Bruner의 EIS이론과 수학학습

박 성 택(부산 교육 대학교)

1. 서 언

최근 수학 학습의 인지 과정에 대한 연구가 수학 교육 연구의 한 부분으로 관심을 갖기 시작했다.

인지 과정에 대한 연구는 Jerome S.Bruner(1915~)의 인지발달 수준에 따른 표현양식(modes of representation) 즉, 작동적(enactive), 영상적(iconic), 상징적(symbolic)표현양식에 관한 이론이 많이 인용되고 있다.

Bruner는 New york에서 1915년에 태어나서 1937년에 Duke대학교에서 학사학위를 받고, 1941년에 Harvard대학교에서 철학박사 학위를 받았다. 1960년에 Harvard대학교에 인지연구를 위한 연구소를 설립하여 소장직을 맡았고, Princeton대학교와 Cambridge대학교에서 심리학 교수로 역임했다.

Bruner의 연구와 사상은 스위스의 Jean Piaget의 발생적 인식론의 영향을 많이 받았다.

Bruner는 인지적 수업 이론을 대표하는 학자로서 지식이란 학생 스스로 발견하는 희열감을 느낄 때 진실한 학습이 이루어진다는 점을 주장하였다.

Bruner가 인지이론가로 불리는 것은 그의 저서와 연구논문의 제목이 인지적인 제재가 많았기 때문이다. Bruner의 인지과정에 대한 연구는 수학적인 내용을 대상으로 하고 있기 때문에 인지경로 즉, EIS(enactive→iconic→symbolic)이론을 알아보고, 수학학습에 적용이라는 차원에서 고찰해 보기로 한다.

2. Bruner의 EIS 이론

Bruner는 1960년에 '교육의 과정(The Process of Education)'을 출판하였고, 1966년에는 '교수이론서설(Toward Theory of Instruction)'이라는 저서를 출판하였다. '교육의 과정'이 교육과정의 일반이론이라면 '교수이론서설'은 그 일반이론의 구체적인 실현수단

을 보여 주고 있다.

교수이론은 규범적(normative)이고 처방적(prescriptive)인 이론으로 학습 내지 발달을 효과적으로 촉진하는 방법을 제시하는 이론이다.

교수이론도 학습이론이나 발달이론과 같이 인간의 학습과 발달을 다루기는 하지만 학습이론이나 발달이론과는 달리, 학습이나 발달이 일어나기 전에 그 과정을 촉진하는 활동이 따라야 할 방법상의 기준을 명시하는 이론이다.

예를 들면, 아이들은 대부분 몇 살 때 가역성의 개념을 가지게 되는가 하는 것과 아이들에게 가역성의 개념을 어떻게 가르쳐 줄 것인가의 문제에서 전자는 발달 또는 학습이론이고, 후자는 교수이론이 되는 것이다. 여기에서 교수이론이 학습이론 내지 발달이론과 전혀 무관하다고 생각하는 것은 잘못이고, 이들 사이에는 상호 관련을 맺고 서로 시사를 받아야 한다는 점을 강조하고 있다.

Bruner는 지식의 구조(structure of knowledge)이론에서 어떤 영역의 지식도 다음과 같은 세가지 방법으로 표상해 낼 수 있다고 한다.

① 학습자에게 제시하는 개념, 지식, 구조를 이해하는 데는 실물 그대로의 제시를 통해서 행동화, 조작화로 지식을 이해하는 작동적 표현 양식(enactive mode of representation)
② 개념을 충분히 정의하지 않고도 영상을 통해서 그림이나 도식으로 지식을 이해하는 영상적 표현 양식(iconic mode of representation)
③ 법칙과 원리에 의해 지배되는 상징적 체제에서 도출된 논리적 명제에 의한 기호나 문자식으로 지식을 이해하는 상징적 표현 양식(symbolic mode of representation)

여기에서 작동적 표현 양식은 고도의 조작적인 활동이 중심이 된다. 그러므로, 적절한 운동 반응을 통하여 무엇을 어떻게 하는가를 아는 것에 있다.

