

LMI에 의한 2관성 공진계의 H_∞제어

김진수^o, 김승범, 신재화[^], 김영석
인하대학교 전기공학과, 인천전문대학 전기과[^]

H_∞ Control of the Two-Mass Resonant System by LMI

Jin-Soo Kim^o, Seoung-Beom Kim, Jae-Hwa Shin[^], Young-Seok Kim
Inha University, Junior College of Incheon[^]

Abstract - In the industrial motor drive system, a shaft torsional vibration is often generated when a motor and a load are connected with a flexible shaft. This paper treats the vibration suppression control of such a system. In this paper, a control system design method using Linear Matrix Inequality (LMI), which is a tool for control design that replaces or complements Lyapunov-Riccati equations, is provided and a H_∞ speed controller for a induction motor by LMI is proposed. In the H_∞ speed controller, weights are used to satisfy tracking and disturbance rejection. Experimental results show the validity of the proposed H_∞ speed controller by LMI, and this controller is compared with the state feedback controller.

1. 서론

전동기 가변속제어에 있어서 전동기와 부하가 강성이 작은 축으로 연결되는 경우 전동기의 관성과 부하의 관성에 의해 축에 비틀림진동이 발생한다. 이와 같이 구성된 기계계를 2관성 공진계라고 한다.

2관성 공진계의 축비틀림 진동을 억제하기 위하여 최근 외관속기를 이용하는 방법, 공진비제어에 의한 방법, H_∞제어를 활용하는 방법 등이 연구되어지고 있다[1~3]. 또한, 최소차원관속기를 사용하여 측정 불가능한 상태변수들을 추정하고 이를 이용하여 극점배치방법에 의하여 상태제어제어를 하는 방법들이 많이 있다[4,5].

이와같은 연구 중에서 가중함수에 의하여 목표치추종성능과 외란·진동억제성능을 동시에 만족하게 하는 H_∞제어를 중심으로한 Robust제어의 연구가 활발하여 여러 분야에서 고성능의 제어를 실현하고 있다. 최근 많은 제어설계사양과 Robust안정조건이 선형행렬부등식 즉 LMI(Linear Matrix Inequality) 조건으로서 표현할 수 있음에 주목하여 제어를 최적화문제로서 정식화하여 수치계산의 해법에 따라 해를 얻고 있다[6,7]. 이와같은 LMI에 의한 제어는 현대제어이론에서 중요한 역할을 하는 Lyapunov방정식과 Riccati방정식을 대체할 수 있는 새로운 제어설계수단으로 많은 주목을 받고 있다.

본 논문에서는 LMI에 의한 제어계의 해석 및 설계법을 소개하고, 목표치추종성능이 좋고 외란과 모델오차에 대하여 강인한 2관성 공진계를 갖는 유도전동기의 LMI에 의한 H_∞속도제어기(이하 LMI 제어기)를 제안한다. 제안한 LMI 제어기의 유효성을 실험을 통하여 확인하고 또한 종래의 극점배치기법을 사용한 상태제어된 속도제어기(5)와 비교·검토한다.

2. 2관성 공진계

강성이 작은 축에 의해 전동기와 부하가 연결된 2관성 공진계(이하 2관성계)는 그림 1과 같다.

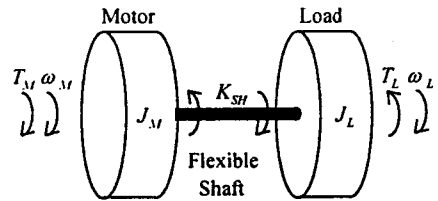


그림 1 2관성계 플랜트 모델

또한 2관성계의 상태방정식은 다음 식과 같다.

$$\dot{x} = A_p x + B_p T_M + B_d T_L, \quad y = C_p x \quad (1)$$

여기서

$$x = \begin{bmatrix} \omega_M \\ T_{SH} \\ \omega_L \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} -\frac{B_M}{J_M} & -\frac{1}{J_M} & 0 \\ K_{SH} & 0 & -K_{SH} \\ 0 & \frac{1}{J_L} & -\frac{B_L}{J_L} \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J_L} \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

단,

J_M, J_L : 전동기, 부하관성모멘트

B_M, B_L : 전동기, 부하감쇠계수

K_{SH} : 축비틀림상수

ω_M, ω_L : 전동기, 부하속도

T_M, T_{SH}, T_L : 전동기발생토크, 축비틀림토크, 부하외란토크

이와같은 2관성계의 제어량은 부하속도 ω_L 이지만 관측 불가능하므로 관측 가능한 전동기속도 ω_M 을 제어하여 축비틀림진동을 억제한다.

