

## 제어 입력에 시간 지연을 갖는 선형 시스템의 $H_\infty$ 제어기 설계

金 洪 樂   柳 爽 桓  
대구대학교

### An $H_\infty$ Controller Design for linear Systems with Input Time Delay

Hong-Rak Kim   Seog-Hwan Yoo  
Taegu University

**Abstract** - This paper presents a solution of the  $H_\infty$  control problem for linear systems with input time delay.  $H_\infty$  norm bounded condition is obtained as a sufficient condition for linear systems with input time delay. Based upon this sufficient condition, an  $H_\infty$  controller design method which involves the solutions of linear matrix inequalities via convex optimization is developed.

#### 1. 서 론

시스템에서 시간 지연은 종종 시스템의 성능을 저하시킬 뿐만 아니라 시스템 불안정성의 근원이 되기도 하기 때문에 시간 지연 시스템의 안정화를 위한 피드백 제어기(feedback controller)설계에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다[1-7]. 참고문헌[4]에서는 리카티 방정식을 이용하여 페루프 시스템을 안정화하는 상태 피드백 제어 법칙을 제시하였고, 참고문헌[6]에서는 리카티 방정식을 이용하여  $H_\infty$  노음을 주어진 값 미만으로 제한하면서 페루프 시스템을 안정화하는 상태 피드백 제어 법칙을 제시하였다. 이 경우 리카티 방정식은 지연시간에 무관하였으며 따라서 제시된 제어법칙은 시간지연을 갖는 선형 시스템을 지연시간의 크기에 무관하게 안정화할 수 있었다. 참고문헌[1]에서는 상태변수뿐만 아니라 제어입력에도 시간 지연을 가진 선형 시스템에 지연시간의 크기에 무관한 선형행렬부동식을 이용하여  $H_\infty$  노음을 주어진 값 미만으로 제한하면서 페루프 시스템을 안정화하는 상태 제어 법칙을 제시하였다. 참고문헌[2]에서는 상태변수에 시간지연을 갖는 선형시스템에서 지연시간의 크기에 종속인 선형 행렬 부동식을 이용하여 페루프 시스템을 안정화하는 상태 피드백 제어 법칙을 제시하였다.

이 논문에서는 제어 입력에 시간지연을 가진 선형 시스템에서  $H_\infty$  노음을 주어진 값 이하로 제한하면서 페루프 시스템을 안정화하는 상태 피드백 제어기(state feedback controller)를 설계한다. 이를 위해 상태변수에 시간지연을 가진 선형 시스템에 대한 지연시간의 크기에 종속인  $H_\infty$  노음 유계 조건을 제시하고, 얻어진 지연시간의 크기에 종속인  $H_\infty$  노음 유계 조건을 제어 입력에 시간 지연을 가지는 페루프 시스템에 적용시켜 선형 시스템을 안정하게 하고 주어진  $H_\infty$  노음 유계 조건을 충족하는 상태 피드백 제어를 구하고자 하였다.

본 연구에서 제시한 방법에서는 피드백 제어를 구하기 위해 지연시간의 크기에 종속인 선형행렬 부동식의 해를 구하여야 하며 이것을 위해 최근에 많이 연구가 된 컨벡스(convex) 최적화기법[8]을 사용한 다.

이 논문에서  $R^n$  은  $n$  차원의 실 벡터공간(real vector space)이며 주어진 행렬  $A$ 에 대해  $A^T$  와  $A^{-1}$  은 각각  $A$ 의 전치행렬과 역행렬을 의미하고  $A > 0$  ( $< 0$ ) 은  $A$ 가 양화정(음화정) 행렬을 의미한다.  $I_m$  은  $m \times m$  차원의 단위 행렬이고 문맥상 차원을 쉽게 알 수 있는 행렬의 경우에는 아래 첨자를 생략한다. 또한  $w$ 에 대한  $z$ 의 전달함수를  $T_{zw}$ 라 표기하고 시간 변수  $x(t)$ 에 대해서 문맥상 혼동이 없을 경우 간략화를 위해  $x$ 로 표기한다.

