

비선형 스위칭 평면을 가지는 적응가변구조 제어기 설계

박수식* 이대식
대구대학교 제어계측공학과

A study on the Adaptive Variable Structure Controller with Nonlinear Switching Surfaces

Soo-Sik Park* Dae-Sik Lee
Dept. of Control and Instr. Eng., Daegu University

Abstract A number of algorithm using the VSS(Variable Structure System) for uncertain dynamic system are developed. But, in these algorithms, the assumption that the uncertainties are bounded and their bounds are available to the designer is involved. And bounds on the uncertainties are an important clue to guarantee the stability of the closed loop system. However, sometimes bounds on the uncertainties may not be easily obtained because of the complexity of the structure of the uncertainties. Therefore, a methodology by which the boundary values on the uncertainties can be easily obtained is required. The VSS proposed in this proposal employ the new adaptive VSS scheme for uncertain dynamic system being estimated on line. The resulting control law is simple and easy to apply to on line computer control. It can also suppress chattering and maintain good tracking precision even if unmodeled dynamics are considered. And, a new method using nonlinear switching surface is introduced so that the speed response is improved and the good transient response can be obtained. Simulation results are presented and show the advantage of the proposed adaptive VSS with nonlinear switching surfaces.

1 서론

가변 구조 제어 시스템(VSS)은 비선형 제어의 특수한 부류에 속한다. 이 제어 시스템은 플랜트(Plant)를 제어하는 동안 그 구조가 변화하므로 다른 제어 시스템들과는 분명히 다르다. 일반적으로, 제어 시스템의 구조는 정의된 규칙에 의해서 우연히, 또는 고의에 의해 변화하게 된다. 가변 구조 제어는 제어 대상 시스템의 동특성이 설계자에 의해 미리 설정된 스위칭 면(Switching surface)을 추종하도록 불연속적으로 제어 구조를 변화시켜 준다. 가변 구조 제어 이론에 기초하여 개발된 제어 법칙은 개체가 시스템의 평면상에 있는 이미 결정되어 있는 스위칭 면을 교차할 때마다 제어 입력을 변화시킨다. 이 불연속적인 제어 입력으로 인해 시스템의 개체가 스위칭 면을 따라 움직이게 되므로 시스템의 동특성은 미리 설정된 스위칭 면에 의해 규정되며, 이로 인해 시스템은 시스템 변수의 변화나 외란에 대해 강인한 특성을 보인다[1]-[3]. 그러나 스위칭 면위에서 제어 구조의 불연속적인 변화는 제어 입력이 불연속적으로 변화하며, 이로 인하여 발생하는 채터링(Chattering)으로 인해 제어 대상 시스템을 모델링할 때 무시된 고주파수 성분들의 동특성이 여기 될 수 있는 단점이 있다.

Slotine과 Sastary[4]는 가변구조제어 이론을 비선형 시스템까지 확장하였고, 채터링 문제는 경계층(Boundary layer)을 이용하여 해결하였다. 이 결과를 이용하여 외란이 존재하지 않는 2축 로봇 머니플래이터의 추적 문제를 풀었으며, 대역폭 안정성(Global stability)을 만족하였다. 그러나 해석과 시뮬레이션에서 만약 외란이 로봇 머니플래이터의 동역학에 포함되지 않는다면 불확실한 변수 값을 추정하여 보상할 수 있어야 한다는 것을 볼 수 있으며, Slotine 등은 외란이나 로봇 머니플래이터의 불확실한 변수가 존재하면 그 값을 제어 입력에 보상해 주면 된다고 언급하고 있다. 그러나 실제 시스템에서 외란이나 불확실한 변수는 시간이나 상태변수 값에 따라 그 크기가 변화하며 때로는 알 수 없는 경우가 발생할 수도 있다. 전자의 경우에 있어서는 외란이나 불확실 변수의 최대값을 이용하였기 때문에 큰 제어입력에 의해 큰 채터링이 유발되며 후자의 경우는 전체 시스템의 안정도에 심각한 영향을 미칠 수가 있다. Hashimoto[5] 등은 간단한 비선형 보상을 사용하여 가변구조제어의 단점인 채터링 문제를 완화시켰다. Chen[6] 등과 Young[7] 등은 로봇 머니플래이터 동역학의 평균값을 취하여 채터링을 줄였으나 [4]와 유사하게 제어 입력을 평균값과 편차 값의 최대치를 이용하여 설계하였으므로 같은 결과가 발생한다. 또한, 국내에서도 가변구조제어에 관한 연구가 활

발히 진행되고 있다[8]-[10]. 특히 T.H. Park[10] 등은 퍼지(Fuzzy) 이론을 이용하여 비선형 시스템을 추정하였고, 설계값과 측정값과의 오차는 가변구조이론을 이용하여 보상하였다. 그러나 제어입력의 설계는 오차의 최대값을 이용하였으므로 [4]와 같이 채터링이 상대적으로 외란이나 불확실한 값들이 존재하는 경우 불안정해 질 수도 있다.