3. H_∞제어 일반화플랜트

2관성계에 대하여 H_∞제어이론을 적용하기 위하여 그림 2와 같이 일반화플랜트를 설정한다.

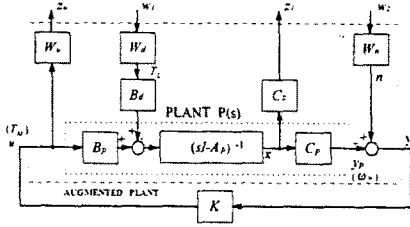


그림 2 H_∞제어 일반화플랜트

그림 2에 있어서 w_1, w_2 는 각각 외란과 지령치에 대한 입력이고, z_1, z_2 는 출력이다. 이 때 z_1 은 다음과 같다.

$$z_1 = C_z x = \begin{bmatrix} \omega_M & 0 & 0 \\ \omega_M - \omega_L & 1 & 0 \\ \omega_L & 0 & 1 \end{bmatrix} x, C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

T_L 은 외란토크, n 은 속도지령치, W_d 와 W_n 은 이를 위한 가중함수이다. 가중함수를

$$W_d = \begin{bmatrix} A_{wd} & B_{wd} \\ C_{wd} & D_{wd} \end{bmatrix}, W_n = \begin{bmatrix} A_{wn} & B_{wn} \\ C_{wn} & D_{wn} \end{bmatrix}, W_u = D_{wu} \quad (3)$$

로 정의하면, 그림 2의 일반화플랜트의 상태공간표현과 입력과 출력의 관계 G 는 다음 식과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$G := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & B_p C_{1w} & 0 & B_p D_{1w} & B_p \\ 0 & A_{1w} & 0 & B_{1w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{2w} & 0 & B_{2w} & 0 \\ C_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1w} \\ -C_p & C_{1w} & 0 & D_{1w} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

이와같은 식 G 에 포함된 가중함수 W_d, W_n, W_u 의 요소들을 적절히 선택한 후 Matlab을 이용하면 제어기 K 를 구할 수 있다.

4. 선형행렬부등식에 의한 제어계 설계

본 절에서는 식 (5)의 일반화플랜트의 입력과 출력의 관계 G 를 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality : LMI)에 적용한다. 제어계 설계에 사용되는 Riccati부등식의 LMI 표현에 대하여 설명하고, LMI 조건을 제약으로 하는 설계화문제를 다룬다.

4.1 Riccati부등식의 LMI 표현

제어계의 설계에 쓰이는 Riccati부등식은 다음과 같다.

$$A^T S + SA + SBR^{-1}B^T S + Q < 0, R > 0 \quad (6)$$

이 때 A, B 는 2관성계의 실제 시스템에서는 식 (5)와 같이

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 & B_p C_{1w} \\ 0 & A_{1w} & 0 \\ 0 & 0 & A_{2w} \end{bmatrix}, B = [B_1 \ B_2] = \begin{bmatrix} 0 & B_p D_{1w} & B_p \\ B_{1w} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2w} & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

이고, Q, R, S 는 임의로 선택된다. 식 (6)은 Schur complement(S)를 이용하면 다음과 같은 LMI로 표현가능하다.

$$\begin{bmatrix} -A^T S - SA - Q & SB \\ B^T S & R \end{bmatrix} > 0 \quad (8)$$

또 식 (6)의 LMI 조건은

$$F_0 := \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, F_i := \begin{bmatrix} -A^T S_i - S_i A & S_i B \\ B^T S_i & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1 \sim m) \quad (9)$$

으로 치환하는 것에 의해 일반형으로 된다.

4.2 수치계산법

LMI 조건을 제약으로 하는 설계화문제는 크게 나누면 다음 2가지이다.

1) 가해문제(Feasibility Problem : FP)

$$\text{find } e \in \mathbb{R}^m \text{ such that } F(e) > 0$$

2) 최적화문제(Optimization Problem : OP)

$$\text{minimize } c^T e \text{ subject to } F(e) > 0, e \in \mathbb{R}^m$$

단, $c \in \mathbb{R}^m$ 는 주어진 것으로 한다.

또한 scaling된 행렬 norm 조건 $\|WFW^{-1}\| < \gamma$ 는

$$\|WFW^{-1}\| < \gamma \Leftrightarrow W^{-T} F^T W^T W F W^{-1} < \gamma^2 I \\ \Leftrightarrow F^T W^T W F < \gamma^2 W^T W \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 V - F^T V F > 0; V := W^T W > 0$$

로 변형이 가능하기 때문에 다음의 FP와 OP를 얻는다.