영상적 표현 양식은 내적인 심상에 근거를 두고 시각적 또는 다른 감각적 조작에 의하여 지식을 그림이나 도식으로 표현하는 것에 있다.

상징적 표현 양식은 융통성 있는 사고체계에 근거를 두고 언어나 문자, 기호 등을 사용하여 지식을 표현하고 있다.

위의 각 양식은 그 선행 양식에 의존하여 발달하고 서로간에 부분적으로 변형될 수 있다고도 한다.

이러한 계열에서 연령의 증가에 따라 작동적 표현 양식보다는 영상적, 상징적 표현양식에 보다 크게 의존하게 된다는 것이다. 이것은 학습자의 발달 수준이 낮으면 작동적 표현이, 학습자의 발달 수준이 높으면 영상적, 상징적 표현 양식이 이용될 수 있다는 점이다.

표현양식의 세 수준을 경제성 수준에서 평가한다면 작동적 표현보다는 영상적 표현이, 영상적 표현보다는 상징적 표현이 보다 함축적으로 경제성이 높다고 할 수 있다.

Bruner는 인지경로에 관한 EIS이론의 바탕이 되고 있는 '이차식의 완전제곱'에 관한 수학학습지도의 예를 다음과 같이 들고 있다.

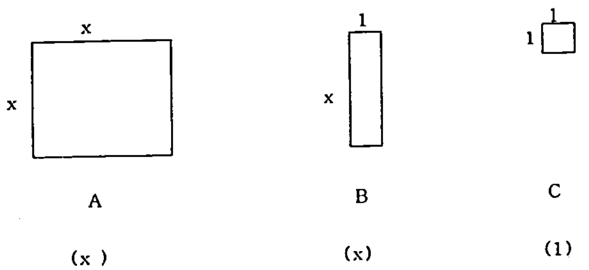
이 수업 장면에서는 초등학교 3학년(8세)아동 4명을 대상으로 하고 Harvard대학교의 수학자와 심리학자 6명이 가르쳤다고 한다.

실제 수업은 다음과 같이 진행되었다.

사각형으로된 큰 방의 네 모퉁이에 네 개의 큰 책상이 있고 그 책상에는 아이 한 명과 보조교사 1명이 자리를 함께 하고 있다. 수학자와 심리학자는 여기저기를 돌아다니며 필요에 따라 아이들과 보조 교사들을 도와준다.

학습 내용은 이차식의 완전제곱형의 인수분해이다. 학습의 흐름은 주어진 자료를 조작, 구성해보는 것에서 시작하여 자기가 구성한 수학적 원리를 영상으로 파악하도록 하고 나아가서 식으로 표현하게 되어 있다.

여기에서 사용된 학습자료는 다음과 같은 세 종류의 나무토막이다.

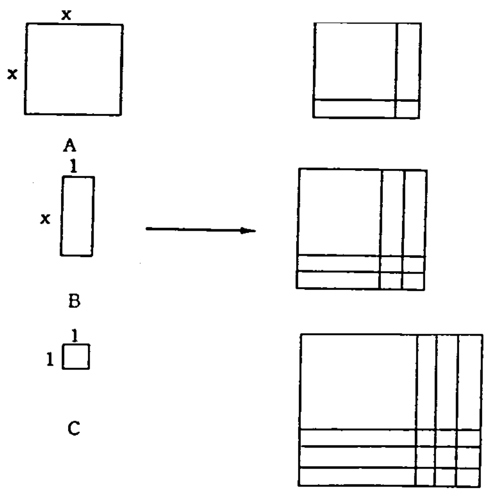


(그림 1)

(그림 1)에서 A형은 한 변의 길이가 x인 정사각형모양의 판자로 x곱하기x를 'x네모'로 부르기로 하고, B형은 가로 1, 세로 x인 직사각형 모양의 판자로 1곱하기 x를 'x막대'로 부르게 한다. 그리고, C형은 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 판자로 1곱하기 1의 나무토막을'1네모'로 부르기로 한다.