#### 2. 문제의 설정과 $H_\infty$ 노음 유계조건

##### 2.1 문제설정

다음의 제어입력에 시간지연이 존재하는 선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 u(t-h) \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x \in R^n$ 는 상태 변수,  $u \in R^m$ 는 제어 입력,  $w \in R^p$ 는 외부 외란,  $z \in R^q$ 는 오차 출력이다.  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B_1 \in R^{n \times m}$ ,  $B_2 \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{q \times n}$ ,  $D \in R^{q \times m}$ 는 상수 행렬이고,  $h \geq 0$ 은 지연 시간이며  $\phi(t)$ 는  $[-h, 0]$ 에서 연속인 시간함수이다.

**제어 문제** : 이 논문에서 선형 시간 지연 시스템 (1)에 대해서

- ①  $w(t) \equiv 0$ 일 때 페루프 시스템이 내부적으로 점근 안정(internally asymptotically stable)하고
- ②  $\phi(t) \equiv 0, t \in [-h, 0]$ 일 때,  $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$ 을 충족하는 전상태 피드백 제어기를 설계한다.

참고문헌[1]에서와 같이 지연시간의 크기에 무관하게 제어문제의 설계사양을 충족하는 상태피드백 제어법칙을 얻기위해  $u = Kx$ 라 할 때 (1)식의 시간 지연 시스템에 적용하면 페루프 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_2 Kx(t-h) + B_1 w \\ z &= (C + DK)x \end{aligned} \quad (2)$$

참고 문헌[1]에 주어진 지연시간의 크기에 독립인  $H_\infty$  노음 유계 조건을 (2)에 사용하면

$$QA^T + AQ + QR^{-1}Q + Q(C + DK)^T(C + DK)Q + B_2 K R K^T B_2 + \gamma^{-2} B_1 B_1^T < 0 \quad (3)$$

를 얻는다. (3)의 행렬 부동식을 만족하는  $K$ 와 대칭 양화정 행렬  $Q, R$ 이 존재할 경우  $u = Kx$ 는 제어문제의 해가 된다. 그러나  $A$ 가 불안정할 경우 (3)의 행렬부동식을 만족하는  $K$ 와 대칭 양화정 행렬  $Q, R$ 이 존재하기가 불가능하다. 따라서 (1)의 시간지연 시스템을 참고문헌[1]처럼 지연시간의 크기에 무관하게 안정화하기가 어렵다. 따라서 본 연구에서는 지연 시간의 크기에 종속인 설계기법을 제시한다.

##### 2.2 지연시간의 크기에 종속인 $H_\infty$ 노음 유계 조건

제어문제의 해를 구하기 전에 다음의 상태변수에 시간 지연을 갖는 선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_1x(t) + A_2x(t-h) + B_1u(t) \\ z(t) &= Cx(t) \\ x(t) &= \phi(t) \quad t \in [-h, 0]\end{aligned}\quad (4)$$

여기서  $A_1, A_2 \in R^{n \times n}$ ,  $B_1 \in R^{n \times p}$ ,  $C \in R^{q \times n}$ 는 상수 행렬이다. 지연 시간의 크기  $h$ 에 종속인  $H_\infty$  노음 유계 조건을 얻기 위해  $x(t-h)$ 를 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned}x(t-h) &= x(t) - \int_{-h}^0 \dot{x}(t+\theta) d\theta \\ &= x(t) - \int_{-h}^0 [A_1x(t+\theta) + A_2x(t-h+\theta) + B_1u(t+\theta)] d\theta\end{aligned}\quad (5)$$

편의상  $\eta$ 를 다음의 (6)식처럼 정의하고.

$$\begin{aligned}\eta &= - \int_{-h}^0 [A_1x(t+\theta) + A_2x(t-h+\theta) + B_1u(t+\theta)] d\theta \\ &= -\eta_1 - \eta_2 - \eta_3\end{aligned}\quad (6)$$

각각의  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  들을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \int_{-h}^0 A_1x(t+\theta) d\theta, \quad \eta_2 = \int_{-h}^0 A_2x(t-h+\theta) d\theta, \\ \eta_3 &= \int_{-h}^0 B_1u(t+\theta) d\theta\end{aligned}$$

그러면 (4)식은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A_1 + A_2)x + B_1w + A_2\eta \\ z &= Cx\end{aligned}\quad (7)$$

다음에 시간 지연 시스템(4) 혹은 (7)에서  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 인 조건을 정리 1에서 기술한다.