이와 같은 문제를 해결하기 위하여 Chen과 Papavassilopoulos [11]는 가변구조제어에 적응제어 법칙을 결합시켰으며, 이로 인하여 불확실한 변수와 외란에 대하여 보상할 수 있게 되었다. 결과적으로 채터링을 감소 시켰으며 불확실한 변수가 존재하는 경우에 있어서조차 좋은 추적 성능을 유지할 수가 있음을 볼 수 있었다. 그러나 상대적으로 제어법칙이 복잡하며 많은 계산시간이 요구되므로 실제 시스템에의 응용에 제약이 따른다. Yoo와 Chung[12]는 불확실한 변수와 외란에 대한 최대 경제값을 추정하는 간단한 적응제어 법칙을 제안하였으나 1차함수로 추정하였으므로 고차의 함수로 모델링되는 불확실성이나 외란에 대한 보상은 한계가 있다.

본 논문에서는 가변구조제어에 적응제어 법칙을 결합시켜 외란이나 불확실한 변수 값을 보상하여, On-line으로 제어가 가능하며 적용하기 쉽고, 간단한 알고리즘을 제시한다. 제안된 알고리즘은 외란이나 불확실한 변수 값에 대해서도 추정이 가능하므로 채터링이 감소되며, 강인한(Robust)성능을 유지할 수 있다. 또한, 선형 스위칭 면을 갖는 가변구조제어 시스템은 어떤 시스템의 경우에는 높은 성능을 나타내지 못한다. 따라서 다중 다항식의 형태를 갖는 비선형 스위칭 면을 갖는 비선형 가변 구조 제어 방식을 제안 하였다. 이러한 비선형성은 선형 스위칭 면을 이용한 경우 보다 더 좋은 성능을 얻기 위해 의도적으로 도입하였다.

2 본론

2.1 비선형 시스템

다음과 같은 동특성을 갖는 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t, x))x(t) + f(t, x) + (B + \Delta B(t, x))u(t) + H(t, x)v(t) \quad (1)$$

단, $x(t) \in R^n$ 은 상태 변수이고, $u(t) \in R^m$ 은 제어입력이며, $v(t) \in R^l$ 은 외란이다. $\Delta A(t, x)$, $f(t, x)$ 와 $\Delta B(t, x)$ 는 각각 선형 부분의 불확실성, 시스템의 비선형 부분과 입력 행렬의 불확실성이다.

가정1.

- i) $\Delta A(\cdot, \cdot)$, $f(\cdot, \cdot)$, $\Delta B(\cdot, \cdot)$, $H(\cdot, \cdot)$ 와 $v(\cdot)$ 는 연속이다.
- ii) 매칭조건 : 다음을 만족하는 함수 $D(\cdot, \cdot) : R \times R^n \rightarrow R^{m \times n}$, $E(\cdot, \cdot) : R \times R^n \rightarrow R^m$, $F(\cdot, \cdot) : R \times R^n \rightarrow R^{m \times m}$ 와 $G(\cdot, \cdot) : R \times R^n \rightarrow R^{m \times l}$ 이 존재한다. 즉,

$$\begin{aligned} \Delta A(t, x) &= BD(t, x), \\ f(t, x) &= BE(t, x), \\ \Delta B(t, x) &= BF(t, x), \\ H(t, x) &= BG(t, x), \quad \forall (t, x) \in R \times R^n \end{aligned} \quad (2)$$
- iii) (A, B) 는 자체제어성(Controllability)을 만족한다.

가정 1 에 의해 시스템 (1)은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + e(t, x)) \quad (3)$$

여기서 $e(t, x)$ 는 집중(Lumped) 불확실성이다.

가정2.

