

비정렬 유한체적법을 이용한 비압축성 유동해석 코드 개발

Development of Incompressible flow solver based on unstructured FVM

°김 종태¹⁾, 김 용모²⁾, 맹 주성²⁾

Jong-Tae Kim, Yong-Mo Kim, Joo-Sung Maeng

An incompressible flow solver based on the unstructured finite volume method has been developed. The flow domain is discretized by triangles in 2D or tetrahedra in 3D. The convective and viscous fluxes are obtained using edge connectivities of the unstructured meshes. The pressure-velocity coupling is handled by the artificial compressibility algorithm due to its computational efficiency associated with the hyperbolic nature of the resulting equations. Laminar test flow problems are computed and presented with a comparison against other numerical solutions or experimental results.

1. 서론

비정렬 격자 기법은 주로 압축성 유동 해석에 많이 사용되어 왔으며 항공기 주위의 유동 해석에 많은 성과를 가져왔다. 유한요소법을 이용한 비압축성의 유동 해석 기법은 오래전부터 많이 연구되어 왔으나 비정렬의 유한체적법으로 유동을 해석하려는 연구는 최근의 일이다. 유한체적법은 특히 보존법칙을 잘 만족시키며 여러 물리적 모델들을 쉽게 적용시킬 수 있고 컴퓨터 메모리 사용에 있어 유한요소법에 비하여 유리하다. 비압축성 Navier-Stokes 방정식에서는 압력항에 대한 독립적인 방정식이 존재하지 않기 때문에 압력장과 속도장을 연결하는 방법이 필요하다. 일반적으로 Poisson 형태의 압력방정식을 이용하는 방법이 많이 사용되어지고 있고, 인공압축성을 이용한 방법도 알고리즘이 단순하기 때문에 많이 연구되어지고 있다. 저자들[1]은 비정렬 유한체적법을 이용하여 2 차원 및 3 차원에서 압축성 유동을 해석한 바가 있으며 인공압축성 알고리즘을 이용하는 경우 방정식의 쌍곡선형 특성때문에 압축성 유동 해석에 적용된 비정렬 수치 기법을 바로 비압축성 유동 해석에 적용할 수 있다. 본 연구에서는 격자점을 중심으로 메디안 셀을 구성하여 수치적분하는 격자점 중심법을 이용하였으며, 대류 플럭스는 인공 점성항을 가미한 중앙차분법으로 계산하였고, 점성 플럭스는 Barth[2]가 제시한 가중값을 이용하여 대류 플럭스와 마찬가지로 Do-loop를 통해 수치적분 하였다. 시간 적분은 Runge-Kutta 다단계 적분법을 이용하였으며 수렴속도를 증진시키기 위하여 국소시간 전진법(local time stepping)과 잔류오차 평준화 기법(residual smoothing)을 사용하였다.

2. 본론

2.1 지배 방정식

Chorin이 제안한 방법에 따라 비압축성 Navier-Stokes 방정식에서 압력과 속도를 연결하기 위하여 연속방정식에 압력의 비정상 항을 도입한다.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

여기서 β 는 인공압축성의 매개변수로 Rizzi와 Eriksson[3]은 β 식을 다음과 같이 속도 크기의 함수로 표현하였다.

$$\beta = \max(C_1, C_2 \cdot (u^2 + v^2 + w^2)), \quad C_1 = 0.25, C_2 = 1.0 \quad (2)$$

해가 정상상태에 도달하면 식 (1)은 원래의 연속방정식 형태가 된다. 식 (1)을 운동량 방정식과 연결하면 다음과 같은 조합된 지배방정식을 얻게된다.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} Q dV + \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}_v \cdot \hat{n} dS \quad (3)$$

1) 한양대학교 대학원 (133-791, 서울시 성동구 행당동, Tel. 02-290-0428)