**정리 1** : 다음의 부등식 (8)을 만족하는 대칭 양화정 행렬  $Q, \Phi, \Psi, \Omega$ 가 존재하면 시간 지연 시스템(4)는

- ①  $w(t)=0$ 일때 페루프 시스템이 내부적으로 점근안정하고
- ②  $\phi(t)=0$ 일때  $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$ 을 만족한다.

$$\begin{aligned}Q(A_1 + A_2)^T + (A_1 + A_2)Q + hQA_1^T\Phi A_1Q + hQA_2^T\Psi A_2Q \\ + QC^TCQ + hA_2(\Phi^{-1} + \Psi^{-1} + \Omega^{-1})A_2^T + \gamma^{-2}B_1B_1^T \\ + \gamma^{-2}B_1B_1^T\left(\frac{1}{h}\Omega^{-1} - \gamma^{-2}B_1B_1^T\right)^{-1}\gamma^{-2}B_1B_1^T < 0\end{aligned}\quad (8)$$

(증명)

다음의 리아푸노프 후보 함수(Lyapunov functional candidate)를 정의한다.

$$V := x^TPx + W\quad (9)$$

(9)식에서  $P$ 는 대칭 양화정 행렬이고,  $W$ 는 항상 양의 값을 가지는 스칼라양이며 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}W &= \int_{-h}^0 \left[ \int_{t+\theta}^t x^T(s)A_1^T\Phi A_1x(s) ds \right. \\ &\quad + \int_{t-h+\theta}^t x^T(s)A_2^T\Psi A_2x(s) ds \\ &\quad \left. + \int_{t+\theta}^t w^T(s)B_1^T\Omega B_1w(s) ds \right] d\theta\end{aligned}\quad (10)$$

(7)식의 궤적에 따라 (9)식을 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{V} = \dot{x}^TPx + x^TP\dot{x} + \dot{W}\quad (11)$$

먼저 (10)에서  $W$ 를 시간에 대해 미분하고

$$\begin{aligned}\dot{W} &= hx^TA_1^T\Phi A_1x + hx^TA_2^T\Psi A_2x + hw^TB_1^T\Omega B_1w \\ &\quad - \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)A_1^T\Phi A_1x(t+\theta) d\theta \\ &\quad - \int_{-h}^0 x^T(t-h+\theta)A_2^T\Psi A_2x(t-h+\theta) d\theta \\ &\quad - \int_{-h}^0 w^T(t+\theta)B_1^T\Omega B_1w(t+\theta) d\theta\end{aligned}\quad (12)$$

슈왈츠(schwartz) 부등식을 사용하여  $\dot{W}$ 를 정리하면 (13)식이 구해진다.

$$\begin{aligned}\dot{W} &\leq hx^TA_1^T\Phi A_1x + hx^TA_2^T\Psi A_2x + hw^TB_1^T\Omega B_1w \\ &\quad - \frac{1}{h}\eta_1^T\Phi\eta_1 - \frac{1}{h}\eta_2^T\Psi\eta_2 - \frac{1}{h}\eta_3^T\Omega\eta_3\end{aligned}\quad (13)$$

따라서 (11)의 리아푸노프 후보함수의 미분은 다음과 같이 유계된다.

