통행렬 A 의 부분고유치가 된다. 수정아놀디법에 대한 알고리즘은 참고문헌[1]에 자세하게 나와 있다. 수정아놀디법은 절대치가 가장 큰 고유치에 수렴하므로 최우측고유치를 찾기 위한 초기벡터의 생성에 대한 상세한 설명은 다음 장에서 서술한다.

3. 체비셰프다항식을 이용한 초기벡터의 구성

수정아놀디법[1]에서 초기벡터를 새롭게 구성하는 부분에 해당하는 초기벡터 생성법의 하나로서

체비셰프다항식에 대하여 살펴본다[2].

행렬 A 의 고유치를 실수부의 크기순으로 $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_m$ 으로 나타내고, 우리가 원하는 고유치를 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 이라 하고, 또한 각각에 해당하는 고유벡터를 u_1, \dots, u_m 으로 가정한다. 그러면 초기벡터(z_0)는 고유벡터의 선형결합으로 식 (4)와 같이 표현할 수 있다.

$$z_0 = \sum_{i=1}^m \theta_i u_i \quad (\theta \text{는 실수}) \quad (4)$$

$z_k = Az_{k-1}$ 의 반복에 의해 얻어진 벡터 z_k 는 식 (5)와 같이 표현할 수 있다.

$$z_k = p_k(A)z_0 \quad (5)$$

여기서, $p_k(A)$ 는 k 차의 다항식이다. 식 (5)는 반복 계산에 의해 식 (6)과 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} z_k &= \sum_{i=1}^m \theta_i p_k(\lambda_i) u_i \\ &= \sum_{i=1}^r \theta_i p_k(\lambda_i) u_i + \sum_{i=r+1}^m \theta_i p_k(\lambda_i) u_i \end{aligned} \quad (6)$$

만약 우변의 제2항이 제1항과 비교해서 작으면 고유벡터 $u_i (i=r+1, \dots, m)$ 에 대한 계수가 작아지기 때문에 z_k 에 포함되는 $u_i (i=r+1, \dots, m)$ 의 성분은 작아지며 $u_i (i=1, \dots, r)$ 에 대한 고유치를 구할 수 있다. 즉, 본 논문에서 구하고자 하는 최우측고유치에 해당하는 고유벡터로 구성된 z_k 를 생성할 수 있다. 체비셰프다항식은 이 $p_k(\lambda_i)$ 를 부여한다. $p_k(\lambda)$ 에 대한 계산은 다음 장에서 상세하게 다루기로 한다.

k 차 체비셰프다항식의 성질을 간단히 살펴보면 변수가 실수일 때 k 개의 근을 갖는 k 차의 함수가 되며, 변수가 복소수일 때 타원의 궤적을 그리게 된다. 실변수의 4차 체비셰프다항식과 복소변수의 2차 체비셰프다항식을 그림 1과 그림 2에 나타내었다. 일반적으로 고유치는 복소평면상에 존재하고 있으므로 본 논문에서는 복소변수의 체비셰프다항식 즉, 체비셰프타원을 고려한다. λ 를 지나고 중심이 d , 초점거리가 c 인 k 차 체비셰프타원은 $T_k[(\lambda-d)/c]$ 로 표현할 수 있으며, 이후 이 표현을 참조하기로 한다.

3.1 체비셰프다항식에 의한 $p_k(\lambda_i)$ 의 계산

$p_k(\lambda_i)$ 의 계산방법에 대하여 서술한다. $p_k(\lambda_i)$ 은 k 의 체비셰프다항식 T_n 에 의해 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다[2].

$$p_k(\lambda_i) = \frac{T_k[(\lambda_i - d)/c]}{T_k[(\lambda_r - d)/c]} \quad (7)$$

$T_k(\lambda)$ 는 다음의 점화식에 의해 계산할 수 있다. $T_1(\lambda) = \lambda$, $T_0(\lambda) = 1$ 로 하고, $T_{k+1}(\lambda) = 2\lambda T_k(\lambda) - T_{k-1}(\lambda)$, $k=1, 2, \dots$.