1) FP : 행렬 F 와 $\gamma > 0$ 가 주어진 경우, scaling행렬 W (실제에서는 V)를 구하는 문제, 즉

$$\exists V := W^T W > 0 \text{ such that } \gamma^2 V - F^T V F > 0$$

2) OP : 행렬 F 와 scaling 행렬 W 가 주어진 경우, $\gamma > 0$ 을 최소화($\gamma^2 > 0$ 을 최소화)하는 문제, 즉

$$\text{minimize } \gamma > 0 \text{ such that } \gamma^2 V - F^T V F > 0$$

이와같은 가해문제와 최적화 문제는 반복수행에 의하여 γ 의 값이 가장 작을 때의 V 를 구하는 문제로 된다.

5. 2관성계의 LMI에 의한 H_∞속도제어기

LMI에 의한 H_∞제어기를 설계한다. 그림 2의 H_∞제어 일반화플랜트에서 외란입력 w_1 에 가중함수 W_d 를 곱한 것이 실제의 부하에 가해지는 외란토크 T_L 이다. n 은 속도지령치이다. W_n 은 이에 대한 가중함수이다. 제어량 z_u 는 H_∞제어 문제를 해결하기 위해 필요한 것으로 여기에서는 $W_u = 10^{-6}$ 으로 설정하고 있기 때문에 제어계의 설계에는 영향을 주지 못한다.

가중함수 W_d 는 부하외란토크 T_L 로부터 전동기속도, 부하속도 및 그것들의 차속도까지의 폐루우프전달함수의 가중함수이다. 이것을 비틀림축이 없는 1관성계의 계인특성형태로 주파수 정형할 수 있다면 축비틀림진동은 억제가능하다. 따라서 $|W_d|^{-1}$ 가 1관성계의 계인특성형태로 되도록 가중함수 W_d 를 설계한다. 또한 w_2 로부터의 전달함수에 착안한다면 W_n 은 상보감도함수의 가중함수로 되는 것을 알 수 있다. 따라서 고주파영역에 있어서 관측노이즈나 플랜트의 모델화오차 등의 영향을 제거하기 위하여 W_n 에 하이패스특성을 갖도록 한다. 이상에 따라 2개의 가중함수를 식 (11)과 같이 설계한다.

$$W_d = \gamma_d \frac{(s + \omega_d)}{(s + 10^{-3})(s + 10^5)}, W_n = \gamma_n \frac{(s + 50)}{(s + 10^5)} \quad (11)$$

윗식의 파라미터 $\gamma_d, \omega_d, \gamma_n$ 을 적절히 설계하여야

Matlab을 사용하면 LMI에 의한 H_∞ 제어기 $K(s)$ 를 구할수 있다.

시뮬레이션 결과 설계파라미터 ω_d 는 공진주파수보다 낮고 반공진주파수 부근으로 설정하면 좋은 결과가 얻어졌다. 또한 γ_d 를 크게 설정하면 외란억압특성은 향상되고 γ_n 을 크게 설정하면 관측노이즈나 플랜트의 모델화 오차에 대한 견실성이 향상되지만 양자에는 상충관계가 있다. 따라서 H_∞ 제어문제를 만족하는 범위에서 γ_d, γ_n 을 크게 하여 $K(s)$ 를 결정한다. 이에 따라 $\gamma_d = 5, \omega_d = 40, \gamma_n = 500$ 으로 설정하면 이에 대한 보드선도는 그림 3과 같고, 이 경우 식 (12)의 제어기가 얻어진다.

$$K(s) = 4.921 \times 10^4 \times \frac{(s + 1 \times 10^5)(s + 0.6 \pm j80)(s + 5.4)}{(s + 5.6 \times 10^5)(s + 3.6 \times 10^4)(s + 9 \pm j34)(s + 0.001)} \quad (12)$$

이와 같은 제어기 $K(s)$ 를 그림 2의 제어기 K 로 하여 실험하면 LMI에 의한 H_∞ 속도제어파형을 얻을수 있다.

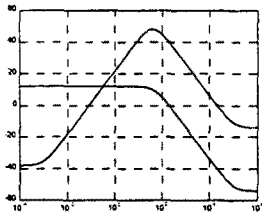


그림 3 가중함수에 대한 보드선도 (ver : [dB], hor : [ω])

6. 실험결과 및 고찰

실험에 사용된 2관성계의 기계적 정수는 표 1과 같다.