연속이고 양의 한정성을 가지는 스칼라 함수 $e(\cdot, \cdot) : R \times R^n \rightarrow R_+$ 가

다음과 같이 존재한다. 즉,

$$\|e(t, x)\| \leq e(t, x), \quad \forall (t, x) \in R \times R^n. \quad (4)$$

2.2 비선형 스위칭 면을 갖는 가변 구조 제어기

적절히 선택된 제어 입력 u 에 대하여 주어진 스위칭 면에서 슬라이딩 모드가 존재한다고 할 때, 슬라이딩 모드에서의 시스템 동특성은 다음의 방정식을 따른다.

$$s(x) = 0 \text{ and } \dot{s}(x) = 0. \quad (5)$$

상태 공간에서의 비선형 스위칭 면을 다음과 같이 두자.

$$s(x) = s_L(x) + s_{NL}(x) \quad (6)$$

단, $s(x) \in R^m$ 이다. 여기서 $s_L(x)$ 항은 $s(x)$ 의 선형 부분이고, 이것은 극 배치 방법이나[13], Eigenstructure assignment 방법[14] 혹은 기하학적 접근 방법[15]을 사용하여 설계할 수 있다. 선형 스위칭 면의 설계 방법은 가변 구조 시스템의 열린 연구 분야 중의 하나이다. 상태 공간에서의 선형 스위칭 면은 다음과 같이 주어진다.

$$s_L(x) = C \cdot x. \quad (7)$$

여기서 $C = [C^T_1, C^T_2, \dots, C^T_n]^T \in R^{m \times n}$ 이고, C_i 는 상수이다. 이 방정식은 Hurwitz 조건을 만족시킨다.

$s_{NL}(x)$ 항은 $s(x)$ 의 비선형 부분이고 이 항은 접근적 안정도를 만족하는 다중 다항식으로 구성되어 있다[8]. 이 항들은 과도상태의 성능을 향상시키기 위해 사용된다. 설계 방법은 다음과 같다.

단계 1: (5)-(7)식으로부터, 슬라이딩 모드에서의 동특성 방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\dot{z}_i = \Phi z_i + \Gamma s_{NL}(x) \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

단, $z_i \in R^p$ 이고, p 는 $(n - m)$ 보다 작거나 같은 양의 정수이며,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_p \end{bmatrix}$$

$h_i = \text{function of } c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nm}, \quad i = 1, 2, \dots, p$

$$\Gamma = [0, 0, \dots, 1]^T$$

단계 2: (8)식은 비선형 함수 $s_{NL}(x)$ 를 갖는 단일 입력 단일 출력 시스템이다. 이것은 상태 벡터 z_i 와 s_{NL} 제어를 갖는 비선형 피드백 시스템으로 생각할 수 있다. 따라서 다음과 같은 다중 다항식 형태를 얻을 수 있다.

$$s_{NL}(x) = \sum_{j=0}^q d_j \prod_{i=1}^m z_i^{j_i} \quad (9)$$

여기서 d_j 는 원하는 상수이고,

$$\sum_{j=0}^q p_j = 3, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

이며, 여기서

$$q = \frac{p(p+1)(p+2)}{6} \text{ 이다.}$$

단계 3: (6), (7), (9)식으로부터, 비선형 스위칭 면의 i 번째 원소는 다음과 같이 생각될 수 있다.

$$s_i(x) = C_i x + \sum_{j=0}^q d_j \prod_{i=1}^m z_i^{j_i} \quad (10)$$

여기서 첫 번째 항은 Hurwitz 기준을 만족하는 선형 시변 함수이다. 그리고 과도상태의 성능을 향상시키기 위한 비선형 부분은 다중 다항식의 형태이며 두 번째 항에 있다. 비선형 스위칭 면은 페루프의 접근적 안정도를 만족시킨다. 그러므로 비선형 스위칭 면을 갖는 가변 구조 제어 시스템은 점근적으로 안정하다.

2.3 적용 가변 구조 제어기 구성

상태 궤환 제어를 다음과 같이 두자.

$$u = u_{nom} + u_i + u_N \quad (11)$$

단, u_{nom} 은 불확실성 $e(t, x)$ 가 영이라는 가정에 의한 공칭 시스템 (1)식에서 구한 등가 제어 입력이다. 공칭 시스템에 대한 스위칭 면을 $s_{nom} = 0$ 이라 두면,

$$\begin{aligned} \dot{s}_{nom} &= C\dot{x} + \sum_{j=0}^q d_j \prod_{i=1}^m \dot{z}_i^{j_i} \\ &= CAx + CBu_{nom} + \sum_{j=0}^q h_j \prod_{i=1}^m z_i^{j_i} \end{aligned} \quad (12)$$

