

압력장에 기초한 수치해석 방법을 이용한 압축성 유동장의 수치해석

Calculations of Compressible Flows Using a Pressure Based Method

임 흥식^o, 사 종엽*, 강 동진*

H. S. Lim, J.Y. Sah, D. J. Kang

A previously developed pressure based calculation procedure for incompressible flows was modified and applied to transonic and supersonic flows. It uses pressure as a primary variable in preference to density and body fitted coordinate and non-staggered grid system. The discretized momentum equations were rearranged as a system of equations with respect to covariant velocity components. Three different discretization schemes, QUICK, hybrid and first order upwind, were used to approximate the convective terms and compared. Present approach was tested for two transonic flow and one supersonic flow problems. Comparison with previous results show that present approach can be used as a solver for compressible flows.

1. 서 론

컴퓨터의 발전과 다양한 수치해석 기법의 개발로 전산 유체역학의 응용영역이 폭발적으로 늘어감에 따라, 하나의 컴퓨터 프로그램으로 여러 유동 영역의 문제를 해결하기 위한 연구가 활발히 진행되고 있다. 이의 대표적인 예가 아음속(subsonic)에서 초음속(supersonic)영역에 이르는 광범위한 유동 영역을 하나의 컴퓨터 코드로 해석하기 위한 시도들이다. 이러한 부류의 연구는 다음과 같이 크게 두 가지로 나눌 수가 있다. 하나는 기존의 압축성 수치해법에 약간의 수치적 처리를 가미하여 그 계산영역을 아음속까지 넓히는 연구이다. 이의 대표적인 예는 소위 가압축성 방법(pseudo-compressibility method)과 선조절 방법(preconditioning method)이다. 전자는 연속방정식에 압력의 시간 도함수(time derivative)를 포함시켜 수치해석하는 방법으로 비정상 유동해석에는 단점이 많은 방법이다. 후자는 차분방정식으로 부터 구하는 계수행렬 조건수(condition number)를 조작하여 아음속 유동에서도 안정된 수치해를 얻고자 하는 방법이다. 이때 조작된 치배방정식은 수렴하면 원래의 치배방정식과 동일하도록 만든다. 이 방법도 문제에 따라 조작에 사용되는 변수값을 적절히 변화시켜야 하며, Mach 수가 작아짐에 수렴성이 급격히 저하되어 때때로 발산하는 문제점이 있다.

나머지 하나는 비압축성 수치해석방법에 약간의 수치적 처리를 가미하여 그 계산영역을 초음속까지 확장하는 연구로, 이 방법은 전자의 압축성 수치해법을 확장하는 방법에 비해 다음과 같은 장점을 지니고 있다. 비압축성 유동이 되면 밀도의 변화는 무시할 수 있으므로 밀도에 기초한 압축성 수치해법들은 대체로 마하수가 작아짐에 따라 수정한 수치해법들도 불안정한 거동을 보인다. 이에 비해 비압축성 해법들은 압력에 기초하고 있고 압력의 변화는 유속의 크기에 관계없이 유한하므로 수치적으로 훨씬 안정된 거동을 기대할 수 있다. 이와 같은 장점을 지난 비압축성 수치해법의 압축성 유동장 해석으로의 확장은 Karki⁽¹⁾에 의해 처음으로 시도되었다.

저자는 선행연구⁽²⁾에서 Karki⁽¹⁾와 Hobson 등⁽⁴⁾의 수치해석방법을 조합하고 대표적인 고차 상류차분법인 QUICK[5]법을 사용하여 다양한 이차원 및 삼차원 유동장 해석을 통해 비압축성 수치해법의 우수성을 확인한 바 있다. 저자가 제시한 비압축성 수치해석 방법은 압력방정식을 직접 유도하여 해석하며, 제어체적 표면속도(control volume facial velocity)를 조작하지 않는다는 점에서 Karki⁽¹⁾의 방법과 구별되며, 공변 속도성분(covariant velocity component)을 종속변수로 사용하는 점에서 Hobson 등⁽⁴⁾의 방법과 구별된다. 본 연구에서는 이와 같은 비압축성 수치해법을 확장하여 압축성 유동장 해석에 적용하여 보고자 한다. 또한, 비압축성 유동장 해석을 위해 개발된 고차 상류차분법인 QUICK의 거동도

* 영남대학교 기계공학과 대학원

• 영남대학교 기계공학과

살펴보고자 한다.