표 1 2관성계의 기계적 정수

J_M	J_L	K_{SH}
0.008 (kgm^2)	0.08 (kgm^2)	50.527 (Nm/rad)

본 논문에서 제안한 LMI에 의한 H_∞ 제어기와 비교를 위하여 추정된 상태량을 극점배치법에 의해 상태궤환하는 상태궤환제어기[5]에 대한 실험도 병행하여 실시하였다. 실험은 속도제어실험과 부하인가실험으로 나누어서 실시하였다.

6.1. 속도제어실험

속도제어실험은 전동기를 무부하의 정지상태에서 200[rpm]의 속도지령을 스텝 인가한다. 그림 4, 5는 상태궤환제어기에 대한 실험결과이다. 속도지령 증가시에 약 6(Nm)의 속도오크가 걸려서 속비틀림이 발생하고, 이는 전동기의 속도변동을 야기시킨다. 200[rpm]에 도달하기까지 약 0.7초가 걸리는데 이는 제어기의 극을 조정하여 오버슈트가 생길만큼 하였을 때의 응답시간이다. 오버슈트가 생기지 않도록 제어기의 극을 조정한다면 응답시간은 더 길게 된다. 정상상태에서 전동기의 속도는 안정적이지 못하지만 부하속도는 안정적임을 볼 수 있다.

그림 6, 7은 LMI 제어기에 대한 실험결과이다. 속도지령에 도달하기까지의 응답시간은 0.5초로 상태궤환제어기보다 우수함을 알 수 있다. 이는 H_∞ 제어기에서 속도지령치에 대한 가중

함수를 설정하여 응답속도를 빠르게 한 결과이다. 속도오크도 약 9(Nm)으로 양호함을 알 수 있다.

6.2. 부하인가실험

부하인가실험은 부하로서 발전기에 연결된 저항부하를 사용한다. 200(rpm)의 무부하 일정속도하에서 순간적으로 부하를 연결하여 정격토크오크의 약 37%에 해당하는 4.5(Nm)의 부하토크오크를 인가한다.

그림 8, 9는 상태궤환제어기에 대한 실험결과이다. 화살표 시점에서 부하를 인가하였다. 부하를 인가하였을 때 전동기의 속도는 약 166(rpm)까지 17% 하강하며 약 1.2초 후에 회복된다. 이는 관성비가 크기 때문에 나타나는 결과로 관성비가 커질수록 회복속도는 더욱 느려지게 된다.

그림 10, 11은 LMI 제어기에 대한 실험결과이다. 부하를 인가하였을 때 전동기의 속도는 약 190(rpm)까지 5% 하강하고 약 0.6초 후에 회복되는데 이는 상태궤환제어기보다 훨씬 우수하다. 이것은 H_∞ 제어기에서 외란에 대한 가중함수를 설정한 결과이다.

7. 결론

본 논문에서는 유도전동기와 부하가 강성이 작은 축에 의해 결합되어 낮은 공진주파수로 진동하는 2관성계에 대한 속도제어를 다루었고 2관성 공진계를 갖는 유도전동기의 LMI에 의한 H_∞ 속도제어기를 제안하였다. 제안된 LMI 제어기는 가중함수를 비틀림축이 없는 1관성계의 계인특성형태로 주파수정형함수로서 속비틀림진동을 억제하여 외란응답을 개선하였고, 또한 하이패스특성을 갖는 가중함수를 사용하여 고주파영역에 있어서 관측노이즈나 플랜트의 모델화오차 등의 영향을 제거하였다. 제안된 LMI 제어기와 기존의 상태궤환제어기를 실험하여 비교·검토함으로써 제안하는 LMI 제어기가 속도응답이 빠르고 외란에 대하여도 보다 강인함을 확인할 수 있었다.

이 연구는 1995년도 한국과학재단
연구비 지원에 의한 결과임
(과제번호 : 951-0912-098-2)