이다. 여기서 h_j 는 미분방정식의 임의의 비선형 함수이다. 등가 제어 입력은 다음과 같다.

$$u_{nom} = -(CB)^{-1} CAx - (CB)^{-1} \sum_{j=0}^q h_j \prod_{i=1}^m z_i^{j_i} \quad (13)$$

상태 궤환 제어를 설계함에 있어서 가정을 만족하며 연속적이고 양의 한정성을 가지는 스칼라 함수 $\rho(\cdot, \dots)$ 는 불확정 동특성 시스템의 안정도를 보장하는 중요한 함수이다. 그러나 이 함수 값은 때때로 불확정성의 구조가 복잡하기 때문에 경제값의 크기의는 알기

가 어렵고, 특히 외란의 경우는 쉽게 추정할 수가 없다.

본 논문은 $\|\rho(t, x)\|$ 경제값을 추정하는 간단한 적용 법칙을 제안하며, 이 법칙을 이용하여 제어기를 설계한다.

가정 4.

다음을 만족하는 양의 상수 $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r]^T$ 가 있다.

$$\|\rho(t, x)\| \leq \alpha^T F(t, x) \quad \forall (t, x) \in R \times R^n \quad (14)$$

단, $F_k(t, x) = \prod_{i=1}^r |x_i|^{m(i)k}$ $k = 0, 1, \dots, r$ 은 다중 다항식이며 k 번째 항을 나타낸다. r 는 다중 다항식의 항이며 시스템 불확실성에 의해 임의로 결정된다. $m(i, k)$ 는 i 차의 승수로 나타낸다.

(11)식에서 시스템의 불확실성을 보상하는 비선형 제어 입력 u_N 을 다음과 같이 정의한다.

$$u_N = \begin{cases} -\frac{B^T C^T}{\|B^T C^T s\|} \rho(t, x), & \text{if } s \neq 0 \\ 0, & \text{if } s = 0 \end{cases} \quad (15)$$

단, $\rho(t, x)$ 는 $\|\rho(t, x)\|$ 의 상한 경제값의 적용 추정값이며,

$$\rho(t, x) = \alpha^T F(t, x) \quad (16)$$

이다. 단 α 는 α 에 대한 추정값이다. 그리고 u_N 는 다음과 같이 정의한다.

$$u_s = -(CB)^{-1} Ks \quad (17)$$

단, $K \in R^{m \times m}$ 인 양의 한정 행렬이다.

(11), (13)과 (15)식으로부터

$$\dot{s} = -Ks(x) + sB(u_N + e(t, x)) \quad (18)$$

으로 주어진다. $\|\rho(t, x)\|$ 의 상한 경제치에 대한 간단한 적용 법칙을 다음과 같이 두자.

$$\hat{\alpha}_i(t, x) \triangleq q_i \|B^T C^T s\| F_i(t, x), \quad i = 0, 1, \dots, r \quad (19)$$

단, $\hat{\alpha}_i(t, x) = \alpha_i F_i(t, x) - \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, r$ 이다.

$q_i \in R$ 는 양의 적용 이득이다. α_i 값이 상수라고 가정하면,

$$\hat{\alpha}_i(t, x) = q_i \|B^T C^T s\| F_i(t, x), \quad i = 0, 1, \dots, r \quad (20)$$

제어법칙 (11)과 적용 법칙 (20)에 의해 $\dot{s}(x) = 0$ 가 점근 안정성을 판별하기 위하여 다음과 같은 Lyapunov 함수를 생각하자.

$$2V(s, \hat{\alpha}) = s^T s + \sum_{i=0}^r q_i^{-1} \hat{\alpha}_i^2 \quad (21)$$

(21)식을 시간에 대하여 미분하면,

$$\dot{V}(s, \hat{\alpha}) = s^T \dot{s} + \sum_{i=0}^r q_i^{-1} \dot{\hat{\alpha}}_i \hat{\alpha}_i \quad (22)$$

(14), (15), (16)과 (18)식으로부터 (20)식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(s, \hat{\alpha}) &= s^T [-Ks + CB(u_N + e)] + \sum_{i=0}^r q_i^{-1} \dot{\hat{\alpha}}_i \hat{\alpha}_i \\ &\leq -s^T Ks - \|B^T C^T s\| \sum_{i=0}^r \hat{\alpha}_i F_i(t, x) \\ &\quad + \|B^T C^T s\| \|e\| + \sum_{i=0}^r q_i^{-1} \dot{\hat{\alpha}}_i \hat{\alpha}_i \\ &\leq -s^T Ks < 0 \end{aligned} \quad (23)$$