2) 한양대학교 기계공학과 (133-791, 서울시 성동구 행당동, Tel. 02-290-0428)

$$Q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \beta(ui + vj + wk) \\ u(ui + vj + wk) + p\hat{i} \\ v(ui + vj + wk) + p\hat{j} \\ w(ui + vj + wk) + p\hat{k} \end{bmatrix} \quad \vec{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}\hat{i} + \tau_{xy}\hat{j} + \tau_{xz}\hat{k} \\ \tau_{xy}\hat{i} + \tau_{yy}\hat{j} + \tau_{yz}\hat{k} \\ \tau_{xz}\hat{i} + \tau_{yz}\hat{j} + \tau_{zz}\hat{k} \end{bmatrix}$$

식 (3)과 같은 형태의 Navier-Stokes 방정식은 쌍곡선형 방정식 특성을 갖게되어 발달된 압축성 유동 해석 알고리즘을 이용할 수 있다. 이것은 특히 수렴해를 구하는데 있어 인공압축성 알고리즘의 큰 장점이라 할 수 있다. 수렴해를 얻기위해 차분된 식은 시간전진법과 같은 개념으로 반복계산된다. 시간변수는 물리적 의미보다 단지 가상적인 시간 혹은 반복계산의 매개변수로 생각할 수 있다.

2.2 유한체적법

유한체적법에서는 해석 영역을 셀(cell)이라고 부르는 작은 영역($\Omega = \cup C_o$)으로 나누고, 각각의 셀에 대하여 질량, 운동량의 보존법칙을 적용한다. 적분형 지배방정식 (3)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d}{dt}(Q_o V_o) + \int \int_{\partial C_o} \vec{F} \hat{n} dS = \int \int_{\partial C_o} \vec{F}_v \hat{n} dS \quad (4)$$

수치해석 영역을 2 차원에서는 삼각형으로 그리고 3 차원에서는 4면체로 분할하고 각 격자점을 중심으로 삼각형(사면체) 도심과 모서리의 중점을 차례로 이어서 매디안 셀을 구성한다.

2.3 중앙차분법

중앙차분법은 유동 특성에 따라 해의 안정성을 위하여 인공 점성항을 첨가하여야 한다는 단점은 있으나 계산시간이 적게들어 매우 효율적으로 해를 구할 수 있다. 중앙차분법은 유동방향이나 특성파의 방향을 전혀 고려하지않고 셀 경계면의 좌우의 값을 이용하여 평균공식을 적용한다. 식 (4)의 대류 플럭스를 중앙차분법으로 나타내면

$$\Phi = \frac{1}{2} [\vec{F}_i + \vec{F}_o] (\hat{n}S)_\alpha \quad (5)$$

이다. 중앙차분법은 단순하여 수치계산에서 흐름차분법에 비하여 매우 효율적이고 공간적으로 2 차의 정확도를 갖는다. 우수와 기수의 격자점이 분리되어 발생하는 해의 진동을 막기위하여 인위적으로 점성항을 추가할 필요가 있다. 중앙차분법으로 구한 대류 플럭스 Φ 에 인공점성항 D 를 첨가한 수치 플럭스를 $\tilde{\Phi} = \Phi - D$ 라고 하면 흐름차분법과 일치하는 형태가 된다. 일반적인 인공점성항의 형태는 다음과 같다.

$$D_\alpha = d_4 |\lambda_i| (\nabla^2 Q_i - \nabla^2 Q_o) S_\alpha \quad (6)$$

d_4 는 입력 상수로 10^{-3} 정도의 크기를 갖는다. 스케일링 속도(scaling velocity) $|\lambda_i|$ 는 인공점성항의 크기를 국소 유동특성에 따라 자동적으로 조절하며, 4 차의 Q 값을 플럭스 차원을 갖게한다. i 모서리에 대한 스케일링 속도를 다음과 같이 계산한다.

$$|\lambda_i| = \frac{1}{2} \lambda_1 \left[1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^\alpha \right] \quad (7)$$

$$\lambda_1 = |\vec{U}_1| + c, \quad \lambda_2 = |\vec{U}_2| + c$$

c 는 가상적인 음속 $\sqrt{|\vec{U}_1|^2 + \beta^2}$ 을 나타내며, \vec{U}_1 는 셀 경계면에 수직한 속도 성분이고 \vec{U}_2 는 접선 속도 성분이다.

$$\vec{U}_1 = (\vec{U} \cdot \hat{n}) \hat{n}, \quad \vec{U}_2 = \vec{U} - \vec{U}_1 \quad (8)$$

스케일링 속도 계산에 쓰여진 값들은 모서리를 형성하는 두 격자점에서의 값을 평균해서 얻는다. 비점성 유동 해석시에는 α 를 0으로 두고 벽면에 당겨진 격자를 사용하는 점성유동 해석의 경우

$\alpha = 0.5$ 이다. 라플라스 Q는 Holmes와 Connell[4]이 사용한 모사 라플라스를 이용함으로써 벽면에 당겨진 격자에서도 효과적으로 4 차의 인공 점성함을 구할 수 있다.