$p_k(\lambda_i)$ 의 계산

$$(1) \rho_k = T_k[(\lambda_1 - d)/c], k=0, 1, \dots \text{라 둔다.}$$

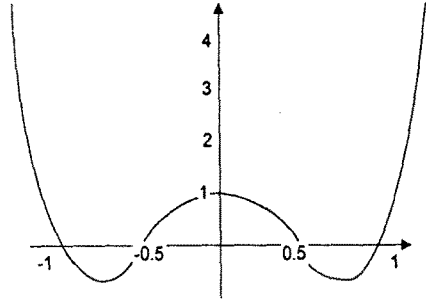


그림 1. 실변수의 4차 체비셰프다항식

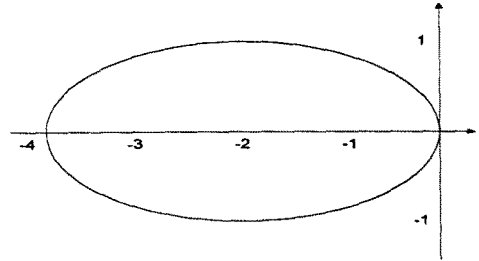


그림 2. 복소변수의 2차 체비셰프다항식

$$\begin{aligned} (2) \rho_{k+1} p_{k+1}(\lambda) &= T_{k+1}[(\lambda - d)/c] \\ &= 2 \frac{\lambda - d}{c} \rho_k p_k(\lambda) - \rho_{k-1} p_{k-1}(\lambda) \end{aligned}$$

을 계산한다.

$$(3) \sigma_{k+1} = \rho_k / \rho_{k+1} \text{로 하고,}$$

$$p_{k+1}(\lambda) = 2\sigma_{k+1} \frac{\lambda - d}{c} p_k(\lambda) - \sigma_k \sigma_{k+1} p_{k-1}(\lambda)$$

를 계산한다.

$$\left(\sigma_1 = \frac{c}{\lambda_1 - d}, \sigma_{k+1} = \frac{1}{2/\sigma_1 - \sigma_k}, k=1, 2, \dots \right)$$

여기서 λ_1 는 알고 있지 않지만 단순히 좌표변환으로 사용하고 있을 뿐이므로 근사치 v 로 치환할 수 있다. 또한 식 (7)에서 분모는 단지 상수이다.

3.2 체비셰프반복에 의한 초기벡터 구성

최종적으로 z_k 는 다음과 같이 계산된다[2].

임의의 초기벡터 z_0 를 선택하여 식 (8), 식 (9)를 계산한다.

$$\sigma_1 = \frac{c}{\lambda_1 - d} \quad (8)$$

$$z_1 = \frac{\sigma_1}{c} (A - d) z_0 \quad (9)$$

$k=1, 2, \dots$, 수렴할 때까지 식 (10), 식 (11)을 반복한다.

$$\sigma_{k+1} = \frac{1}{2/\sigma_1 - \sigma_k} \quad (10)$$

$$z_{k+1} = 2 \frac{\sigma_{k+1}}{c} (A - d) z_k - \sigma_k \sigma_{k+1} z_{k-1} \quad (11)$$

3.3 체비셰프다항식의 수렴특성

체비셰프다항식물<>사용한 경우 수렴속도는 식 (12)와 같이 표현된다[3]. 즉, 멱승법에서 2번째 고유치와 절대치최대의 고유치와의 비가 작으면 수렴이 빠른 것처럼 $\|\lambda_i\|/\|\lambda_r\|$ 이 작을수록 수렴이 빠르게 되는 것을 알 수 있다.

$$\frac{\|\lambda_i\|}{\|\lambda_r\|} = \frac{a_i + \sqrt{a_i^2 - c^2}}{a_r + \sqrt{a_r^2 - c^2}} \quad (12)$$

$$= \frac{a_i + b_i}{a_r + b_r}$$

여기서, a_i, b_i 는 i 번째 고유치를 지나는 타원의 장축과 단축의 길이이며, a_r, b_r 는 r 번째 고유치를 지나는 타원의 장축, 단축의 길이이다. 그리고 이 타원들은 초점거리(c)와 중심(d)이 일치하는 타원이다.

그렇다면 우리가 원하는 고유치와 불필요한 고유치가 체비셰프다항식에 의해 어떻게 구분되는가를 그림 3에서 간략하게 보여주고 있다. 그림 3에서 타원내의 고유치들은 체비셰프반복에 의해 그 성분들이 작아지고, 타원 밖의 고유치의 성분이 커져서 결국, 타원 외부에 위치하는 고유치로 수렴하게 된다.