(23)식이 음의 값을 가지므로 $s(x)$ 는 원점에 대해 전대역 접근 안정성을 만족함을 알 수 있다. 제어 입력 (15)식의 단정인 채터링 문제를 해결하기 위하여 스위칭 면에 대하여 경제성을 다음과 같이 둔다.

$$u_N = \begin{cases} -\frac{B^T C^T}{\|B^T C^T s\|} \rho(t, x), & \text{if } \|B^T C^T s\| \geq \varepsilon \\ -\frac{B^T C^T}{\varepsilon} \rho(t, x), & \text{if } \|B^T C^T s\| < \varepsilon \end{cases} \quad (24)$$

단, ε 은 임의의 양의 값이다.

3. 시뮬레이션 및 결과

그림 1과 같이 주어지는 단정자의 위치 제어를 생각해 보자. 단정자에 대한 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 0.5 \sin \theta (1 + 0.5 \cos \theta) \dot{\theta}^2 / \Delta(\theta) \\ &\quad - 10 \sin \theta (1 + \cos \theta) / \Delta(\theta) + \nu(t) \cos \theta \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 $\Delta(\theta) = 0.25(\cos \theta + 2)^2$ 이고, 외란 $\nu(t) = 2 \cos(3t)$ 이다.

이때 $x^T = [x_1, x_2] = [0, \theta]$ 라 하고, $u = T$ 라 두면 (25)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + e(t, x)) \quad (26)$$

여기서,

$$e(t, x) = \frac{-10(1 + \theta)\lambda + 0.5(1 + 0.5\theta)\lambda \cdot x_2^2 + (1 - \Delta(x_1))u + \nu(t)\xi}{\Delta(x_1)}$$

단, $\xi = \cos x_{1,1} \sin x_1$ 이다.

비선형 스위칭 면은 $s(x) = x_2 + 7x_1 + 3x_1^3$ 이다. 가변 구조 제어 입력은 $u_{nom} = -7x_2 - 3x_1^3, u_i = -0.1s(x)$ 이며 적용 변수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \bar{c}_0(t, x) &= c_0(0) + a_0 \int_0^t |x(x)| dx \\ \bar{c}_1(t, x) &= c_1(0) + a_1 \int_0^t |x(x)| |x| dx \\ \bar{c}_2(t, x) &= c_2(0) + a_2 \int_0^t |x(x)| |x|^2 dx \end{aligned}$$

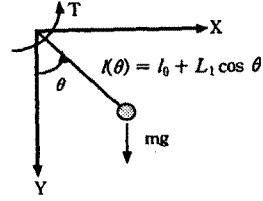
단, 초기치 $c_i(0)=0$ 이며 $Q=[2, 2, 0.1]$ 의 값을 가진다. 그림. 2와 3은 선형과 비선형 스위칭 면에 대한 궤적을 제어 평면으로 주어졌으며, 그림. 4는 응답을 비교하였다. 비선형 항을 첨가함으로써 인하여 응답속도가 증가함을 볼 수 있었다. 그림. 5는 경계층이 있는 경우의 응답이며 $\epsilon=0.02$ 로 두었으며 응답에 영향을 주지 않으며 채터링이 보임을 볼 수 있었다.

4. 결론

불확실한 동적 시스템을 제어하기 위해서는 불확실성의 경계값이 제어기 설계에 있어서 중요한 값이나 여러가지 이유로 인하여 구하기 쉽지않은 값이다.
본 논문에서는 접근 안정성을 보장하는 비선형 스위칭 면을 가지며 시스템의 불확실성의 경계값을 간단한 적응법칙을 이용하여 추정하는 가변구조제어기를 제안하였다. 제안한 제어기는 Lyapunov의 제2방법에 의해 접근안정성을 보장하였다.
또한, 단전자의 시뮬레이션을 통하여 제어기의 타당성을 검증하였으며 비선형 스위칭면의 이용하여 응답속도를 높였으며, 불확실성의 경계치에 대한 정보가 없어도 적응법칙을 이용하여 추정이 가능함을 보였다.