2.4 점성 플럭스 계산

3 차원 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 x 운동량 방정식에서 점성플럭스를 Barth[2]의 가중치로 표현하면

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \quad (9) \\ &= \sum_{i=1}^{N_i} \mu \left[2(m_{11})_i (u_i - u_o) + (m_{22})_i (u_i - u_o) + (m_{12})_i (v_i - v_o) + \right. \\ & \quad \left. (m_{33})_i (u_i - u_o) + (m_{13})_i (w_i - w_o) \right] \end{aligned}$$

이 된다. 그러나 비압축성에서는 발산정리를 적용하면 점성 플럭스를 라플라스 형태로 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) d\Omega = \int_{\Omega_i} \nabla^2 u d\Omega = \sum_{i=1}^{N_i} (m_{11} + m_{22} + m_{33})_i (u_i - u_o) \quad (10)$$

$(m_{11} + m_{22} + m_{33})_i$ 는 i번째 모서리에 해당되는 라플라스 가중치이다. 각 모서리에 대해 하나의 라플라스 가중치를 미리 계산하여 두고, 식 (10)을 이용하여 모서리 Do-loop 통해 더해갈 수 있다.

2.5 시간 적분

공간에 대하여 이산화된 점성, 비점성 플럭스를 더하여 잔류오차 R_o 로 표현하면 다음과 같은 상미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} (Q_o V_o) + R_o = 0 \quad (11)$$

식 (11)을 현시적으로 시간 적분을 하기 위하여 4 단계의 Runge-Kutta 시간 적분법을 사용하였다. 이 방법은 선형의 방정식에 대해서는 4 차의 정확도를 가지며 비선형의 문제에 대해서는 2 차의 시간 정확도를 가진다. 수렴속도를 향상시키기 위해서 각 셀에서 특성값의 크기에 따라 다른 시간간격을 이용하는 국소 시간간격 기법과 잔류오차를 암시적으로 평준화시킴으로써 시간적분 간격을 증가시킬 수 있는 잔류오차 평준화 기법을 사용하였다.

2.6 내부유동의 입출구 경계조건

비압축성의 터트 유동은 입구에서 속도를 일정하게 두고 출구에서는 질량유량의 보존 법칙을 이용하여 출구에서 계산한 속도를 보정해주는 방법을 사용하였다.

$$\iint_{\partial \Omega_{in}} \rho \vec{V} \hat{n} dS = \dot{m}_{in}, \quad \iint_{\partial \Omega_{out}} \rho \vec{V} \hat{n} dS = \dot{m}_{out} \quad (12)$$

보정 계수 $\alpha = \dot{m}_{in} / \dot{m}_{out}$ 를 정의하면 출구의 속도를 다음과 같이 수정할 수 있다.

$$\vec{V}_{bc} = \vec{V}_c + (\alpha - 1) (\vec{V}_c \cdot \hat{n}) \cdot \hat{n} \quad (13)$$

3. 해석 결과 및 고찰

3.1 Lid-driven cavity 유동

2 차원 공동 유동을 해석하기 위하여 공동 내에 정렬격자를 생성한 뒤 각각의 사각형을 2 개의 삼각형으로 나누어 비정렬격자를 구성하였다. Fig. 1은 81×81 의 격자에서 레이놀즈 수가 10000인 때의 등압력선도와 속도 및 유선을 보여주는 것으로 하류의 아래 구석에서 가장 작은 세 번째의 와(vortex)가 형성되었음을 볼 수 있다. 51×51 개의 격자에서는 이 세 번째의 와를 볼 수 없었다. 세 가지(31×31 , 51×51 , 81×81)의 격자를 사용하여 해의 정확도를 비교하였다. $x = 0.5$ 를 지나는