아동들에게 A, B, C형의 자료들을 여러 개씩 주고 그것으로 놀 기회를 충분히 주어 자료에 대한 친밀감과 호기심을 갖게 한 다음에 문제를 제시한다.

아이들에게 주어진 문제는 한 변의 길이가 x인 정사각형, 즉 'x네모'보다 큰 정사각형 모양을 만들어 보게 하는 것인데 아동들은 별로 어려움 없이 쉽게 다음 (그림 2)와 같은 모양을 만들었다.



x^2+2x+1

$= (x+1)(x+1)$

x^2+4x+4

$= (x+2)(x+2)$

x^2+6x+9

$= (x+3)(x+3)$

구체물 조작 → 영상 (그림) → 형식화 (기호, 식)

작동적 표상(E) → 영상적 표상(I) → 상징적 표상(S)

(그림 2)

(그림 2)를 보면서 아이들에게 그들이 만든 모양이 A, B, C형 자료가 각각 어떻게 구성되어 있는지를 말해 보게 한다. 아이들은 나무토막을 하나씩 짚어 가면서 세어나간다.

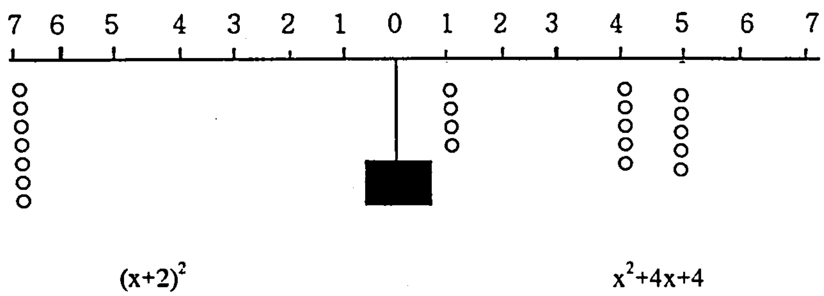
처음 것은 x네모 1개, x막대 2개, 1네모 1개이고, 둘째 것은 x네모 1개, x막대 4개, 1네모 4개이고, 셋째 것은 x네모 1개, x막대 6개, 1네모 9개라는 것을 알게 되고, 이를 그림으로 그려보게 한 다음 그것을 기호를 써서 나타내어 보게 한다. 이때 아이들은

쉽게 $x^{\square}+2x+1$, $x^{\square}+4x+4$, $x^{\square}+6x+9$를 쓸 수 있었고 큰 정사각형은 어떤 네모인가의 질문에 한 변의 길이가 '(x+1)네모', '(x+2)네모', '(x+3)네모'라는 것도 말할 수 있었다.

이와 같은 학습과정에서 아이들은 $x^{\square}+2x+1 = (x+1)(x+1)$, $x^{\square}+4x+4 = (x+2)(x+2)$, $x^{\square}+6x+9 = (x+3)(x+3)$의 등식을 발견할 수 있었다. 앞의 등식에서 좌변의 'x네모'는 변함없이 1개씩이고 'x막대'는 2, 4, 6, 8, …의 비율로 증가하고, '1네모'는 1, 4, 9, 16, …으로 증가하며 등식의 우변은 1, 2, 3, 4, … 로 증가한다는 규칙성을 발견했는데 이를 발견학습으로 보았다는 것이다.

위에서 보는 바와 같이 Bruner의 인지경로 학습은 처음에는 활동적 수준으로 아동들이 실제 구체물 조작 활동을 해 보게 하고, 다음에는 영상적 수준으로 대상의 이미지를 다루며, 마지막에 상징적 수준으로 기호를 익숙하게 다루게 한 것이다.

이상의 수학적 원리를 아동들이 구체적인 사물에서 벗어나서 추상적인 기호체계로서 공식을 이해하는 데는 적어도 그 공식이 여러 가지 구체적인 사물에서 다르게 표현된다는 것을 확인하는 경험이 필요하다. 이 경험은 '천평'을 써서 예를 들고 있는데 $(x+2)^2=x^2+4x+4$를 다음 (그림 3)과 같이 표현함으로써 쉽게 이해시켜 줄 수 있었다고 한다.