2. 지배 방정식

2 차원 Navier-Stokes 방정식을 일반 비직교 표면좌표계에서 표현하면 다음과 같다.⁽²⁴⁾

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} (J\rho U u_i + JP \frac{\partial \xi}{\partial x_i}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J\rho V u_i + JP \frac{\partial \eta}{\partial x_i}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} (J\Gamma G^{11} \frac{\partial u_i}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (J\Gamma G^{12} \frac{\partial u_i}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J\Gamma G^{21} \frac{\partial u_i}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J\Gamma G^{22} \frac{\partial u_i}{\partial \eta}) \\ &+ JS(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 Γ 는 유체의 동점성계수 ν 를 가르키며, (ξ, η) 는 일반 비직교 좌표계의 축이며 나머지 좌표변환 함수들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} J &= x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta, \quad G^y = (\xi')_x (\xi')_x + (\xi')_y (\xi')_y \\ \xi_x &= \frac{y_\eta}{J}, \quad \xi_y = \frac{-x_\eta}{J}, \quad \eta_x = \frac{-y_\xi}{J}, \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{J} \end{aligned} \quad (2)$$

또한 U 와 V 는 $(y_\eta u - x_\eta v)/J$ 와 $(-y_\xi u + x_\xi v)/J$ 로 정의되는 반변 속도성분(contravariant velocity component)이다.

연속 방정식은 일반 비직교 표면좌표계에서 다음의 식(3)과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (J\rho U) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J\rho V) = 0 \quad (3)$$

단열과정을 가정하면 에너지 방정식은 식 (4)와 같이 간략하게 표현할 수 있고, 유체를 이상기체로 가정하면 상태방정식은 다음의 식 (5)와 같다.

$$\bar{H} = C_p T + \frac{u^2}{2} \quad (4)$$

$$P = \rho R T \quad (5)$$

3. 수치해석 과정

본 연구에서 사용한 비압축성 수치해법에 대한 자세한 내용은 참고문헌 [2-3]에 정리되어 있으며, 여기서는 압축성 유동해석을 위해 첨가된 과정 만을 간략하게 정리하면 다음과 같다.

- 1) 비압축성 수치해법에 따라 운동량 방정식과 연속방정식을 차례로 풀어서 속도와 압력을 구한다. 이 때 식 (1)로 부터 구한 대수 방정식을 공변 속도성분에 대한 대수방정식으로 변환하여 속도를 구한다.
- 2) 과정 1)에서 구한 속도와 압력을 식 (4)와 (5)에 대입하여 온도와 밀도를 차례로 구한다.
- 3) 과정 1)과 2)에서 구한 속도, 압력, 온도, 밀도가 수렴할 때 까지 과정 1)-2)를 반복적으로 해석한다. 여기서 수렴판정은 연속적인 두 반복계산 간의 차이가 10^{-4} 보다 작을 때를 기준으로 하였다.

4. 결과 및 토의

본 연구에서 제안한 수치해석 방법을 다음과 같은 두가지 천음속 유동과 한가지의 초음속 유동에 적용하여 선형 수치해석과 비교하여 보았다.

NACA0012 의형주위의 천음속 유동

첫 번째 예제로는 받음각(angle of attack)이 0° 이고 자유유동(free stream)의 Mach 수와 레이놀즈 수가 각각 0.9 와 5000 인 천음속 유동을 고려하였다. 이 유동은 Baruzzi 등⁽⁶⁾이 그들의 저차 및 고차 유한요소 해석 프로그램을 검증하는데 사용한 유동으로, 대류항을 저차 및 고차로 근사함에 따른 수치해석 문제에 정리되어 있다. 또한 Hollanders 등⁽⁷⁾, Hafez⁽⁸⁾등 여러 연구자가 다룬 유동으로, 새로운 수치해석 방법이나 프로그램을 검증하는데 자주 이용되고 있다.