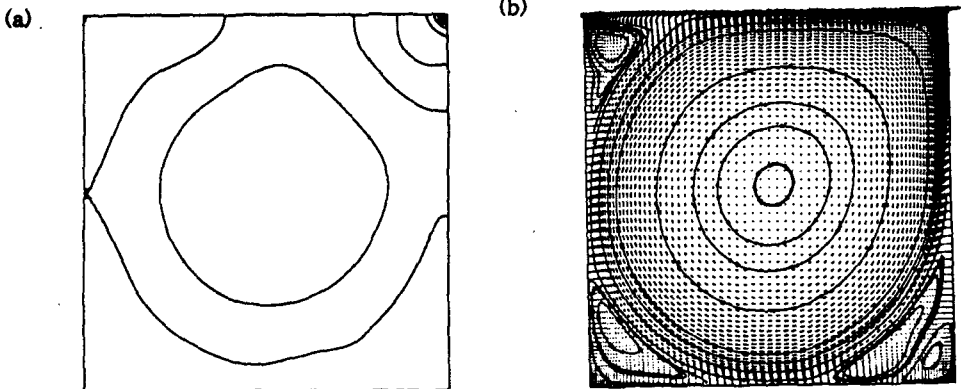


Fig. 1 Driven cavity flow $Re=10000$, (a)pressure contours (b)velocity vectors with streamlines

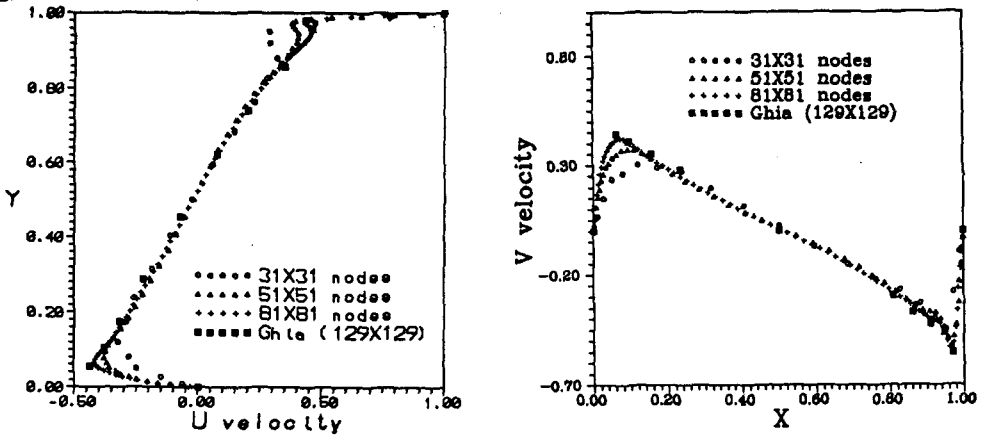


Fig. 2 Comparison of velocity profiles for cavity flow, $Re=10000$

중심선에서 u 속도와 $y = 0.5$ 인 선에서 v 속도를 Ghia 등[5]이 와도-유선함수 알고리즘을 이용하여 129×129 격자에서 구한 결과와 비교하였으며 81×81 격자를 사용한 경우 Ghia 등의 결과와 일치하는 속도 분포를 얻을 수 있었다. 31×31 개의 격자에서는 1000 번의 반복계산으로 수렴해를 얻을 수 있었으나 81×81 개의 격자에서는 수렴해를 얻는데 10000 번의 반복계산이 필요하였다.