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq x^T[(A_1 + A_2)^TP + P(A_1 + A_2) + hA_1^T\Phi A_1 + hA_2^T\Psi A_2]x \\ &\quad + x^TPB_1w + w^TB_1^TPx + x^TPA_2\eta + \eta^TA_2^TPx \\ &\quad + hw^TB_1^T\Omega B_1w - \frac{1}{h}\eta_1^T\Phi\eta_1 - \frac{1}{h}\eta_2^T\Psi\eta_2 - \frac{1}{h}\eta_3^T\Omega\eta_3\end{aligned}\quad (14)$$

가치 함수  $J$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}J &= \int_0^\infty (z^Tz - \gamma^2w^Tw) dt \\ &= \int_0^\infty (z^Tz - \gamma^2w^Tw + \dot{V}) dt - V(\infty) + V(0) \\ &= \int_0^\infty H dt - V(\infty) + V(0)\end{aligned}\quad (15)$$

여기에서  $H = z^Tz - \gamma^2w^Tw + \dot{V}$ 이고 (7)와 (14)을 이용하면  $H$ 는 다음의 (16)식과 같이 유계된다.

$$\begin{aligned}H &\leq x^T[(A_1 + A_2)^TP + P(A_1 + A_2)]x \\ &\quad + x^T[hA_1^T\Phi A_1 + hA_2^T\Psi A_2 + C^TC]x \\ &\quad + x^TPB_1w + w^TB_1^TPx + x^TPA_2\eta + \eta^TA_2^TPx \\ &\quad + hw^TB_1^T\Omega B_1w - \gamma^2w^Tw \\ &\quad - \frac{1}{h}\eta_1^T\Phi\eta_1 - \frac{1}{h}\eta_2^T\Psi\eta_2 - \frac{1}{h}\eta_3^T\Omega\eta_3 \\ &= [x^T(t) \eta_1^T \eta_2^T \eta_3^T w^T(t)] M [x^T(t) \eta_1^T \eta_2^T \eta_3^T w^T(t)]^T < 0\end{aligned}\quad (16)$$

여기에서

$$M = \begin{bmatrix} N & -PA_2 & -PA_2 & -PA_2 & PB_1 \\ -A_2^TP & -\frac{1}{h}\Phi & 0 & 0 & 0 \\ -A_2^TP & 0 & -\frac{1}{h}\Psi & 0 & 0 \\ -A_2^TP & 0 & 0 & -\frac{1}{h}\Omega & 0 \\ B_1^TP & 0 & 0 & 0 & hB_1^T\Omega B_1 - \gamma^2I \end{bmatrix}$$

$$N = (A_1 + A_2)^TP + P(A_1 + A_2) + hA_1^T\Phi A_1 + hA_2^T\Psi A_2 + C^TC$$

따라서 다음(17)의 행렬부등식이 만족되면  $H < 0$ 이다.

$$\begin{bmatrix} P^{-1}NP^{-1} & -A_2 & -A_2 & -A_2 & B_1 \\ -A_2^T & -\frac{1}{h}\Phi & 0 & 0 & 0 \\ -A_2^T & 0 & -\frac{1}{h}\Psi & 0 & 0 \\ -A_2^T & 0 & 0 & -\frac{1}{h}\Omega & 0 \\ B_1^T & 0 & 0 & 0 & hB_1^T\Omega B_1 - \gamma^2I \end{bmatrix} < 0\quad (17)$$

(17)식에서  $Q = P^{-1}$ 라고 정의하고 Schur 여수정리(complement theorem)를 이용하여 정리하면 (17)의 행렬부등식은 다음과 동가이다.

$$\begin{aligned}N_1 + hA_2(\Phi^{-1} + \Psi^{-1} + \Omega^{-1})A_2^T \\ + B_1(\gamma^2I - hB_1^T\Omega B_1)^{-1}B_1^T < 0\end{aligned}\quad (18)$$

여기서  $N_1$  은

$$N_1 = Q(A_1 + A_2)^T + (A_1 + A_2)Q + hQA_1^T \Phi A_1 Q + hQA_2^T \Psi A_2 Q + QC^T CQ$$

(18)식을 행렬 역변환 정리(matrix inversion lemma)[10]를 사용후 정리하면 (8)을 만족한다.

(8)을 만족하면  $H < 0$  이고  $\phi(t) = 0 [-h, 0]$  일 경우  $V(0) = 0$  이므로  $J \leq \int_0^\infty H dt < 0$  이다.