본 계산에 사용된 격자는 Fig.1-(a)에 도시되어 있는 바와 같이 C-형 격자이고, 격자수로는 201×61 과 101×31 의 두 격자계를 고려하였다. 참고로 Baruzzi 등⁽⁶⁾은 200×48 개의 사각형 유한요소를 사용하였다. 최고 외곽 경계면은 의형표면으로 부터 의현(chord)의 약 15 배 위치에 두었다. 상류경계면에서 자유유동을 가정하여 경계조건을 대입하였고, 하류에서는 Newmann 경계조건을 사용하였다.

Fig.1-(b)는 의형표면에서의 압력계수 C_p 를 선행 연구결과와 비교하여 도시한 그림이다. 그림을 살펴보면, 고차상류법인 QUICK 법은 Baruzzi 등⁽⁶⁾의 2 차 해나 Hollanders 등⁽⁷⁾의 해와 거의 완벽한 일치를 보이고 있다. 반면에, 저차 상류차분법인 upwind 법이나 hybrid 법은 Baruzzi 등⁽⁶⁾의 1 차 해에 근접한 거동을 보이고 있다. 또한, 격자수의 증가에 따른 수치해의 거동에서도 Fig.1-(c)에 도시한 바와 같이 QUICK 법이 상대적으로 좋은 수렴거동을 보이고 있다.

두번째 예제는 받음각이 10° 이고 자유유동의 Mach 수와 레이놀즈 수가 각각 0.8 와 500 인 천음속 유동이다. 계산에 사용된 격자는 첫번째 예제와 마찬가지로 C 형이며, 격자수는 101×25 와 201×51 의 두가지이다.

Fig.2-(a)는 101×25 격자수로 얻은 본 수치해를 Hollanders 등⁽⁷⁾의 수치해와 비교한 그림이다. 첫번째 예제에서와 마찬가지로 QUICK 법은 Hollanders 등⁽⁷⁾의 수치해와 거의 일치하지만, upwind 법이나 hybrid 법은 흡입면(suction surface)과 압력면(pressure surface) 모두에서 상당한 차이를 보이고 있다. 또 이러한 차이는 의형의 선단(leading edge)에서 부터 관찰되므로, hybrid 법은 의형선단 부근의 빠른 유동 가속을 제대로 예측하지 못하고 있음을 알 수 있다. 한편, 격자수를 201×51 으로 증가시키면 Fig 2-(b)에서 알 수 있는 바와 같이 의형 선단에서의 빠른 가속은 예측하지만, 압력계수의 피크치 이후의 유동의 급격한 감속은 여전히 제대로 예측하지 못하고 있음을 알 수 있다. 따라서, hybrid 법이나 저차 upwind 법으로 좋은 수치해를 얻기 위해서는 엄청난 격자수가 요구될 것으로 판단된다. Fig.2-(c)와 2-(d)는 의형 후단 부근의 유동을 유선과 속도벡터로 표현한 그림으로, (c)는 QUICK 법의 (d)는 hybrid 법의 수치 해이다. 그림을 살펴보면, hybrid 법은 QUICK 법에 비해 박리유동을 작게 예측하고 있음을 알 수 있다.

Fig.3-(a)와 (b)는 앞에서 살펴본 두 경우에 대한 수렴거동을 도시한 그림으로, (a)는 속도성분의 변화를 (b)는 압력의 변화를 보여주고 있다. 그림을 살펴보면, hybrid 법이 QUICK 법에 비해 다소 빠른 수렴성을 보이고 있으며, QUICK 법도 나쁘지 않은 수렴성을 보이고 있음을 알 수 있다.