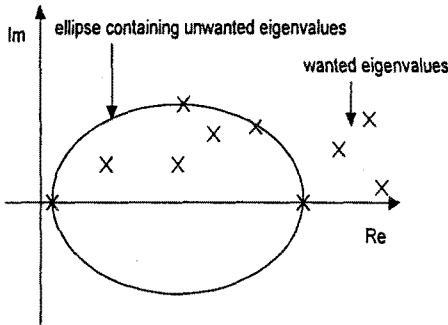


그림 3. 체비셰프다항식에 의한 고유치분할

4. 아놀디체비셰프법의 시험계통에의 적용

먼저 전체적인 알고리즘을 살펴본다[3].

단계 1. 수정아놀디알고리즘으로 구한 헤센버그 행렬의 고유치를 구한다.

단계 2. 단계 1에서 구한 고유치를 우리가 원하는 고유치와 불필요한 고유치로 구분한다.

단계 3. 불필요한 고유치를 포함하는 최적의 체비셰프다항원을 구성한 후 타원의 중심과 초점을 구한다. 그리고 z_0 를 우리가 원하는 고유치에 대응하는 고유벡터의 선형결합으로 표현한다.

단계 4. 체비셰프반복법을 이용하여 초기벡터를 재구성하여 단계 1로 돌아간다. 이 과정을 수렴을 만족할 때까지 반복한다.

이 알고리즘을 matlab으로 구현하여 IEEE39모선 계통에 적용한 결과를 표 1에 나타낸다. 표 1을 살

펴보면 공통적으로 최우측고유치인 -0.0159에 수렴함을 알 수 있다. 3개를 우측고유치로 찾은 결과를 살펴보면 $-0.1292 \pm j0.2957$ 과 $-0.1311 \pm j0.2973$ 에 수렴하지 않고, 다음 우측고유치인 $-0.1399 \pm j0.5821$ 에 수렴했다. 5개를 우측고유치로 찾은 결과에서는 $-0.1300 \pm j0.3000$ 에 수렴하지 않고, 다음 우측고유치인 $-0.1399 \pm j0.5821$ 에 수렴했다. 근접해 있는 고유치쌍의 경우에 수렴성이 다소 빈약함을 보이고 있다. 위의 계산에서 총 헤센버그행렬의 차원은 20을 넘지않는 범위에서 행하였으며, 각 반복회수는 102회, 403회였다.

표 1. 최우측고유치를 찾은 결과

IEEE39모선계통 의 고유치 (7개)	3개를 최우측고유치로 찾은 결과	5개를 최우측고유치로 찾은 결과
-0.0159	●	●
-0.1292+j0.2957		●
-0.1292-j0.2957		●
-0.1311+j0.2973		
-0.1311-j0.2973		
-0.1399+j0.5821	●	●
-0.1399-j0.5821	●	●

4. 결론

본 논문은 전력계통에서의 안정도를 판별하기 위한 고유치계산기법의 하나로 아놀디체비셰프법을 소개하였다. 체비셰프다항식이 초기벡터의 생성법으로 유효한가에 대해서도 상세하게 설명했다. 또한 체비셰프다항식을 수정아놀디법에 적용하여 IEEE39모선계통의 최우측고유치를 matlab으로 구현하여 계산했다. 계산 결과에 의하면 아직은 초보적인 단계이지만 다른 실제적인 보상기법들과 함께 프로그램상의 기법들을 고려해 가면서 꾸준히 연구해 나갈 예정이다.

5. 참고문헌

[1] L. Wang and A. Semlyen, "Application of sparse eigenvalue techniques to the small signal stability analysis of large power systems," IEEE Trans. on Power Systems, Vol.5, No. 2, pp.635-642, May 1990.

[2] Saad, Y. "Chebyshev acceleration techniques for solving nonsymmetric eigenvalue problems," Math. Comput. Vol.42, p567-588, 1984.

[3] Ho, D., Chatelin, F., and Bennani, M. "Arnoldi-Tchebyshev procedure for large scale nonsymmetric matrices," Math. Model. Numer. Anal. Vol.24, 53-65, 1990.