

비등방성 흡수체를 이용한 유한요소법 경계정합

장영춘 · 장성훈 · 천창을*
 서울시립대학교 전자공학과

FEM Boundary Matching Using Anisotropic Absorber

Youngchoon Jang · Sunghoon Jang · Changyul Cheon*
 Dept. of Electronics Engineering, Seoul City Univ.

Abstract - 3차원 유한요소법에 정합 조건을 구현하기 위해 유한한 두께를 갖는 흡수체를 이용하였다. 흡수체는 자유공간과의 경계에서 모든 입사각에 대해 무반사특성을 갖으며, 일단 흡수체 내로 전파된 파는 흡수체의 끝에 도달하기 전에 흡수체를 통과하면서 충분히 손실되도록 하였다. 이러한 흡수체는 ϵ_r 과 μ_r 에 비등방복소주대각텐서를 사용하여 구현된다. 구현된 흡수체층은 구형도파관에 적용하여, 전파상수를 이용하여 정합시킨 경우와 결과를 비교하였다.

1. 서 론

유한요소법은 해석영역을 유한한 요소로 분할하고, 경계조건을 만족하는 해를 구하는 수치기법이다. 경계에서 정합이 필요한 경우, 경계정합을 위한 방법에는 전파상수(Propagation Constant)를 이용한 방법과 흡수경계조건(Absorbing Boundary Condition)을 이용한 방법등이 있다. 전파상수를 이용한 방법은 가장 보편적으로 사용되지만, 정합조건을 적용할 구조에 대한 고유치문제를 풀어 전파상수를 정확히 구하여 하는 단점이 있다. 흡수경계조건을 이용한 방법은 전파상수를 정확히 구하기 어려운 구조에 대해 적용되어 왔다. 하지만 정식화의 어려움, 근사조건의 오차 그리고, 경계에서 완전정합이 이루어지지 않는 등의 문제점이 제기되어 왔다. 본 논문은 기본적으로 흡수경계조건을 이용하여 경계정합을 구현한다. 흡수경계조건을 이용한 경계정합을 위해 파는 경계에서 해석영역내로의 반사 없이 해석영역 밖으로 전파함이 보장되어야 한다. 전형적으로 흡수경계조건을 이용한 방법은 크게 다음의 두 가지가 있다. 편미분방정식의 해를 통해 얻어지는 1차, 2차 혹은 고차 근사경계조건을 유한해석영역의 경계에 적용하는 방법과 [1], 유한한 요소에 대해 얇은 인공흡수체를 적용하는 방법이 있다 [2]. 하지만 전자의 경우 근사조건으로 인한

오차, 고차흡수조건의 정식화의 어려움 등이 있고, 후자의 경우는 입사파의 입사각에 대해 경계에서 반사가 일어나는 경우가 발생했다. 최근 Berenger에 의해 2차원 유한차분영역(Finite difference-time domain) 요소에 대해 모든 입사파의 입사각에 대해 무반사특성을 갖는 새로운 인공완전흡수체의 모델이 소개되었다 [3]. Berenger의 완전흡수체(Perfectly matched layer)는 해석영역내에서 영역 밖으로 방사하는 파를 흡수하기 위해 손실매질층을 사용하였다. 하지만 Berenger의 흡수층은 변형된 맥스웰 방정식을 사용하므로, 유한요소법에 직접 적용하기가 용이하지 않다. 본 논문에 적용된 비등방성 흡수체는 자유공간과 비등방매질에서 일반적으로 유도된 맥스웰 방정식을 사용하여 유한요소법의 적용이 용이하며, 경계에서 입력파의 모든 입사각에 대해 무반사특성을 갖는다. 또한 적절한 ϵ_r 과 μ_r 를 선택하여 매질 임피던스가 주파수, 편파, 입사각으로부터 무관한 흡수체를 구현할 수 있다.

2. 비등방성 흡수체

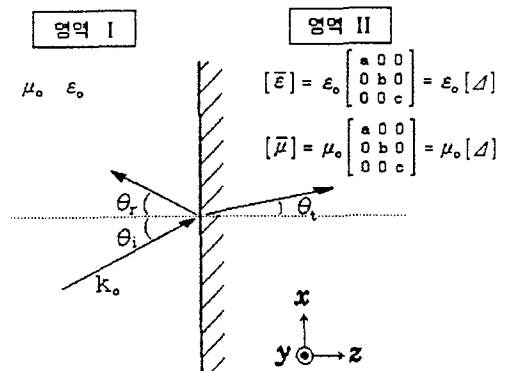


그림 1. 비등방성 매질로 입사하는 평면파

그림 1.에서 파는 자유공간영역 I에서 비등방성매질영역 II로 전파한다. 이때 영역 II에서 일반적인 맥스웰 방정식은 다음과 같고,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [\Delta] \bar{E} &= 0 \\ \nabla \cdot [\Delta] \bar{H} &= 0 \\ \nabla \times \bar{E} &= -j\omega\mu_0 [\Delta] \bar{H} \\ \nabla \times \bar{H} &= j\omega\varepsilon_0 [\Delta] \bar{E}\end{aligned}\quad (1)$$