NACA0012 의형주위의 초음속 유동

세번째 예제로는 자유유동의 받음각은 10° 이고 Mach 수와 레이놀즈 수는 각각 2.0 이고 106 인 층류 초음속 유동으로. 앞에서 살펴본 두 경우와는 달리 의형의 선단에 강한 충격파가 발생한다. 이 문제의 경우는 QUICK 법 수치해는 예측한 대로 심하게 진동하며 발산하는 거동을 보였다. 사실, 고차 상류차분법은 충격파 부근에서 심하게 진동하며 발산하는 거동을 보이는 것으로 이미 널리 알려져 있으며⁽⁹⁾, 이를 방지 혹은 완화하는 방법으로 인공점성(artificial dissipation)을 첨가하거나 저차 상류 차분법을 국부적으로 사용하는 수치해석 기법을 고려할 수 있다. 이에 대한 연구는 현재 진행 중이며, 여기서는 hybrid 법과 upwind 법 결과만을 선행 연구결과와 비교하였다.

Fig.4-(a)는 흡입면과 압력면을 따른 압력계수를 선행 연구결과와 비교한 그림이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 hybrid 법과 upwind 법은 거의 완전한 일치를 보이며, 선행 연구결과와도 좋은 일치를 보이고 있다. 다만, 의형의 선단부근에서 흡입면을 따른 압력계수는 약간의 차이를 보이는데, 이러한 차이는 앞서 살펴본 예제에서도 관찰된 것으로 hybrid 법이나 upwind 법이 의형 선단부근에서의 유동

의 급격한 가속을 제대로 예측하지 못하기 때문으로 판단된다. Fig.4-(b)와 (c)는 익형 주위의 Mach 수 분포를 도시한 그림으로, (b)는 본 수치해를 (c)는 Drikakis⁽⁹⁾의 수치해를 보여주고 있다. 두 그림이 전체적으로 좋은 일치를 보이고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

저자가 선행 연구에서 제시한 비압축성 수치해법을 수정하여 압축성 유동 즉 천음속 및 초음속 유동에 적용하여 본 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수가 있었다.

전체적으로 본 접근방법은 압축성유동을 성공적으로 해석할 수 있음을 알 수 있었다. 특히 고차 상류차분법의 하나인 QUICK 법은 익형의 선단 부근이나 박리유동 영역에서 hybrid 법이나 upwind 법에 비해 정확한 해를 주었다. 박리유동 영역에서는 저차 차분법인 upwind 나 hybrid 법은 유동의 박리나 재부착등을 제대로 예측하지 못하였다. 또한 QUICK 법은 천음속 유동의 경우 만족스러운 수렴거리를 보였으며, 격자 수렴성도 우수하였다. 다만, 충격파가 발생하는 초음속의 경우는 수렴해를 얻을 수가 없었다. 충격파 부근에서는 고차 상류차분법이 발산하는 현상은 이미 널리 알려져 있으므로 국부적으로 저차 차분법을 사용하는 방안을 현재 연구 중이다.

참고문헌

- [1] Karki,K.C., "A Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Complex Geometries", Ph.D.Thesis, Univ. of Minnesota, Minneapolis, MN, 1986
- [2] 강 동진, 배 상수, "일반 비직교 표면좌표계에서의 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 수치해석", 대한기계학회논문집(B), 제 20 권 제 3 호, pp. 1015-1027(1996)
- [3] 강 동진, 배 상수, "일반 비직교 표면좌표계에서의 비압축성 점성유동의 수치해석: Hybrid 법과 Quick 법의 비교", 대한기계학회논문집(B), 제 20 권 제 5 호
- [4] Hobson, G.V. and Lakishminarayana, B., "Prediction of Cascade Performance Using an Incompressible Navier-Stokes Technique", J. of Turbomachinery, Vol.113 , pp.561-572, 1991
- [5] Hayase, T., Humphrey, A.C. and Greif, R., "A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite Volume Iterative Calculation Procedures", J. of Computational Physics, Vol.98, pp.108-118, 1992
- [6] Brauzzi, G.S., Habashi, W.G. and Guevremont, J.G., "A Second Order Finite Element Method for The Solutions of The Transonic Euler and Navier-Stokes Equations", Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 20, pp.671-693, 1995
- [7] H. Hollanders and W. Ravalason, "Resolution des equations de Navier-Stokes en fluide compressible par methode implicite", La Recherche Aerospatiale, Vol.1, pp.23-46(1986)
- [8] Hafze.Z., "Finite Element Volume Solutions of Full Potential, Euler and Navier-Stokes Equations for Compressible and Incompressible Flows", Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 20, pp.713-742, 1995
- [9] D.Drikakis and S. Tsangaris, "Local Solution Acceleration Method for the Euler and Navier-Stokes Equations", AIAA J. Vol. 30, No. 2, pp.340-348(1992)