3 차원의 lid-driven 공동 유동의 개략도를 Fig. 3에 나타내었다. 가로, 세로, 높이의 비가 1:1:1 인 정육면체의 공동에서 위쪽 평판이 U_b 의 속도로 움직인다. $z=0$ 단면에 대하여 대칭인 유동 특성을 고려하여 정육면체의 반을 해석영역으로 사용하였으며, 속도 U_b 와 폭 B 를 기준으로 한 레이놀즈

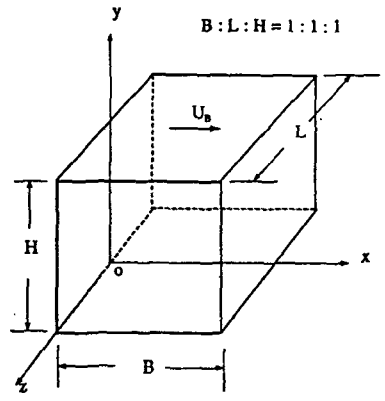


Fig. 3 Geometry of cubic cavity

수가 1000과 3200에 대하여 수치해석을 하였다. 대칭면에서는 미끄럼 조건식을 사용하였고 그 외의 벽면은 점착조건식을 사용하였다. 레이놀즈 수가 1000인 경우 x, y, z 방향으로 각각 $31 \times 31 \times 22$ 의 격자를 사용하였으며, Fig. 4는 대칭면에서 $x=0.5$ 인 중심선을 따라 u 속도분포를 Cazalbou, Choi 등[6]의 결과와 비교한 것으로 일치하는 것을 볼 수 있다. Fig. 5는 대칭면에서의 속도 벡터를 보여 주는 것으로 상류의 아래에서 위쪽으로 올라가는 유동은 2 차원 해석과는 달리 거의 곧바르다. Fig. 6은 레이놀즈 수가 1000인 3차원 공동 유동의 반복회수에 따른 압력의 잔류 오차를 보여준다. Fig. 7은 레이놀즈수가 3200인 경우 대칭면에서 중심선을 따라 속도 분포를 Prasad, Koseff[7]의 실험치와 비교한 것이다. $31 \times 31 \times 22$ 의 격자를 사용한 경우 v 속도 분포는 하류쪽으로 가면서 큰 오차를 보이고 있다. $41 \times 41 \times 22$ 의 격자를 사용했을 때는 실험치에 근접하였으나 여전히 약간의 오차를 보이고 있다. Fig. 8은 $x/B=0.64$ 인 단면에서 면에 접하는 속도성분

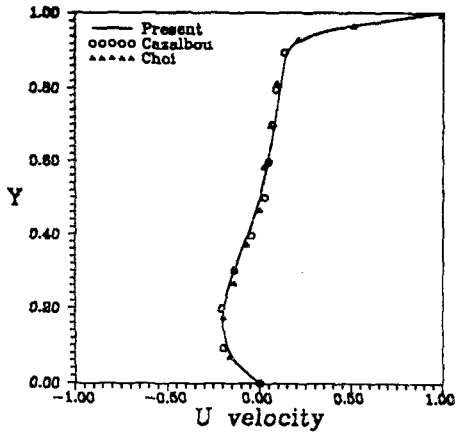


Fig. 4 U-velocity distribution at center line, $Re=1000$, (31X31X22 nodes)

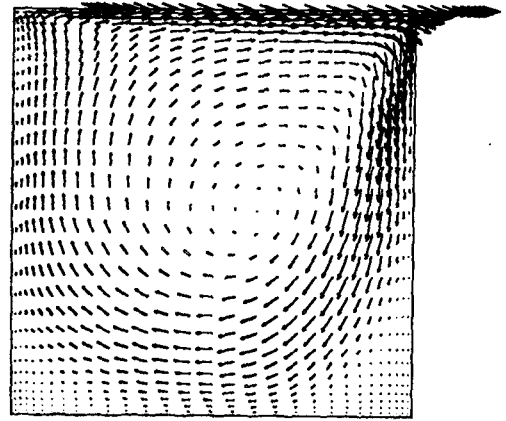


Fig. 5 Velocity vectors in a symmetric plane, $Re=1000$

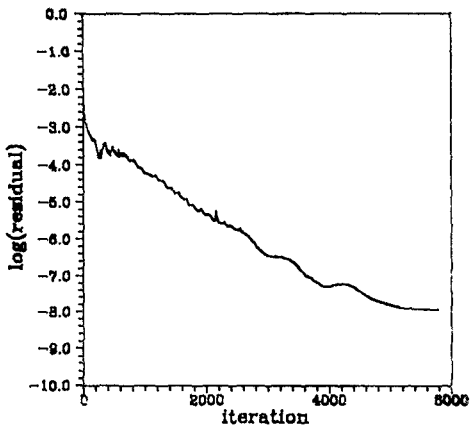


Fig. 6 Convergence history by pressure residual, $Re=1000$, (31X31X22 nodes)