참고문헌

- [1] 結城和明 外 2人, "共振比制御による2慣性共振系の振動抑制制御", 日本電氣學會論文誌, Vol.113-D, No. 13, 1993, pp. 1162~1169
- [2] 杉林 道彦 外 2人, "2慣性共振系の状態フィードバックによる振動抑制制御とパラメータ変動を考慮した制御特性", 日本電氣學會 産業應用部門全國大會, 1993, pp. 843~848
- [3] 大内茂人 外 2人, "H ∞ 制御理論に基づく電動機の制振制御", 日本電氣學會論文誌, Vol.113-D, No. 3, 1993, pp. 325~332
- [4] 海田英俊 外 1人, "最小次元外亂トルクオブザーバに基づく多慣性機械系の振動抑制制御", 日本電氣學會 研究會資料, SPC-93-38, 1993, pp. 81~90
- [5] 岩崎 誠 外 2人, "2慣性共振系の状態フィードバック制御と定數計測法", 日本電氣學會 産業應用部門全國大會, 1994, pp. 1180~1185
- [6] T. Iwasaki, "Control System Design via LMIs", 計測と制御, 34-3, 1995
- [7] S. Boyd et al., "Linear Matrix Inequalities in System and Control", SIAM, 1994, pp. 1~35
- [8] Zhou, Doyle, Glover, "Robust and Optimal Control", Prentice-Hall, Inc., 1996, pp. 17~44

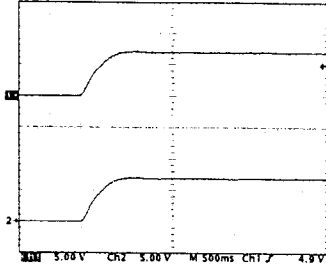


그림 4 상태제어환제어기 (속도제어)
150 [rpm]/div, 0.5 sec/div
(상) 실제 전동기속도, (하) 실제 부하속도

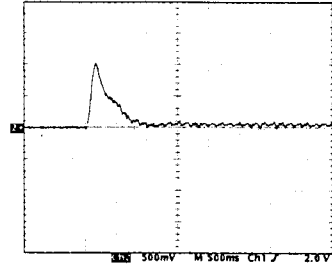


그림 5 상태제어환제어기 (속도제어)
3 [Nm]/div, 0.5 sec/div
실제 축비틀림토크

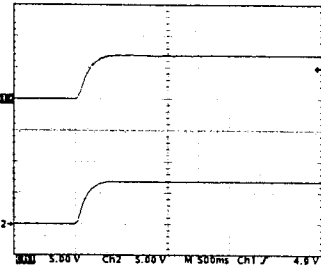


그림 6 LMI 제어기 (속도제어)
150 [rpm]/div, 0.5 sec/div
(상) 실제 전동기속도, (하) 실제 부하속도

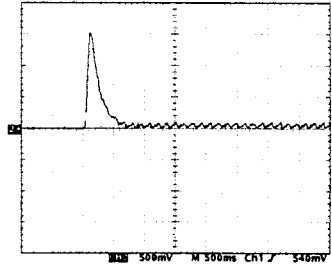


그림 7 LMI 제어기 (속도제어)
3 [Nm]/div, 0.5 sec/div
실제 축비틀림토크

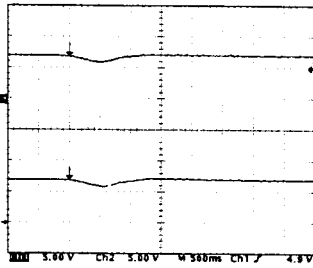


그림 8 상태제어환제어기 (부하인가)
150 [rpm]/div, 0.5 sec/div
(상) 실제 전동기속도, (하) 실제 부하속도

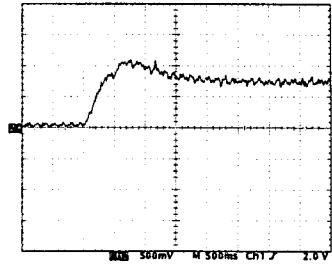


그림 9 상태제어환제어기 (부하인가)
3 [Nm]/div, 0.5 sec/div
실제 축비틀림토크

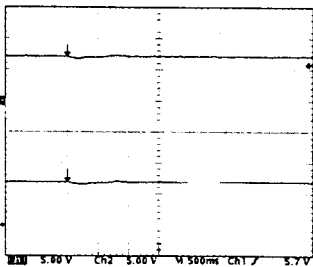


그림 10 LMI 제어기 (부하인가)
150 [rpm]/div, 0.5 sec/div
(상) 실제 전동기속도, (하) 실제 부하속도

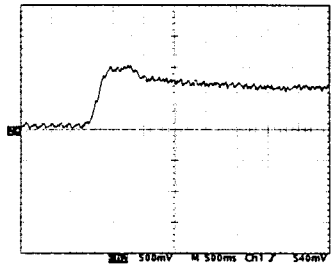


그림 11 LMI 제어기 (부하인가)
3 [Nm]/div, 0.5 sec/div
실제 축비틀림토크