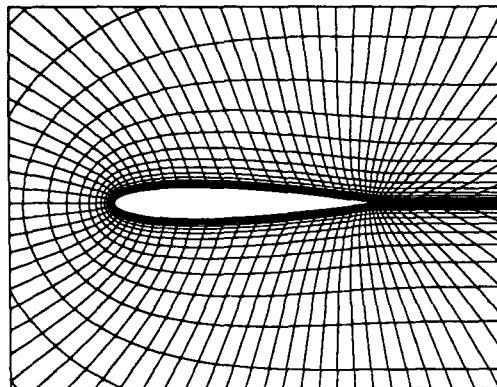


Fig. 1-(a) A schematic diagram of grid system(101x31)

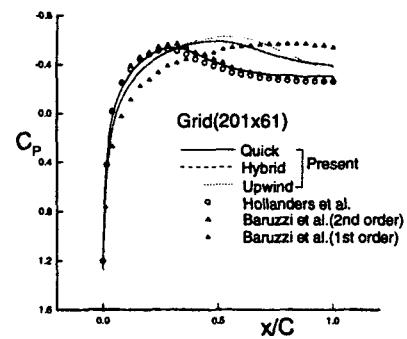


Fig. 1-(b) Comparison of wall pressure coefficient distributions with previous results for $M=0.9$ and $Re =5000$ at $\alpha=0^\circ$

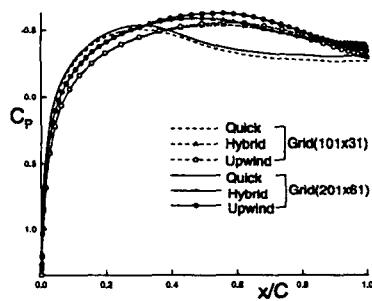


Fig. 1-(c) Grid dependence of present solutions

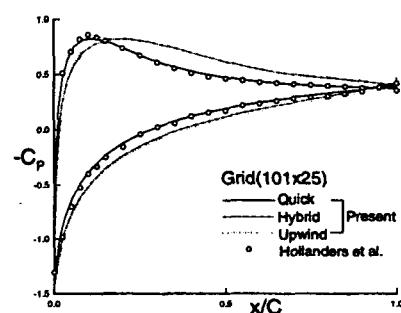


Fig. 2-(a) Comparison of coarser grid wall pressure coefficient distributions with previous results for $M =0.8$ and $Re =500$ at $\alpha=10^\circ$

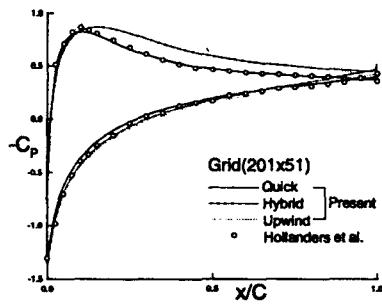


Fig. 2-(b) Comparison of finer grid wall pressure coefficient distributions with previous results for $M =0.8$ and $Re =500$ at $\alpha=10^\circ$