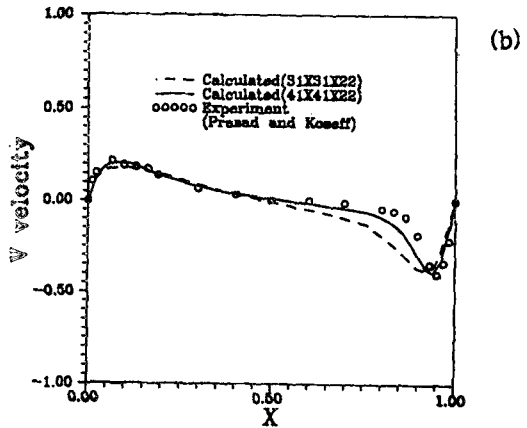
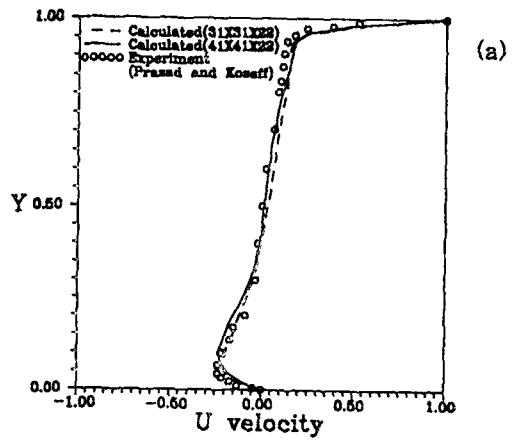


Fig. 7 Comparison of velocity profiles for 3D cavity flow, $Re=3200$, (a)u-velocity components, (b)v-velocity components

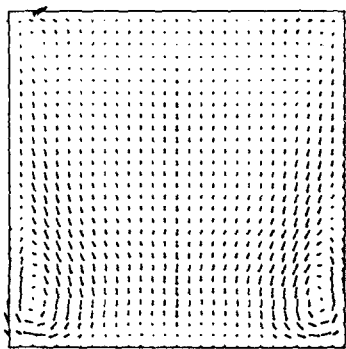


Fig. 8 Velocity vectors in a crossflow plane, $Re=3200$

을 그린 것이다. 양 끝벽에서 생성된 구석 와동은 볼 수 있으나 TGL(Taylor-Gortler-Like) 와동은 보이지 않는다. 이것은 TGL 와동 자체가 시간에 따라 위치가 변하는 불안정한 특성을 갖고 있는데 기인하는 것으로 본 연구에서 사용한 알고리즘이 비정상 와동을 해석하지 못하는데 원인이 있다.

3.2 경사각 단면의 90° 곡관 유동

3 차원의 90° 곡관 유동은 Humphrey등[8]이 실험적으로 연구를 한 것으로 수치 결과와 비교를 위해 많이 선택하는 유동 문제이다. 덕트의 수력직경과 입구의 평균 유속을 기준으로 무차원화하였으며 이 유동의 레이놀즈 수는 790이다. 곡관부의 안쪽을 내벽, 반대쪽을 외벽이라 하고 그 외에 측벽이 2 개 있으며 곡률 중심축에서 상하로 대칭이다. 유체는 곡관부를 돌아가면서 주유동 속도에 의하여 발생하는 원심력을 받게되고 외벽의 압력을 내벽보다 상대적으로 높게 만든다. 측벽에서는 점성에 의하여 주유동 속도가 관 중심 속도보다 낮고 이것은 작은 원심력을 발생시킨다. 외벽에서의 높은 압력은 측벽에서의 작은 원심력과 평형을 이루지 못하여 측벽 근처의 유체를 내벽쪽으로 흐르게하고 이것은 대칭면을 따라 다시 흐르는 2 차 유동을 만든다. 2 차 유동은 대칭면을 중심으로 서로 반대로 돌면서 유체 혼합과 열전달 계수를 높이는 긍정적인 역할을 하면서 마찰손실을 증대시키는 부정적인 역할도 한다.