내부적 점근안정의 증명은  $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$ 의 증명과 유사하므로 생략. [증명 끝]

### 3. 동적 상태 피드백 (Dynamic State Feedback) 제어기 설계

선형 시스템(1)의 입력 채널에 전달함수가  $\frac{\alpha}{s+\alpha} I_m$  ( $\alpha$ 는 양의 정수)인 저역통과 필터를 삽입한다. 이것에 대한 구조는 그림 1에 나타나 있다.

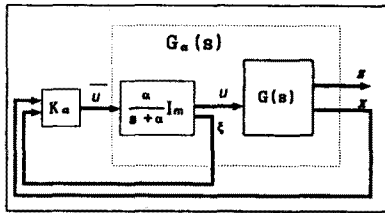


그림 1 동적 상태 피드백 구조

이 경우 확장된 시스템  $G_e(s)$ 의 상태방정식은

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= A_{1e}x_e + A_{2e}x_e(t-h) + B_{1e}w + B_{2e}\bar{u} \\ z &= C_e x_e \end{aligned} \quad (19)$$

이 되며 여기에서

$$x_e = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, A_{1e} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -\alpha I_m \end{bmatrix}, A_{2e} = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{1e} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{2e} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha I_m \end{bmatrix}, C_e = [C \ D]$$

전상태 피드백  $\bar{u} = K_e x_e$ 를 사용할 경우의 폐루프 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= (A_{1e} + B_{2e}K_e)x_e + A_{2e}x_e(t-h) + B_{1e}w \\ z &= C_e x_e \end{aligned} \quad (20)$$

이 된다.

정리 2 :  $L > 0$ 을 만족하는 적절한 차원을 가지는  $M_e$ 와 대칭 양확정 행렬  $Q_e, R_{1e}, R_{2e}, R_{3e}$ 가 존재하면 시간 지연 시스템(20)는  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 을 만족한다.

$$L = \begin{bmatrix} N_e & L_1 \\ L_1^T & L_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (21)$$

여기에서

$$N_e = -(Q_e A_{1e}^T + M_e^T B_{2e}^T + Q_e A_{2e}^T + A_{1e} Q_e + B_{2e} M_e + A_{2e} Q_e + h A_{2e} (R_{1e} + R_{2e} + R_{3e}) A_{2e}^T + \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T)$$

$$L_1 = [Q_e C_e^T \quad Q_e A_{1e}^T + M_e^T B_{2e}^T \quad Q_e A_{2e}^T \quad \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T]$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} I_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} R_{1e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} R_{2e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} R_{3e} - \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T \end{bmatrix}$$

(증명)

$H_\infty$  노음 유계 조건으로 제시된 정리 1을 (20)식에 적용하면 다음의 행렬 부등식이 구해진다.

$$\begin{aligned} & Q_e A_{1e}^T + Q_e K_e^T B_{2e}^T + Q_e A_{2e}^T + A_{1e} Q_e + B_{2e} K_e Q_e + A_{2e} Q_e \\ & + h(Q_e A_{1e}^T + Q_e K_e^T B_{2e}^T) \Phi_e (A_{1e} Q_e + B_{2e} K_e Q_e) \\ & + h Q_e A_{2e}^T \Psi A_{2e} Q_e + Q_e C_e^T C_e Q_e \quad (22) \\ & + h A_{2e} (\Phi_e^{-1} + \Psi_e^{-1} + \Omega_e^{-1}) A_{2e}^T + \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T \\ & + \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T \left( \frac{1}{h} Q_e^{-1} - \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T \right)^{-1} \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T < 0 \end{aligned}$$