(그림 3)

(그림 3)의 천평에서 x를 5라고 하자. 오른쪽에는 눈금 5에 5개의 추를 놓고(x^2), 눈금 4에 5개의 추를 놓고(4x), 눈금 1에 4개의 추를 놓는다(4), 왼쪽에는 7의 눈금에 7개의 추를 놓는다($(x+2)^2$), 만약 $(x+2)^2=x^2+4x+4$가 성립한다면 천평은 어느 쪽으로도 기울어지지 않고 평형이 될 것이다. 이 학습활동은 수학적 원리를 여러가지 자료로 표현함으로써 그 원리에서 추상적인 수식의 표현을 유도해 낼수 있다는 가치가 부여된 셈이다. 이것이 Bruner가 예시한 인지경로에 따른 수학과 수업이론의 요지이다.

Bruner는 이 교수장면에 비추어 나무토막을 큰 정사각형으로 짜 맞추는 일은 작동적 표현에 해당되며, 그리고 약간 이색하지만 짜 맞추어진 나무토막을 그려보는 것은 영상적 표현에 해당되고, 마지막으로 기호를 사용하여 $(x+2)^2=x^2+4x+4$ 등으로 적은 것은 상징적 표현에 해당된다고 보았던 것이다.

Bruner의 인지경로 교수이론을 요약해보면, 추상적인 수학학습을 쉽게 이해하기 위해서는 인지발달의 경로에 따라 작동적 →영상적 →상징적 표상에 따르는 단계적인 학습이 바람직하다는 점을 주장하고 있다.

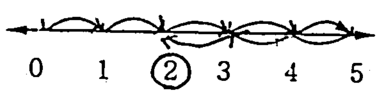
3. 초등수학학습에 EIS이론의 적용

Bruner의 EIS이론에 따르는 초등수학학습지도의 보기를 5 - 3=□의 학습지도에서 알아보기로 한다.

첫째 단계에는 작동적 표상으로 구체물 조작 활동을 하게 한다. 이때 뺄셈 도입의 관점은 대표적인 것으로 '제거형'과 '비교형'이 있다. 제거형은 '쟁반에 사과가 5개 있는데 3개를 먹었다. 몇 개 남았는가?'와 같은 유형의 문제로 정적인 것이 있는데 동적으로 빼어내는 시차를 단리하는 관점이고, 비교형은 '철수는 구슬을 5개, 순이는 구슬을 3개가지고 있다. 누가 몇 개 더 가지고 있는가?'와 같은 유형의 문제로 동시적으로 비교하여 답을 구하는 관점이다. 이 단계에서는 제거형과 비교형의 두 관점에 따라 '이야기 꾸미기'놀이를 통해서 바둑알을 가지고 실제 조작활동을 해보게 하는 것이 뺄셈의 의미를 보다 명확하게 파악하게 할 수 있게 할 것이다. 이때 바둑알은 과일이나 구슬 등 여러 가지 구체물을 대표하는 것이 될 것이다.

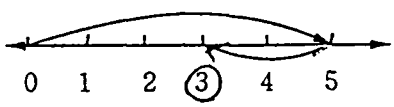
둘째단계는 영상적 표상으로 수직선 뛰기에 의한 뺄셈 학습을 한다.

5 - 3=□



(그림 1)

5 - 3=□



(그림 2)

(그림 1)에서 보는 바와 같이 수직선 뛰기에 의한 뺄셈 학습은 반드시 0에서 출발시키고, 한 칸씩 뛰게 하며 화살표 끝점이 구하는 답이 된다는 사실을 알게 한다.