유동의 대칭 특성을 고려하여 대칭면의 상반부에 31×21×15의 격자(Fig. 9)를 생성하여 해석하였다. 곡관부의 전후로 길이 2의 직관을 연결하였고 입구에서는 완전발달된 층류속도 분포 식을 이용하여 주었고 출구에서는 유량조건을 주었다. 중앙차분법의 대류플럭스를 사용하여 수렴해탈 얻는데 10000 번정도의 반복계산이 필요하였으며, Fig. 10은 반복회수에 따른 압력의 잔류 오차를 보여준다. Fig. 11은 3 개의 x-y 평면에서 속도분포를 보여주고 있다. 측벽 부근($z/D_h = 0.45$)에서는 낮은 운동량을 가진 유체가 외벽의 압력에 의해 내벽쪽으로 밀리는 것을 볼 수 있다. Fig. 11a에서 볼 수 있듯이 대칭면($z/D_h = 0$)에서는 측벽 부근에서 내벽쪽으로 밀려온 유체가 재순환하여 외벽쪽으로 흐르고 있다. Fig. 12는 곡관부의 2 차 유동을 보여주는 것으로 30° 단면에서는 D 모양의 엇회전하는 와동이 형성되어 있으며, 60°에서는 와중심이 내벽쪽으로 치우쳐 1 쌍의 I 모양의 와는 완두콩 모양으로 변해 있다. 90° 단면에서는 이것이 2 쌍의 와로 깨어져 유체혼합과 열전달을 더욱 향상시킬 것이다. Fig. 13는 곡관부분, θ 가 0°, 30°, 60°, 90°에서 유선방향의 속도성분을 Humphrey등의 실험치와 비교한 것이다. $z = 0.25$ 와 $z = 0.5$ 인 단면에서 수치 결과가 실험치와 비슷함을 볼 수 있다.

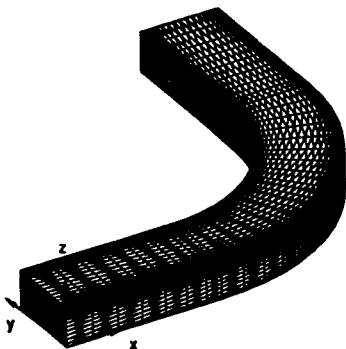


Fig. 9 Unstructured grid(31×21×15 nodes) for computation of flow through a square duct with 90° bend

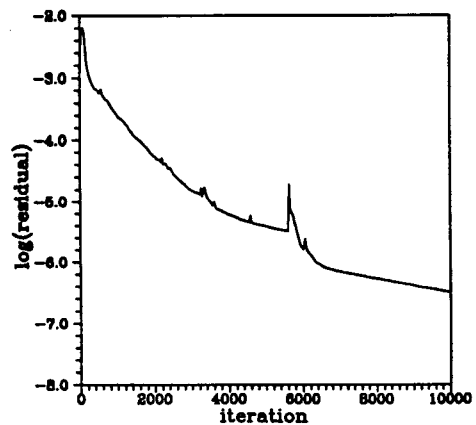


Fig. 10 Convergence history by pressure residual, $Re=790$, (31×21×15 nodes)

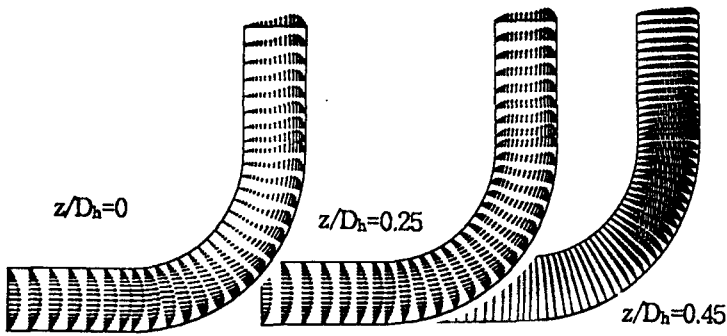


Fig. 11 Primary flow patterns inside 90° bend $z/D_h=0$, $z/D_h=0.25$, $z/D_h=0.45$