컨벡스한 제약조건을 만족하는 형태로 바꾸기 위해 (22)식에서  $M_e = K_e Q_e, \Phi_e^{-1} = R_{1e}, \Psi_e^{-1} = R_{2e}, \Omega_e^{-1} = R_{3e}$  라고 두고 다시 정리하면 (23)식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & Q_e A_{1e}^T + M_e^T B_{2e}^T + Q_e A_{2e}^T + A_{1e} Q_e + B_{2e} M_e + A_{2e} Q_e \\ & + h(Q_e A_{1e}^T + M_e^T B_{2e}^T) R_{1e}^{-1} (A_{1e} Q_e + B_{2e} M_e) \\ & + h Q_e A_{2e}^T R_{2e}^{-1} A_{2e} Q_e + Q_e C_e^T C_e Q_e \quad (23) \\ & + h A_{2e} (R_{1e} + R_{2e} + R_{3e}) A_{2e}^T + \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T \\ & + \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T \left( \frac{1}{h} R_{3e} - \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T \right)^{-1} \gamma^{-2} B_{1e} B_{1e}^T < 0 \end{aligned}$$

(23)식을 Schur 역수정리(complement theorem)를 이용하면 (21)식의 선형행렬 부등식과 동가임을 알 수가 있다. [증명 끝]

$L > 0$ 은 구하려는 대칭 양확정 행렬  $Q_e, R_{1e}, R_{2e}, R_{3e}$ 와  $M_e$ 에 대한 컨벡스 제약조건이므로 이것을 만족하는  $Q_e, R_{1e}, R_{2e}, R_{3e}, M_e$ 는 컨벡스 최적화기법[8]을 사용하여 구할 수 있고 해로부터 시스템(19)의 폐루프 시스템을 내부적으로 안정화시키고  $H_\infty$  노음을  $\gamma$ 미만으로 유지하는 제어기  $K_e = M_e Q_e^{-1}$ 를 구할 수 있다. 이 경우 동적 상태 피드백 제어기는 다음과 같이 상태공간에서 구현된다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (-\alpha I + \alpha K_{2e})\xi + \alpha K_{1e} x \\ u &= \xi \end{aligned} \quad (24)$$

여기에서  $K_e = [K_{1e} \ K_{2e}]$  이다.

위의 동적 상태 피드백 제어기는  $\alpha$ 가 충분히 클 경우 특이 성분이론[9]에 의해  $\xi = \bar{u}$ 로 근사화되므로 정적 상태 피드백 입력  $u = (I - K_{2e})^{-1} K_{1e} x$ 로 근사화할 수 있다.

#### 4. 수치 예

시스템(1)이 다음의 가상적인 시스템으로 주어졌다고 가정한다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{7} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

시간 지연  $h=0.1$ 이고  $\gamma=0.2$ 일 때  $\alpha=1000$ 이라 선정하고 (21)의 선형행렬부등식을 컨벡스 최적화기법[8]에 의해 MATLAB을 이용하여 해를 구하였다. 이때  $Q_e, R_{1e}, R_{2e}, R_{3e}, M_e$ 는 다음과 같이 얻었다.

$$Q_a = \begin{bmatrix} 4.6464 & -1.9039 & 0.6392 & -1.7745 \\ -1.9039 & 5.7952 & -14.7435 & -0.8984 \\ 0.6392 & -14.7435 & 45.8662 & -2.0557 \\ -1.7745 & -0.8984 & -2.0557 & 12.4594 \end{bmatrix}$$

$$R_{1a} = \begin{bmatrix} 35.8329 & 21.8376 & -5.3435 & -0.0018 \\ 21.8376 & 50.7017 & -10.4805 & 0.0230 \\ -5.3435 & -10.4805 & 29.9813 & -0.0896 \\ -0.0018 & 0.0230 & -0.0896 & 3.9986 \end{bmatrix}$$

$$R_{2a} = \begin{bmatrix} 62.8267 & 43.4528 & 0.0000 & 0.0000 \\ 43.4528 & 62.8267 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 19.3739 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0046 \end{bmatrix}$$

$$R_{3a} = \begin{bmatrix} 38.8958 & 0.0000 & 19.5219 & 0 \\ 0.0000 & 19.3739 & 0.0000 & 0 \\ 19.5219 & 0.0000 & 38.8958 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0046 \end{bmatrix}$$