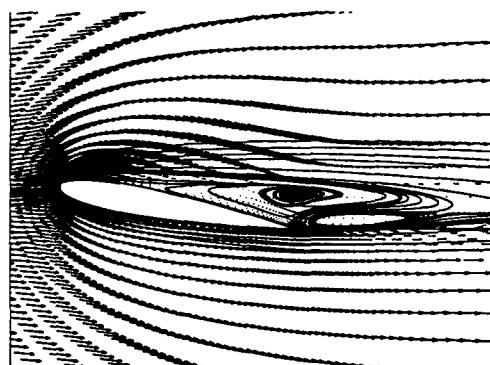


Fig. 2-(c)Velocity vectors and streamlines obtained with QUICK scheme

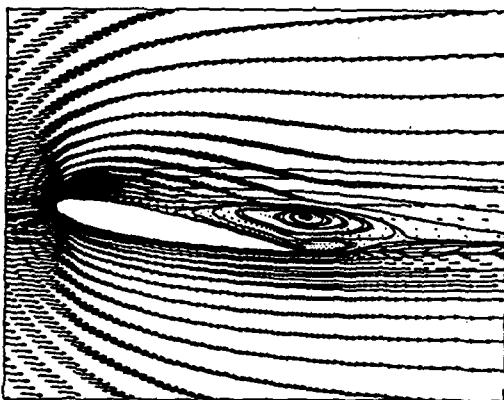


Fig. 2-(d) Velocity vectors and streamlines obtained with hybrid scheme

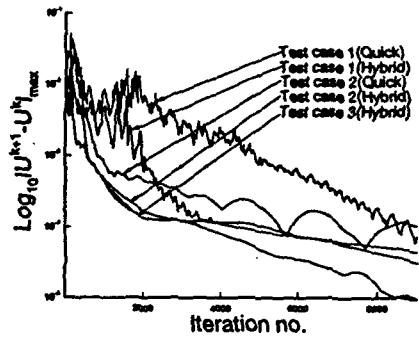


Fig. 3-(a) Comparison of convergence histories in terms of velocity

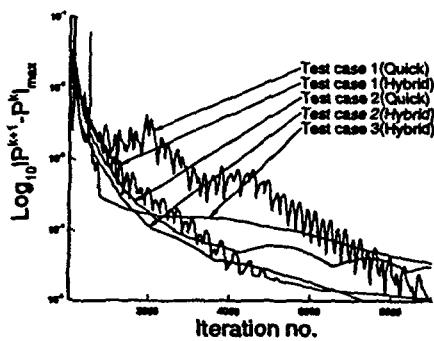


Fig. 3-(b) Comparison of convergence histories in terms of pressure

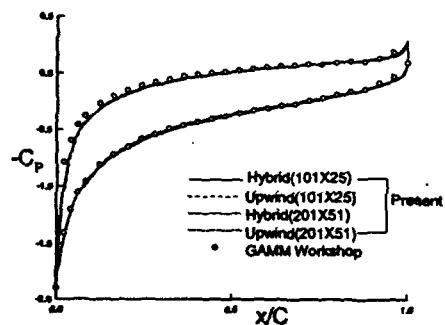


Fig. 4-(a) Comparison of wall pressure coefficient distributions with a previous result for $M = 2.0$ and $Re = 106$ at $\alpha = 10^\circ$

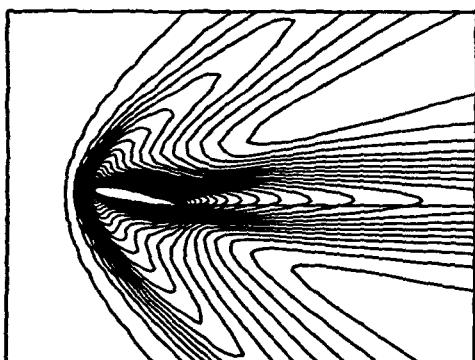


Fig. 4-(b) Present Mach number distribution

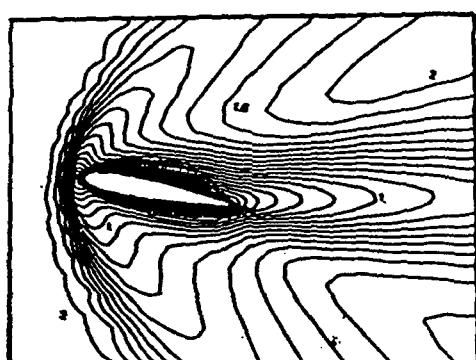


Fig. 4-(c) Mach number distribution calculated by Drikakis et al.