(1)식에서 평면파의 고유해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\bar{E}(\bar{r}, t) &= \bar{E}_0 e^{-j(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)} \\ \bar{H}(\bar{r}, t) &= \bar{H}_0 e^{-j(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)}\end{aligned}\quad (2)$$

이때, $\bar{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$ 이고, \bar{E}_0 와 \bar{H}_0 는 상수벡터이다. (1)식과 (2)식으로부터 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}\bar{k} \cdot [\Delta] \bar{E}_0 &= \bar{k} \cdot [\Delta] \bar{H}_0 = 0 \\ \bar{k} \times \bar{E}_0 &= \omega\mu_0 [\Delta] \bar{H}_0 \\ \bar{k} \times \bar{H}_0 &= -\omega\varepsilon_0 [\Delta] \bar{E}_0\end{aligned}\quad (3)$$

다음의 변수변환을 통해 전파상수의 형태를 결정짓는 관계를 쉽게 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}\bar{E}'_0 &= [\Delta]^{\frac{1}{2}} \bar{E}_0 \\ \bar{H}'_0 &= [\Delta]^{\frac{1}{2}} \bar{H}_0 \\ \bar{k}' &= \frac{1}{\sqrt{abc}} [\Delta]^{\frac{1}{2}} \bar{k}\end{aligned}\quad (4)$$

(4)식의 변수변환을 (3)식에 적용하면 다음의 관계식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}\bar{k}' \cdot [\Delta] \bar{E}'_0 &= \bar{k}' \cdot [\Delta] \bar{H}'_0 = 0 \\ \bar{k}' \times \bar{E}'_0 &= \omega\mu_0 [\Delta] \bar{H}'_0 \\ \bar{k}' \times \bar{H}'_0 &= -\omega\varepsilon_0 [\Delta] \bar{E}'_0\end{aligned}\quad (5)$$

\bar{k}' 는 \bar{E}' 와 \bar{H}' 모두에 수직한 관계를 가지므로

$$\bar{k}' \cdot \bar{k}' = k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \quad (6)$$

이다. 결국 (4)식에 역변수변환을 통해 전파벡터들간의 관계식을 (7), (8)식과 같이 유도할 수 있고, 따라서 각 전파벡터들은 a, b, c의 선택에 의해 결

$$\frac{k_x^2}{bc} + \frac{k_y^2}{ac} + \frac{k_z^2}{ab} = k_0^2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned}k_x &= k_0 \sqrt{bc} \sin \theta \cos \psi \\ k_y &= k_0 \sqrt{ac} \sin \theta \sin \psi \\ k_z &= k_0 \sqrt{ab} \cos \theta\end{aligned}\quad (8)$$

정될 수 있다. 그림 1.과 같이 임의의 방향으로 편향되어 입사하는 평면파는 TE와 TM 모드로 분리할 수 있고, 영역 I과 영역 II의 경계에서 각 모드의 반사계수는 다음과 같이 유도된다.

$$R^{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t} \quad (9)$$

$$R^{TM} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_i - \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t}$$

또한 경계에서 각 필드의 접선성분의 연속조건으로부터 다음 식을 구할 수 있다.

$$\sin \theta_i = \sin \theta_t = \sqrt{bc} \sin \theta \quad (10)$$

(9), (10)식으로부터 경계에서 무반사특성과 입사각, 편파에 상관없는 경계면이 되기 위한 조건을 유도할 수 있다

$$a = b = \frac{1}{c} \quad (11)$$

(11)식에서 서로 종속된 a, b, c의 값을 만족하는 영역 II의 매질은 주파수와, 입사각, 편파에 상관없이 무반사 매질특성을 갖게 된다. 여기서 영역 II의 매질로 투과된 파를 흡수시키기 위해, 서로 종속된 a, b, c 값중 하나를 다음과 같은 복소수 $a = \alpha - j\beta$ 로 취하게 되면, 영역 II로 투과된 파는 다음과 같다.

$$\bar{E}_t = \bar{E}_0 e^{-k_0 \beta \cos \theta_t z} e^{-k_0 (\sin \theta_t x + \alpha \cos \theta_t z)} e^{j\omega t} \quad (12)$$

(12)식에서 α 는 영역 II에서 파장을, β 는 감쇄비율을 나타냄을 알 수 있다. 따라서 구현하고자 하는 흡수체의 비등방복소주대각텐서 완전한 형태는 다음과 같이 결정된다.