$$M_a = [-1.7745 \quad -0.8987 \quad -2.0551 \quad 12.4195]$$

이 경우  $K_a = [-30.8077 \quad -70.5275 \quad -22.9358 \quad -12.2608]$  으로 얻어진다. (24)식의 동적 상태 피드백 제어기를 시스템(1)에 인가할 경우 폐루프 시스템 전달함수의 특이치를 그림 2의 실선으로 표시하였다. 그림 2에서 알 수 있는 바와 같이  $\|T_{zw}\|_\infty < 0.2$  를 만족함을 알 수 있다. 다음 정적상태 피드백으로 근사화할 경우  $K = [-2.3232 \quad -5.3185 \quad -1.7296]$  으로 얻어졌으며  $u = Kx$  를 시스템 (1)에 인가하였을 때 폐루프 시스템 전달함수의 특이치를 그림 2의 점선으로 표시하였다. 이 경우 근사화한 정적 상태 피드백과 동적 상태 피드백의 폐루프 전달함수의 특이치가 거의 같음을 알 수 있다.

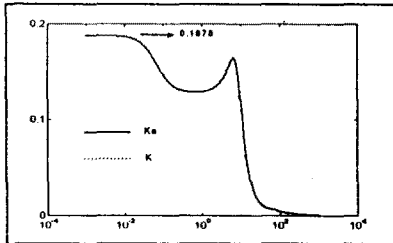


그림 2.  $\|T_{zw}\|_\infty$

## 5. 결 론

제어 입력에 시간 지연을 가진 선형시스템에 대해 폐루프 시스템의  $H_\infty$  노음의 크기를 설계값 미만으로 유지하면서 안정화시키는 상태 피드백 제어기를 설계하였다. 설계방법식은 지연시간의 크기에 종속인 선형 행렬부동식의 형태로 주어지며 이는 최근 널리 연구가 되고 있는 컨벡스 최적화 기법을 사용하여 쉽게 해를 구할 수 있다. 상태피드백 제어기는 동적 상태 피드백 제어기의 형태로 얻어졌으며 제시된 방법의 타당성을 검증하기 위해서 수치예를 보여 주었다.

## 참 고 문 헌

- [1] Seog-Hwan Yoo "A Robust  $H_\infty$  Control for Linear Time Delay Systems with Real Parameter Uncertainties", 電氣學會 논문지 44卷 8號 pp.1115-1118, 1995年 8月
- [2] Xi Li and Carlos E. de Souza "LMI Approach to Delay-Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems" Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control New Orleans, LA, pp. 3614-3619, December 1995

- [3] Te-jeu Su and Chuan-Guey Guang "Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol 37, No.10 pp. 1656-1659, 1992
- [4] Suthee Phoojaruenchanachai and Katsuhisa Furuta "Memoryless Stabilization of Uncertain Linear Systems Including Time-Varying State Delays" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol 37, No. 7, pp. 1022-1026, 1992
- [5] Hansheng Wu and Koichi Mizukami, "Linear and Nonlinear Stabilizing Continuous Controllers of Uncertain Dynamical Systems Including State Delay" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol 41, No. 1, pp. 116-121, 1996
- [6] Joon Hwa Lee, Sang Woo Kim, and Wook Hyun Kwon, "Memoryless  $H^\infty$  Controllers for State Delayed Systems" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol 39, No. 1, pp. 159-161, 1994
- [7] Magdi S. Mahmoud and Maser F. Al-Muthairi, "Quadratic Stabilization of Continuous Time Systems with State-Delay and Norm-Bounded Time-Varying Uncertainties" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol 39 No. 10, pp. 2135-2139, 1992
- [8] A. Nemirovskii and P. Gahinet, "The projective method for solving linear matrix inequalities", Proceedings of American Control Conference, pp. 840-844, Baltimore, Maryland, June 1994.
- [9] P. Kokotovic and P. Sannuti, "Singular Perturbation Method for Reducing the Model Order in Optimal Control Design", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol AC-13 No. 4, pp. 377-383, 1968
- [10] Kemin Zhou with John C. Doyle and Keith Glover, "Robust and optimal control", Prentice-Hall, Inc. pp. 22-23, 1995