이와 같은 방법에 따라 5 - 3=□는 0에서 오른쪽으로 5칸 뛰고, 다시 왼쪽으로 3칸 뛰면 화살표의 끝점은 2에 오게 된다. 이때 2가 뺄셈의 답이 된다. 만약 1칸씩 뛰는 것을 강조하지 않으면 (그림 2)와 같이 '0에서 5칸 갔다, 5에서 3칸 왔다, 화살표의 끝점은 3이므로 3이 답이다.'라는 오류를 범할 수 있기 때문이다. 이와 같은 수직선 뛰기에 의한 계산 공부는 앞으로의 음의 정수의 덧셈, 뺄셈 공부와 밀접한 관련이 있기 때문에 확실히 해 둘 필요가 있다.

마지막 셋째 단계는 상징적 표상으로 형식화하여 식으로 나타내는 학습을 한다. 이때 5 - 3=□와 같은 가로 형식의 셈과 $\begin{array}{r} 5 \\ -\,3 \\ \hline \square \end{array}$와 같은 세로 형식의 셈을 병행해서 학습한다. 이 단계에서는 뺄셈의 답이 1, 2, 3, …등이 되는 뺄셈식을 만들어 보게 하는 것도 중요한 공부가 되게 한다. 뺄셈을 정확하고 신속하게 할 수 있는 기능의 숙달 공부도 필요하다.

이상에서 보는 바와 같이 5 - 3=□의 학습 지도를 답만을 요구하는 결과중심의 학습 지도보다는 인지경로에 따른 과정 중심의 학습을 하는 것이 수학교육의 본질이나 목표면에 부합한다고 보겠다.

4. 결 어

수학교육은 논리적인 사고력과 창의력 신장을 요구하는 도야적(disciplinary)목표와 사회의 구성원으로서 필요한 수학적 지식 기능을 습득하여 일상생활 또는 과학 기술 등에 활용할 것을 요구하는 실용적(practical)목표와 수학문화를 수용, 전달, 발전시킬 것을 요구하는 문화적(cultural)목표에 부합하는 교수-학습 지도가 이루어 져야 한다.

이러한 수학 학습 지도를 하기 위해서는 문제해결의 양보다 질을 중시하고 인지발달 수준에 따르는 다양한 해결 방법을 찾아보게 하는 학습 과정 중심의 지도가 이루어 져야 한다.

추상적인 수학학습을 쉽게 이해하기 위해서는 인지발달의 경로에 따라 학습을 해야 한다. 이에 관한 대표적인 이론으로는 Bruner의 인지경로 학습 이론이 크게 공헌하고 있다. 인지경로 학습은 작동(조작)→영상(그림)→상징(기호, 식)의 단계적인 과정 중심의 학습을 말한다.

첫째 단계인 작동적 표상에서는 주로 구체물 조작에 의한 학습을 하고, 둘째 단계인 영상적 표상에서는 구체물 조작에 의해서 습득된 지식을 영상인 그림이나 도식으

로 나타내어 보고, 마지막 단계인 상징적 표상에서는 영상으로 얻은 지식을 문자, 기호, 숫자 등을 사용하여 형식화하고 이를 추상적인 수식으로 표현해보게 하는 것이 인지경로에 따르는 학습이라고 한다.

작동적 표상	→	영상적 표상	→	상징적 표상
↓		↓		↓
활동적 체험적 > 이해	→	시각적 직관적 > 이해	→	개념적 논리적 > 이해

수학적인 개념을 보다 명확히 형성시키기 위해서는 인지경로에 따르는 단계적인 수학학습이 필요하다고 본다.

참 고 문 헌

김 순 택, 현대 수업의 원리. 정민사. 1984

김 인 식 역, (Morris L. Bigge 저). 학습이론과 교육. 교육과학사. 1984

김 학 수, 현대 교수-학습론. 교육과학사. 1984

박 성 택, 수학과 교수-학습 전략. 교문사. 1995

우 정 호, 수학교육학개론. 서울대학교출판부. 1985

이 홍 우, 교육과정. 한국방송통신대학. 1986

Bruner.J.S., The Process of Education, Cambridge, Mass : Harvard University Press, 1960

Bruner.J.S., Studies in cognitive Growth, New York : John Wiley, 1966

Bruner.J.S., Toward a Theory of Instruction, Cambridge, Mass : Harvard University Press, 1966