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha + j\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

유한요소법에 적용하기 위해 (13)식을 (1)식에 대

$$[\Delta]^{-1} \nabla \times [\Delta]^{-1} \nabla \times \bar{E} - k^2 \bar{E} = 0 \quad (14)$$

(14)식은 일반적인 유한요소법 해석과정을 적용할 수 있다.

3. 결과 및 응용

흡수체의 정합성능을 평가하기 위하여 그림 2.와 같이 $7.11 \times 3.56 \times (\ell + t)$ [mm] 구형도파관과 출력단에 두께 t 를 갖는 비등방성 흡수체를 삽입한 구조의 해석을 하였다. 이 같은 구조의 입력포트에서 입사파는 오직 TE₁₀ 모드만으로 가정했다.

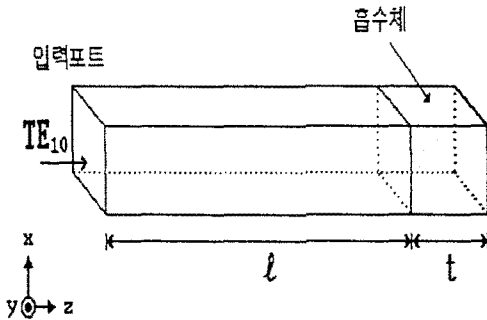


그림 2. 구형도파관. $\ell = 12.05$, $t = 2$ [mm]

본 논문에서 적용된 복소비등방성흡수체는 주대각 $a = a - j\beta$ 텐서형태로 텐서의 각 성분인 a , b , c 를 적절히 선택함으로써 구현된다. 그림 3.은 λ_g 에 대해 $2\beta t$ 를 변화시키에 따라 입력단의 반사계수를 보여준다. 이때 a 는 β 와 같은 것으로 선택하였으며 ($a = \beta$), λ_g 는 TE₁₀모드의 파장을 나타낸다. $2\beta t / \lambda_g$ 가 약 1.0에서 모든 해석 주파수에 대해

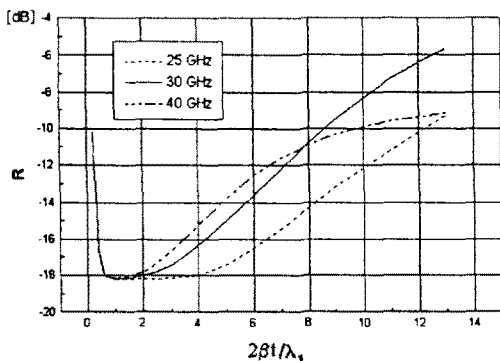


그림 3. 입력단의 반사계수(S₁₁)

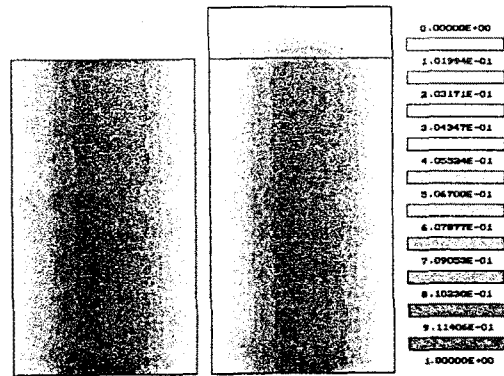
가장 좋은 결과를 나타낸다. 또한 표1.은 $2\beta t / \lambda_g$ 이 1.0을 만족하는 β ($a = \beta$)를 선택하였을 때

전파상수를 이용한 정합과 입력단의 반사계수가 거의 일치함을 보여준다.

	비등방성흡수체를 이용한 정합	전파상수를 이용한 정합
25 [GHz]	-18.166 [dB]	-18.172 [dB]
30 [GHz]	-18.162 [dB]	-18.169 [dB]
40 [GHz]	-18.126 [dB]	-18.142 [dB]

표 1. 반사계수(S₁₁)비교

그림 4.은 30[GHz]에서 전파상수를 이용하여 정합하였을때(A)와 비등방성흡수체를 이용하였을 때(B), $x = 1.78$ 인 도파관 단면상의 $|\bar{E}|$ 분포를 나타낸다.



(A) (B)

그림 4. 도파관 내의 $|\bar{E}|$ 분포 비교 (yz 평면)

(A)전파상수를 이용한 해석결과.