참고 문헌

- [1] U. Itkis, *Control Systems of Variable Structure*, New York: John Wiley & Sons, 1976.
- [2] V.I. Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Mode," *IEEE Trans. on Autom. Cont.*, Vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [3] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [4] J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking Control of Non-linear Systems Using Sliding Surfaces, with Application to Robot Manipulators," *Int. J. Control*, Vol. 38, No. 2, pp. 465-495, 1983.
- [5] H. Hashimoto, K. Maruyama, and F. Harashima, "A Microprocessor-based Robot Manipulator Control with Sliding Mode," *IEEE Trans. on Ind. Elect.*, Vol. 34, No. 1, pp. 11-18, Feb. 1987.
- [6] Y. F. Chen, T. Mita, and S. Wakui, "A New and Simple Algorithm for Sliding Mode Trajectory Control of the Robot Arm," *IEEE Trans. on Cont.*, Vol. 35, no. 7, pp. 828-829, July 1990.
- [7] K. Yeung and Y. P. Chen, "A New Controller Design for Manipulators Using the Theory of Variable Structure Systems," *IEEE Trans. on Autom. Cont.*, Vol. 33, No. 2, pp. 200-206, Feb. 1988.
- [8] D. S. Lee and M. J. Youn, "Controller Design of Multivariable VSS with Nonlinear Switching Surface," *Journal of KIEE*, Vol. 4, NO. 1, pp. 32-38, 1991.
- [9] H. H. Choi, H. K. Lee, and M. J. Chung, "Sliding Mode Control of Manipulators using a sliding Observer," *Journal of KIEE*, Vol. 8, NO. 2, pp. 132-140, 1995.
- [10] T. H. Park, S. W. Bae, G. T. Park, and K. S. Lee, "Design of Adaptive Fuzzy Controller Using Sliding Mode," *Trans. on KIEE*, Vol. 45, NO. 5, pp. 732-741, May 1996.
- [11] L. W. Chen and G. P. Papavassilopoulos, "Robust Variable Structure and Switching - Σ^2 Adaptive Control of Single Arm Dynamics," *IEEE Trans. on Autom. Cont.*, Vol. 39, NO. 8, Aug. 1994.
- [12] D. S. Yoo and M. J. Chung, "A Variable Structure Control with Simple Adaptation Laws for Upper Bounds on the Norm of the Uncertainties," *IEEE Trans. on A.C.*, Vol.37, No. 6, June 1992.
- [13] V. I. Utkin and K. D. Yang, "Methods for Constructing Discontinuity Planes in Multidimensional Variable Structure System," *Autom. Remote Control*, pp.1466-1470, 1979.
- [14] C. M. Dorling and A. S. I. Zinober, "Two Approaches to Hyperplane Design in Multivariable Structure Control Systems," *Int. J. Control*, Vol. 44, No. 1, pp. 65-82, 1986.
- [15] S. R. Hebert, "Differential Geometric Methods in Variable Structure Control," *Int. J. Control*, Vol. 48, NO. 4, pp. 1359-1390, 1988.



$$\frac{l_1}{l_0} = 0.5, \quad \frac{g}{l_0} = 10 \text{ and } m l_0^2 = 1$$

Fig. 1 Variable length pendulum.

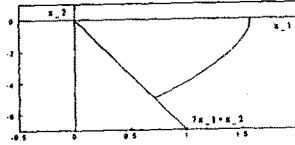


Fig. 2. Phase plane trajectory of linear switching surface

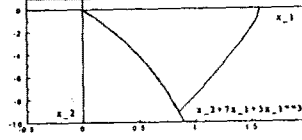


Fig. 3. Phase plane trajectory of nonlinear switching surface

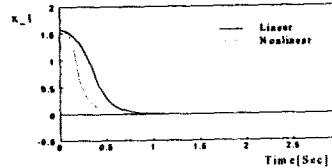


Fig. 4. Comparison between linear and nonlinear switching surface

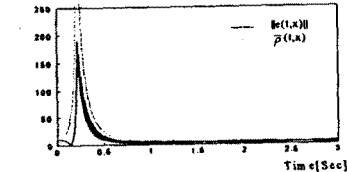


Fig. 5. Estimated and absolute real value of nonlinear switching surface

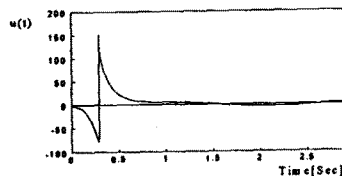


Fig. 6. Boundary layer input of nonlinear switching surface