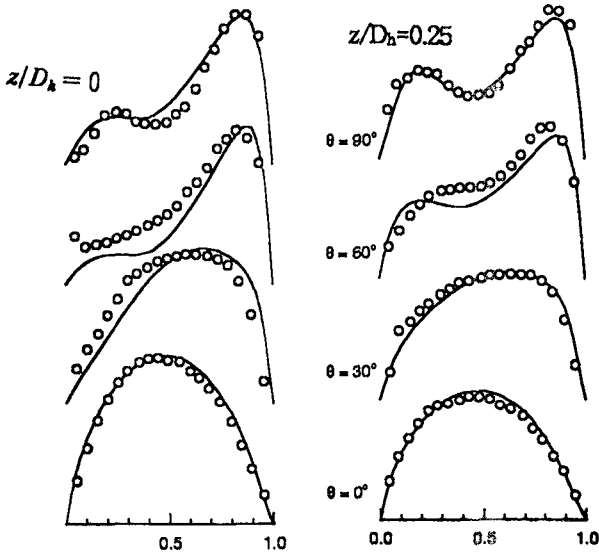


Fig. 13 Streamwise-velocity profiles at the streamwise stations given by $\theta=0^\circ$, $\theta=30^\circ$, $\theta=60^\circ$, $\theta=90^\circ$, solid line= $31 \times 21 \times 15$, o=experiment(Ref. 8)

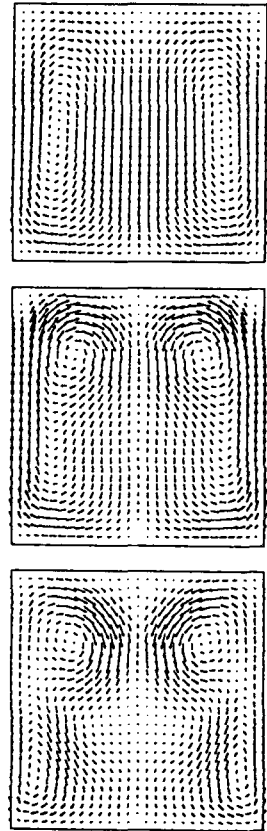


Fig. 12 Cross-sectional velocities for the curved square duct at $\theta=30^\circ$, $\theta=60^\circ$, $\theta=90^\circ$

4. 결론

Chorin의 인공압축성 알고리즘은 비정렬 유한체적법에 쉽게 적용할 수 있었으며 격자점을 중심으로 메디안 셀을 만들고 모서리 Do-loop 통해 점성 및 비점성 플럭스를 계산함으로써 해석 코드를 3 차원으로 확장하는 것이 용이하였다. 3 차원의 lid-driven 공동유동에서 평균적인 유동 특성은 파악할 수 있었으나, TGL 와동과 같은 비정상상태의 유동구조는 얻지 못하였다. 90° 곡관 유동 해석을 통하여 이 수치 기법이 곡관에서 발생하는 2 차 유동을 파악하는데 적절함을 알 수 있었다.

참고 문헌

- [1] 김 종태, 김 용모, 맹 주성, 오세진, 한국항공우주학회지, 23-4 (1995), pp. 32-39
- [2] Barth, T. J., AGARD Report R-787 Ch. 6 (1992), pp. 1-60
- [3] Rizzi, A. and Eriksson, L. E., Journal of Comp. Physics, Vol. 153 (1985), pp. 275-312
- [4] Holmes, D. G. and Connell, S. D., AIAA Paper 89-1932-CP, (1989)
- [5] Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. T., J. of Comp. Physics, Vol. 48 (1982), pp. 387-411
- [6] Choi, S. K., Nam, H. Y., Lee, Y. B. and Cho, M., Numerical Heat Transfer, B-23 (1993), pp.387-400
- [7] Prasad, A. K. and Koseff, J. R., Phys. Fluids, 1-2 (1988), pp. 208-218
- [8] Humphrey, J. A. C., Taylor, A. M. K. and Whitelaw, J. H., J. of Fluid Mechanics, 83-3 (1977), pp. 509-527