(B)비등방성 흡수체를 이용한 해석결과

그림 4.의 (B)에서 파는 흡수체를 통과하면서 종단까지 충분히 감쇄(흡수)되어 감을 볼 수 있고, 도파관 내에서, 전파상수를 이용하여 정합시켰을 때(A)와 같은 필드분포를 보여준다. 그림 5.는 Open된 구형도파관의 방사패턴을 보기위한 구조이다.

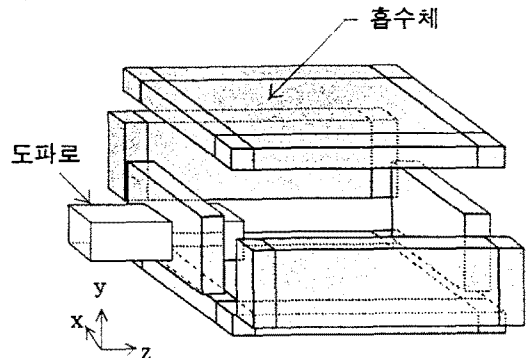


그림 5. Open 된 구형도파로

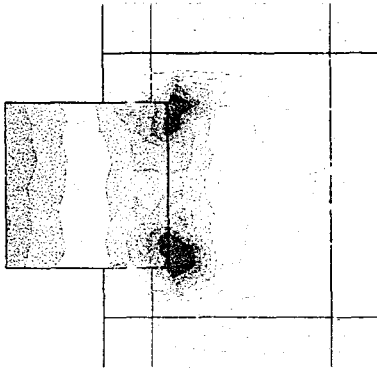


그림 6. yz 평면 $|E|$ 분포

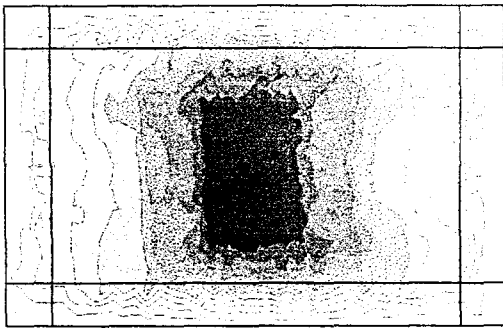


그림 7. xy 평면 $|E|$ 분포

입력파는 TE_{10} 모드로 가정했고, 도파관의 끝부분은 흡수체로 감싼구조이다. 그림 6.과 그림 7.은 그림 5.의 yz평면과 xy평면에서 $|E|$ 분포를 나타낸다. 도파관영역에서는 도파관 모드를 볼수 있으며, 도파관의 끝부분에서 구조의 불연속으로 인한 정재파를 볼수 있다. 하지만 흡수체영역에서 필드분포는 천천히 감소되어 해석영역 내부로의 반사를 갖지 않음을 보여준다.

4. 결 론

유한요소법의 정합을 위해 비등방성흡수체를 적용하였다. 인공적으로 만들어진 흡수층은 ϵ_r 과 μ_r 이 복소주대각텐서의 형태이다. 텐서의 각성분을 적절히 선택함으로써, 경계에서 주파수와 편파에 상관없이 무반사특성을 얻을 수 있으며, 흡수체내부로 전파된 파는 흡수체에서 손실시킬 수 있다. 이러한 비등방성흡수체를 이용한 정합방법은 정합경계면이 복잡한 구조를 갖는 소자의 해석에도 응용될 수 있다.

- [1] B. Engquist and A. Majda, "Absorbing Boundary Conditions for Numerical Simulation of Waves", Math of Comp., Vol. 31, No. 139, pp. 629-651, Aug. 1977
- [2] T. Özdemir and J. L. Volakis, "A comparative study of an absorbing boundary condition and an artificial absorber for truncation finite element meshes," Radio Sci., Vol 29, No. 5, pp. 441-449, mar. 1994
- [3] J. P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electro-magnetic waves," J. Computational Phys., Vol. 114, No. 2, pp. 185-200, Oct. 1994
- [4] Zachary S. Sacks, David M. Kingsland, Robert Lee, and Jin-Fa Lee, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. 43, No. 12, pp. 1460-1463, December 1995
- [5] David M. Kingsland, J. Gong, J. L. Volakis and Jin-Fa Lee, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. 44, No. 7, pp. 975-981, July 1996
- [6] J.-Y. Wu, D. M. Kingsland, J.-F. Lee, and R. Lee, IEEE Trans on Antennas and Propagation, Vol. 35, No. 1, pp. 40-50, January 1997
- [7] J. Jin, The Finite Element Method In Electromagnetics, John Wiley & Sons, New York, 1993

- [8] R.F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Field, McGraw-Hill Co, New York, 1961